Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 463, 2017 г.

Ю. А. Альпин, В. С. Альпина

ТЕМПОРАЛЬНЫЕ КОМПОНЕНТЫ ПОЛУГРУППЫ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ. ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ МИНКА О СТРУКТУРЕ НЕПРИВОДИМОЙ МАТРИЦЫ

§1. Введение

Напомним, что неотрицательная матрица A порядка n называется неприводимой, если для любых индексов i,j из множества $N = \{1, \dots, n\}$ существует такой показатель l, что (i, j)-элемент матрицы A^l положителен.

Неотрицательная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{k-1,k} \\ A_{k1} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

с квадратными диагональными нулевыми блоками называется наддиагональной блочной матрицей. Если A неприводима и имеет индекс импримитивности $r(A) = k$, то матрица (1) есть не что иное, как известная форма Фробениуса неприводимой импримитивной неотрицательной матрицы (см., например, [1]). В общем случае неотрицательная матрица в форме (1) может быть приводимой, либо, будучи неприводимой, может иметь индекс импримитивности, не равный её блочному порядку k.

Х. Минк [2,3] установил следующий критерий неприводимости наддиагональной блочной матрицы:

Теорема 1. *Пусть неотрицательная матрица A без нулевых строк и столбцов находится в форме* (1)*. Тогда A неприводима в том, и только том, случае, когда произведение $A_{12}A_{23}\cdots A_{k1}$ является неприводимой матрицей.*

Ключевые слова: неприводимая неотрицательная матрица, форма Фробениуса, полугруппа неотрицательных матриц.

Для доказательства автор привлёк спектральные свойства матрицы (1), известные из теории Перрона–Фробениуса неотрицательных матриц. Позднее были предложены различные комбинаторные (и более простые) доказательства теоремы 1 [4–6]. Мы сформулируем и докажем обобщение теоремы 1 на полугруппы неотрицательных матриц. В определениях и доказательствах используются лишь комбинаторные свойства неотрицательных матриц. Вначале введём подходящую терминологию.

Несложное вычисление показывает, что при возведении матрицы (1) в степень k получается блочно-диагональная матрица

$$A^k = \operatorname{diag}(A_{11}^{(k)}, A_{22}^{(k)}, \ldots, A_{kk}^{(k)}). \tag{2}$$

Пусть матрица (1) стохастическая и, следовательно, определяет периодическую цепь Маркова. Если мы наблюдаем цепь лишь в моменты времени $k, 2k, 3k, \ldots$, то получим новую цепь Маркова с матрицей (2) переходных вероятностей. Эта цепь распадается на k цепей, управляемых диагональными стохастическими подматрицами матрицы (2) (подробнее о периодических цепях см., например, [7]). Поэтому представляется естественным назвать матрицы $A_{11}^{(k)}, A_{22}^{(k)}, \ldots, A_{kk}^{(k)}$ темпоральными компонентами матрицы A. Далее будем использовать этот термин и тогда, когда неотрицательная матрица (1) не является стохастической.

Нетрудно видеть, что $A_{11}^{(k)} = A_{12}A_{23} \cdots A_{k1}$. Значит, теорема 1 допускает следующую переформулировку: неотрицательная матрица (1) без нулевых строк и столбцов неприводима в точности тогда, когда неприводима её первая темпоральная компонента. Вместо первой можно взять, разумеется, любую другую компоненту.

Теперь пусть $\mathcal{P}$ – мультипликативная полугруппа неотрицательных матриц порядка n. Полугруппа $\mathcal{P}$ называется неприводимой, если для любых индексов i,j из множества $N = \{1, \ldots, n\}$ в полугруппе найдётся матрица с положительным (i, j)-элементом. Заметим, что переход от единственной неприводимой матрицы к неприводимой полугруппе матриц совершается естественно, так как моногенная полугруппа, порожденная неприводимой матрицей A и состоящая из матриц A^l $(l = 1, 2, \ldots)$, неприводима.

Обобщая понятие наддиагональной блочной матрицы, назовём матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k1} & A_{k2} & \dots & A_{kk} \end{pmatrix}$$

с квадратными диагональными блоками блочно-мономиальной, если в каждой блочной строке и каждом блочном столбце имеется ровно один ненулевой блок.

Мы будем рассматривать полугруппы блочно-мономиальных матриц. Подразумевается, что все матрицы полугруппы разбиты на блоки одним и тем же способом, так что умножение матриц можно производить поблочно. Один пример полугруппы блочно-мономиальных матриц у нас уже есть: это полугруппа, порожденная наддиагональной блочной матрицей. Вообще, полугруппы блочно-мономиальных матриц возникают естественным образом: как доказано в [8], всякая неприводимая полугруппа неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов либо содержит положительную матрицу, либо посредством некоторого перестановочного подобия все матрицы полугруппы преобразуются к блочно-мономиальному виду.

В §2 будет введено понятие темпоральной компоненты полугруппы блочно-мономиальных матриц и приведены соответствующие примеры. В §3 доказывается обобщение теоремы Минка на полугруппы блочно-мономиальных матриц. Оно представлено в виде теорем 2 и 3.

§2. Темпоральные компоненты

Обозначим символом P_n полугруппу всевозможных неотрицательных матриц порядка n. Пусть $\mathcal{P} \subseteq P_n$ – полугруппа блочно-мономиальных матриц блочного порядка k. Множество матриц из $\mathcal{P}$, у которых (s,s)-блок ненулевой, образует подполугруппу в $\mathcal{P}$. Следовательно, множество $\mathcal{P}_s$ диагональных (s,s)-блоков матриц этой полугруппы тоже образует мультипликативную полугруппу матриц. Эту полугруппу и будем называть s-й темпоральной компонентой полугруппы $\mathcal{P}$.

В следующих двух примерах полагаем, что диагональные блоки имеют размеры $n_1, n_2, \dots, n_k$ соответственно $(n_1 + n_2 + \dots + n_k = n)$.

Пример 1. Полугруппа $\mathcal{D}_n \subseteq P_n$ всевозможных блочно-диагональных матриц. Темпоральными компонентами $\mathcal{D}_n$ служат, очевидно, полугруппы $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_k}$.

Пример 2. Полугруппа $\mathcal{B}_n \subseteq P_n$ всевозможных блочно-мономиальных матриц. Темпоральные компоненты полугруппы $\mathcal{B}_n$ те же, что у полугруппы $\mathcal{D}_n$.

Действительно, поскольку $\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{B}_n$, то s-ая темпоральная компонента полугруппы $\mathcal{D}_n$ содержится в s-й темпоральной компоненте полугруппы $\mathcal{B}_n$, т.е. имеет место вложение $P_{n_s} \subseteq (\mathcal{B}_n)_s$ $(s = 1, \dots, k)$. Но это вложение на самом деле является равенством, так как в P_{n_s} входят всевозможные неотрицательные матрицы порядка n_s.

Пусть $M \subseteq P_n$ – некоторое семейство блочно-мономиальных матриц с одинаковым разбиением на блоки. Обозначим через $\langle M \rangle$ мультипликативную полугруппу всевозможных произведений матриц из M. Говорят, что она порождена семейством M. Покажем, что темпоральные компоненты полугруппы $\langle M \rangle$ можно наглядно представить с помощью графа. Сопоставим семейству M нагруженный ориентированный мультиграф с вершинами $1, \dots, k$. Положим, что дуга $s \to t$ с весом A_{st} существует, если (s,t)-блок матрицы $A \in M$ ненулевой. Весом пути в этом графе называется произведение весов дуг, составленное в том порядке, в каком расположены дуги пути. Нетрудно видеть, что темпоральной компоненте $\mathcal{M}_v$ принадлежат в точности те матрицы, которые являются весами замкнутых путей, начало и конец которых лежат в вершине v. Приведём простой пример, иллюстрирующий графовое представление темпоральных компонент.

Пример 3. Рассмотрим полугруппу, порождённую матрицами

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в которых все блоки – квадратные матрицы одного порядка. Граф семейства $\{F, G\}$ имеет вершины 1 и 2, причем вокруг вершины 1 есть петля веса A, вокруг вершины 2 есть петля веса B, из каждой вершины в другую вершину ведёт дуга единичного веса E. Из рисунка графа видно, что обе темпоральные компоненты рассматриваемой полугруппы совпадают с полугруппой $\langle A, B, E \rangle$.

§3. Обобщение теоремы Минка

Теорема 1 относится к полугруппе, порождённой единственной наддиагональной блочной матрицей. Переход к полугруппам блочно-мономиальных матриц общего вида так изменяет ситуацию, что обобщение теоремы 1 представлено ниже в виде двух теорем, доказываемых при различных условиях.

Вначале докажем один полезный критерий неприводимости.

Лемма 1. *Полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц неприводима тогда и только тогда, когда некоторая конечная сумма матриц полугруппы является положительной матрицей.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ неотрицательных матриц порядка n неприводима. Согласно определению неприводимости, это значит, что для любой пары индексов $i, j \in N$ существует матрица $A(i,j) \in \mathcal{P}$, такая что $(A)_{ij} > 0$. Суммируя матрицы $A(i,j)$ по всевозможным $i, j \in N$, получим положительную матрицу. Обратно, пусть полугруппа $\mathcal{P}$ содержит конечный набор матриц $A_1, \ldots, A_m$, сумма которых является положительной матрицей. Ясно, что в этом наборе для любых i, j найдётся матрица с положительным (i,j)-элементом, следовательно, полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. $\square$

Теорема 2. *Темпоральные компоненты неприводимой полугруппы $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц неприводимы.*

Доказательство. Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. Согласно лемме 1, некоторая конечная сумма $A + B + \cdots + C$ матриц из $\mathcal{P}$ является положительной матрицей. В частности, при любом s сумма диагональных блоков этих матриц, расположенных на s-й позиции, т.е. сумма матриц из s-й компоненты полугруппы $\mathcal{P}$, является положительной матрицей. Следовательно, по лемме 1, s-я темпоральная компонента $\mathcal{P}$ при любом s неприводима. $\square$

Замечание 1. Теорема 2 обобщает ту часть теоремы 1, которая утверждает (если пользоваться терминологией, введённой в §1), что из неприводимости наддиагональной блочной матрицы вытекает неприводимость её темпоральных компонент. Отметим отличие, возникающее при переходе к полугруппам блочно-мономиальных матриц общего вида. Если неотрицательная матрица A неприводима, то она, очевидно, не может содержать нулевых строк и столбцов. То же верно и для всех матриц полугруппы, порождённой этой матрицей. Но в общем случае неприводимые полугруппы могут содержать матрицы с нулевыми рядами, и для доказательства теоремы 2 отсутствие нулевых рядов не требуется.

Пример 4. Положим, что в матрице A примера 3 первый столбец положителен, а остальные столбцы нулевые; пусть в матрице B первая строка положительная, а другие строки нулевые. Тогда матрица F имеет нулевые строки и столбцы. Темпоральная компонента $\langle A, B, E\rangle$ полугруппы $\langle F, G\rangle$ содержит положительную матрицу AB и, по лемме 1, неприводима. Следовательно, по теореме 2, неприводима и полугруппа $\langle F, G\rangle$.

Следующая очевидная лемма приводится без доказательства.

Лемма 2. *Произведение двух неотрицательных матриц, одна из которых положительная, а другая не содержит нулевых строк и столбцов, является положительной матрицей.*

Теорема 3. *Предположим, что полугруппа $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц блочного порядка k удовлетворяет следующим условиям:*

1) *матрицы полугруппы не имеют нулевых строк и столбцов;*

2) *для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ полугруппа содержит матрицу с ненулевым (s, t)-блоком.*

Тогда, если некоторая темпоральная компонента полугруппы $\mathcal{P}$ неприводима, то и полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.

Доказательство. Пусть некоторая темпоральная компонента неприводима. Для простоты обозначений будем считать, что неприводима компонента $\mathcal{P}_1$. Тогда, по условию 2) теоремы, для любых $s, t \in \{1, 2, \ldots, k\}$ существуют матрицы $B, C \in \mathcal{P}$ такие, что $B_{s1} \neq 0, C_{1t} \neq 0$. Поскольку полугруппа $\mathcal{P}_1$ неприводима, то полугруппа $\mathcal{P}$ содержит такие матрицы $X, \ldots, Y$, что в их сумме $Z = X + \cdots + Y$ блок $Z_{11} = X_{11} + \cdots + Y_{11}$ положителен. По условию 1), блочно-мономиальные матрицы B и C не имеют нулевых строк и столбцов. Тем же свойством, очевидно, обладают их ненулевые блоки B_{s1} и C_{1t}. Значит, по лемме 2, матрица $B_{s1}Z_{11}C_{1t}$ положительная. Отсюда и из равенств

$$B_{s1}Z_{11}C_{1t} = B_{s1}X_{11}C_{1t} + \cdots + B_{s1}Y_{11}C_{1t} = (BXC)_{st} + \cdots + (BYC)_{st}$$

следует, что в полугруппе $\mathcal{P}$ найдутся такие матрицы $BXC, \ldots, BYC$, что их сумма BZC имеет положительный (s,t)-блок. Суммируя матрицы типа BZC по всевозможным $s,t \in \{1,2,\ldots,k\}$, получим положительную матрицу. По лемме 1, это означает неприводимость полугруппы $\mathcal{P}$. □

Замечание 2. Теорема 3 обобщает положение теоремы 1, утверждающее, что неприводимость темпоральной компоненты наддиагональной блочной матрицы A влечёт неприводимость матрицы A. Заметим, что без условий 1) и 2) обойтись нельзя. Если опустить условие 1), то утверждение теоремы становится неверным. Действительно, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $A_{11}^{(2)} = A_{12}A_{21}$ – положительная матрица, то, по лемме 1, первая темпоральная компонента полугруппы $\langle A \rangle$ неприводима. Однако сама полугруппа $\langle A \rangle$ приводима, поскольку у всех матриц полугруппы четвёртый столбец нулевой.

Без условия 2) утверждение теоремы 3 также перестаёт быть верным. Действительно, если при некоторых s и t во всех матрицах полугруппы (s,t)-блок нулевой, то это явно противоречит определению неприводимой полугруппы.

Следствие 1. *Пусть полугруппа $\mathcal{P}$ блочно-мономиальных матриц удовлетворяет условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 3. *Если одна из матриц полугруппы содержит положительный блок, то полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима.*

Доказательство. Пусть (s,t)-блок матрицы $A \in \mathcal{P}$ положителен. Из условия 2) следует, что существуют матрицы $B, C \in \mathcal{P}$ такие, что $B_{1s} \neq 0, C_{t1} \neq 0$. Тогда $(1,1)$-блок матрицы BAC равен $B_{1s}A_{st}C_{t1}$. Он положителен по причинам, уже приведённым в доказательстве теоремы 3. Следовательно, темпоральная компонента $\mathcal{P}_1$ неприводима по лемме 1, как содержащая положительную матрицу. Применяя теорему 3, заключаем, что полугруппа $\mathcal{P}$ неприводима. □

Литература

1. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* Наука, М., 1967.

2. H. Minc, *The structure of irreducible matrices.* — Linear and Multilinear Algebra **2** (1974), 85–90.
3. H. Minc, *Nonnegative Matrices.* Wiley, New York etc., 1988.
4. N. J. Pullman, *A note on a theorem of Minc on irreducible nonnegative matrices.* — Linear and Multilinear Algebra **2** (1974), 335–336.
5. L. EIsner, *Another note on a theorem of Minc on irreducible nonnegative matrices.* – Linear and Multilinear Algebra **6** (1978), 61–62.
6. R. A. Brualdi, M. Lewin, *On powers of nonnegative matrices.* — Linear Algebra Appl. **43** (1982), 87–97.
7. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и её приложения.* Т. 1, Мир, 1967.
8. V. Yu. Protasov, A. S. Voynov, *Sets of nonnegative matrices without positive products.* — Linear Algebra Appl. **437** (2012), 749–765.

Al'pin Yu. A., Al'pina V. S. Temporal components of a semigroup of nonnegative matrices. A generalization of Minc's theorem on the structure of an irreducible matrix.

The notion of a temporal component of a semigroup of block-monomial nonnegative matrices is introduced. For such semigroups, a generalization of Mink's theorem on the structure of an irreducible matrix is proved.

Казанский федеральный университет,
ул. Кремлевская 18,
420008 Казань, Россия
E-mail: Yuri.Alpin@kpfu.ru

Поступило 27 октября 2017 г.

Казанский национальный исследовательский
технологический университет,
ул. К. Маркса 68,
420015 Казань, Россия
E-mail: alpina.valentina@yandex.ru