Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 462, 2017 г.

Я. Теплицкая

РЕГУЛЯРНОСТЬ МИНИМАЙЗЕРОВ ФУНКЦИОНАЛА МАКСИМАЛЬНОГО РАССТОЯНИЯ

§1. Введение

Для заданного компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим функционал максимального расстояния

$$F_M(\Sigma) := \max_{y \in M} \operatorname{dist}(y, \Sigma),$$

где Σ является замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^2$, а $\operatorname{dist}(y, \Sigma)$ означает евклидово расстояние между y и Σ. Значение $F_M(\Sigma)$ также называют *энергией* множества Σ.

Рассмотрим класс замкнутых связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, таких, что $F_M(\Sigma) \leqslant r$ для заданного $r > 0$. Нас интересуют свойства множеств, обладающих минимальной длиной (линейной мерой Хаусдорфа) $\mathcal{H}^1(\Sigma)$ среди множеств этого класса. В дальнейшем такие множества мы будем называть *минимайзерами*.

Несложно понять, что для каждого числа $r > 0$ множество минимайзеров непусто. Известно также, что для любого минимайзера ненулевой длины будет выполняться равенство $F_M(\Sigma) = r$. Также множество минимайзеров совпадает с множеством решений для соответствующей двойственной задачи: минимизировать F_M среди всех компактных связных множеств $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ с заранее заданным ограничением на длину $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leqslant l$. Поэтому искомые множества называют минимайзерами максимального расстояния. Строгие формулировки и доказательства этих утверждений (и их n-мерных аналогов) можно найти в статьях [2] и [3].

Пусть далее $B_r(x)$ обозначает открытый шар с центром в точке x и радиусом r. В свою очередь, $B_r(M)$ обозначает открытую r-окрест-

Ключевые слова: дерево Штейнера, локально минимальная сеть, минимайзер максимального расстояния, регулярность.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

ность множества M:

$$B_r(M) := \bigcup_{x \in M} B_r(x).$$

Несложно заметить, что множество Σ ограничено (и, значит, компактно), поскольку $\Sigma \subset \overline{B_r(\operatorname{conv} M)}$, где $\operatorname{conv} M$ означает выпуклую оболочку множества M.

Определение 1.1. *Точка $x \in \Sigma$ называется* энергетической*, если для произвольного $\rho > 0$ выполняется неравенство*

$$F_M(\Sigma \setminus B_\rho(x)) > F_M(\Sigma).$$

Обозначим множество всех энергетических точек Σ через G_Σ.

Любой минимайзер Σ разбивается на три непересекающихся множества:

$$\Sigma = E_\Sigma \sqcup X_\Sigma \sqcup S_\Sigma,$$

где $X_\Sigma \subset G_\Sigma$ – множество изолированных энергетических точек (то есть для произвольной точки $x \in X_\Sigma$ найдется такое $\rho > 0$, что $B_\rho(x) \cap G_\Sigma = \{x\}$), а $E_\Sigma = G_\Sigma \setminus X_\Sigma$ обозначает множество неизолированных энергетических точек. Множество неэнергетических точек $S_\Sigma := \Sigma \setminus G_\Sigma$ называют штейнеровской частью минимайзера Σ. Несложно заметить, что предел любой бесконечной последовательности энергетических точек лежит в множестве E_Σ.

В работах [2] (для $n = 2$) и [3] (для общего случая) доказаны следующие свойства минимайзеров.

(а) Минимайзеры не могут содержать циклы (то есть гомеоморфные образы окружности).

(б) Для любой энергетической точки $x \in G_\Sigma$ найдется такая точка $y \in M$, что $|x - y| = r$ и $B_r(y) \cap \Sigma = \varnothing$.

(в) Для любой неэнергетической точки $x \in S_\Sigma$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ является либо отрезком, либо правильной треногой, то есть объединением трех отрезков с общим концом в точке x и попарными углами $2\pi/3$.

Также, поскольку Σ является замкнутым связным множеством с конечной мерой Хаусдорфа, верен следующий факт:

(г) У $\mathcal{H}^1$-почти всех точек множества Σ существует касательная прямая (см. определение 2.1).

§2. Результаты

Определим некоторые объекты.

Определение 2.1. *Пусть $x \in \Sigma$. Будем говорить, что*

(1) *луч $(ax]$ является касательным лучом множества Σ в точке x, если существует последовательность точек $x_k \in \Sigma$, таких, что $x_k \to x$ и $\angle x_k x a \to 0$;*

(2) *луч $(ax]$ является односторонней касательной к Σ в точке x, если существует такое нетривиальное связное множество $\Sigma' \subset \Sigma$, содержащее x, что для любой последовательности $x_k \in \Sigma'$, сходящейся к x, выполняется условие $\angle x_k x a \to 0$;*

(3) *прямая (ax) является касательной прямой к множеству Σ в точке x, если для любой последовательности точек $x_k \in \Sigma$, таких, что $x_k \to x$, выполняется условие $\angle((x_k x)(ax)) \to 0$.*

Главный анонсируемый результат – теорема 2.2 о регулярности минимайзера.

Теорема 2.2. *Пусть Σ – минимайзер максимального расстояния для плоского компактного множества M. Тогда верны следующие утверждения.*

(i) *Множество Σ является объединением конечного числа инъективных кривых.*

(ii) *Угол между любыми двумя касательными лучами в произвольной точке $x \in \Sigma$ не меньше $2\pi/3$.*

(iii) *Касательных лучей в точке $x \in \Sigma$ не более трех. Если их три, то в некоторой окрестности точки x инъективные кривые с концами в x являются прямолинейными отрезками (согласно п.* (ii) *попарные углы между ними равны $2\pi/3$). Такие точки мы будем называть точками ветвления.*

Из теоремы 2.2 следует, что минимайзеры максимального расстояния всегда содержат конечное число точек ветвления. Приведем еще один результат анонсируемой статьи о локальном поведении минимайзеров.

Теорема 2.3. (1) *Если $x \in S_\Sigma \cap X_\Sigma$, то в некоторой окрестности точки x множество Σ является объединением одного, двух или трех отрезков с концами в x (с попарными углами не меньше $2\pi/3$, как следует из теоремы 2.2).*

(2) *Если $x \in E_\Sigma$, то множество Σ в окрестности точки x является инъективной кривой, которая либо нестрого выпукла (является графиком (нестрого) выпуклой функции), либо имеет в точке x касательную, причем эта касательная является пределом любой подпоследовательности односторонних касательных к Σ в точках, стремящихся к x (является графиком функции, имеющей в x производную, которая, кроме того, является пределом любой последовательности односторонних производных в точках, сходящихся к x).*

На самом деле, в анонсируемой работе доказывается даже более сильный результат – утверждения для определенного ниже локального минимайзера.

Определение 2.4. *Для заданного компактного множества $M \subset \mathbb{R}^2$ и числа $r > 0$ локальным минимайзером функционала максимального расстояния будем называть такое связное замкнутое множество $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$, что $F_M(\Sigma) \leqslant r$ и существует такое $\varepsilon > 0$, что для произвольного замкнутого связного множества Σ', такого, что $F_M(\Sigma') \leqslant r$ и $\operatorname{diam} \Sigma \triangle \Sigma' < \varepsilon$, выполняется неравенство $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leqslant \mathcal{H}^1(\Sigma')$.*

Теорема 2.5. *Пусть Σ – локальный минимайзер максимального расстояния. Тогда выполняются все утверждения теорем 2.2 и 2.3.*

Следствие 2.6. *Из теоремы 2.2 (соответственно 2.5) следует конечность числа точек ветвления в (соответственно локальном) минимайзере максимального расстояния.*

§3. Полная классификация локального поведения множества Σ. Примеры

Напомним, что Σ является минимайзером функционала максимального расстояния для плоского компакта M. Нас интересует вопрос о поведении множества Σ в окрестности точки $x \in \Sigma$. Из доказательства теоремы 2.2 следует полная классификация вариантов его локального поведения. Мы приведем примеры для каждого из возможных вариантов.

Обычно достаточно сложно доказать, что конкретное множество Σ является минимайзером для конкретного M. На иллюстрации 1 множество M – окружность радиуса $R > r$, а множество Σ – объединение дуги окружности радиуса $R - r$ и двух отрезков касательных к этой окружности. Миранда, Степанов и Паолини [2] предположили, что Σ – минимайзер для M. Доказательство того, что множество Σ является минимайзером при условии $R > 4.98r$, можно найти в работе [1].

Стоит отметить, что если M является конечным множеством точек, то существует простой критерий: связное множество Σ является минимайзером для M и числа $r > 0$, если выполняется неравенство $\mathcal{H}^1(\Sigma) \leqslant \mathcal{H}^1(\mathcal{S}t(M)) - r\sharp M$, где $\sharp M$ – количество элементов множества M, а $\mathcal{S}t(M)$ – связное множество с наименьшей длиной, содержащее все точки M (иначе говоря, произвольное дерево Штейнера для множества M). Несложно также заметить, что строгое неравенство в этом выражении невозможно. Этот критерий показывает, что в примерах на рис. 2, 4, 5 множество Σ – действительно минимайзер.

Из теорем 2.2 и 2.3 следует теорема о классификации локального поведения минимайзера в произвольной точке.

Теорема 3.1. *Пусть Σ – минимайзер максимального расстояния, содержащий хотя бы две точки. Тогда верны следующие утверждения.*

(1) *Если $x \in S_\Sigma$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ является одним из двух множеств:*
   (a) *отрезком (точка S на рис.* 1, 2, 3, 4, 5*);*
   (b) *правильной треногой (точка F на рис.* 4*).*

(2) *Если $x \in X_\Sigma$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ является одним из двух множеств:*
   (a) *отрезком с концом в x (точка D на рис.* 1, 2, 3, 4, 5*);*
   (b) *объединением двух отрезков с концами в x и углом большим (точка E на рис.* 5 *и* 3*) или равным (точка E на рис.* 2*) $2\pi/3$ между ними.*

(3) *Если $x \in E_\Sigma$, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\Sigma \cap B_\varepsilon(x)$ является одним из двух множеств:*
   (a) *инъективной прямой с концами в x и на $\partial B_\varepsilon(x)$, имеющей в этой точке одностороннюю касательную; при этом точка x может*
      (i) *являться предельной точкой множества X_Σ (точка G на рис.* 3*);*
      (ii) *не являться предельной точкой множества X_Σ (точка G на рис.* 6*);*
   (b) *объединением двух отрезков дуг с концами в x и на $\partial B_\varepsilon(x)$, имеющих в этой точке односторонние касательные с углом*

не меньшим $2\pi/3$ между ними (точки H_1 и H_2 на рис. 1 и точка H_2 на рис. 6).

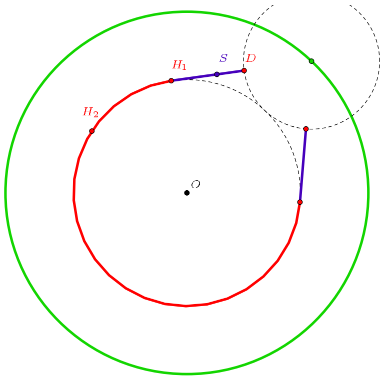

Рис. 1. Пример для $M = \partial B_R(O)$, где $R > 4.98r$.

Приведем пример "плохого" множества M.

Пример 3.2. Пусть M – компактное вполне несвязное множество, дерево Штейнера для которого обладает бесконечным числом точек степени 3. Явный пример такого множества M был построен в работе [4]. В то же время из результатов анонсируемой статьи следует, что для любого положительного r минимайзер будет содержать конечное число точек ветвления.

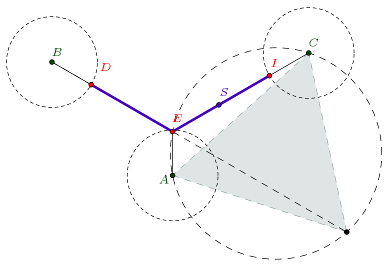

Рис. 2. Пример для $M := \{A, B, C, \}$, $\Sigma = [DE] \cup [EI]$. Точка E принадлежит множеству X_Σ. Угол $\angle DEI$ равен $2\pi/3$.

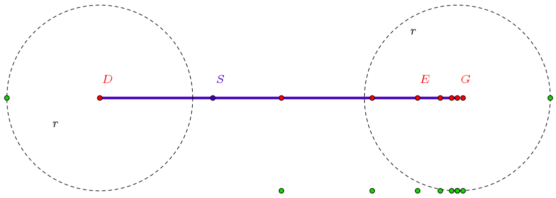

Рис. 3. Пример для M – набора из двух точек на прямой (DG) и счетного множества точек на прямой, параллельной ей; Σ – отрезок $[DG]$. Точка G принадлежит множеству E_Σ и является пределом точек из X_Σ.

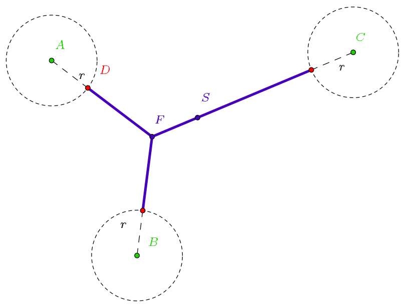

Рис. 4. Пример для $M := \{A, B, C\}$, Σ является треногой.

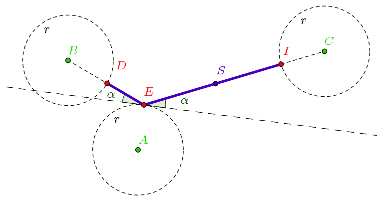

Рис. 5. Пример для $M := \{A, B, C\}$, $\Sigma = [DE] \cup [EI]$. Точка E принадлежит множеству X_Σ. Угол $\angle DEI$ больше $2\pi/3$.

Благодарности. Я благодарна Е. О. Степанову, Д. Черкашину и И. Гордону за помощь в работе.

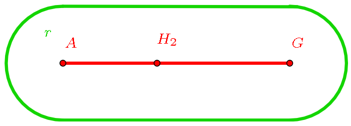

Рис. 6. Пример для $M = \partial B_r([AG])$, $\Sigma = [AG]$. Точка G принадлежит множеству E_Σ и не является пределом точек множества X_Σ.

Литература

1. D. Cherkashin, Ya. Teplitskaya, *On the horseshoe conjecture for maximal distance minimizers.* — ESAIM Control Optim. Calc. Var., to appear.
2. M. Miranda, Jr., E. Paolini, E. Stepanov, *On one-dimensional continua uniformly approximating planar sets.* — Calc. Var. Partial Differential Equations **27**, No. 3, 287–309 (2006).
3. E. Paolini, E. Stepanov, *Qualitative properties of maximum distance minimizers and average distance minimizers in* $\mathbb{R}^n$. — J. Math. Sci. **122**, No. 3, 3290–3309 (2004).
4. E. Paolini, E. Stepanov, Y. Teplitskaya, *An example of an infinite Steiner tree connecting an uncountable set.* — Adv. Calc. Var. **8**, No. 3, 267–290 (2015).

Teplitskaya Y. Regularity of maximum distance minimizers.

We study properties of sets having the minimum length (one-dimensional Hausdorff measure) over the class of closed connected sets $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ satisfying the inequality $\max_{y\in M} \operatorname{dist}(y,\Sigma) \leqslant r$ for a given compact set $M \subset \mathbb{R}^2$ and some given $r > 0$. Such sets play the role of the shortest possible pipelines arriving at a distance at most r to every point of M, where M is the set of customers of the pipeline. In this paper, it is proved that each maximum distance minimizer is a union of a finite number of curves having one-sided tangent lines at each point. This shows that a maximum distance minimizer is isotopic to a finite Steiner tree even for a “bad” compact set M, which distinguishes it from a solution of the Steiner problem (an example of a Steiner tree with an infinite number of branching points can be found in a paper by Paolini, Stepanov, and Teplitskaya). Moreover, the angle between these lines at each point of a maximum distance minimizer is greater than or equal to $2\pi/3$. Also, we classify the behavior of a minimizer in a neighborhood of any point of Σ. In fact, all the results are proved for a more general class of local minimizers.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский государственный университет,
14-я линия В.О., д. 29Б,
С.-Петербург 199178 Россия
E-mail: janejashka@gmail.com

Поступило 26 октября 2017 г.