Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 462, 2017 г.

С. Ю. Славянов, А. А. Салатич

КОНФЛЮЭНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ГОЙНА И КОНФЛЮЭНТНОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Введение

Настоящая статья является продолжением и развитием двух других публикаций одного из авторов. В первой из них предложена векторная формулировка конфлюэнтного уравнения Гойна (в дальнейшем КУГ), выведены интегральные симметрии и осуществлена привязка к уравнениям Пенлеве [1]. Во второй рассматривается деформированное уравнение Гойна с добавленной ложной особой точкой и выбирается нормировочный множитель при энергии [2].

В новой публикации рассматривается связь КУГ с конфлюэнтным гипергеометрическим уравнением (в дальнейшем КГУ), представлены векторные аналоги этих уравнений, получены интегральные симметрии и мотивирован выбор нормировочного множителя при энергии. Для достижения этих результатов пришлось отказаться от принятой нами ранее в книге [3] формы записи КУГ.

Конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение

Воспользуемся следующим представлением КГУ:

$$zw''(z) + (c - z)w'(z) - aw(z) = 0. \tag{1}$$

Здесь фуксова особенность расположена в точке $z_1 = 0$, а $z_2 = \infty$ является иррегулярной особой точкой. Одно из решений уравнения (1), голомофное в нуле, известно как конфлюэнтная гипергеометрическая функция с нормировкой в $z = 0$ согласно $F(a, c; 0) = 1$. Дальнейшие

Ключевые слова: конфлюэнтное гипергеометрическое уравнение, конфлюэнтное уравнение Гойна, деформированное уравнение Гойна, интегральные симметрии, антиквантование, уравнение Пенлеве P^V.

Один из авторов (С. Славянов) благодарен соавторам своих прежних публикаций в этой области за стимулирующие обсуждения.

обобщения уравнения (1) будут изучаться ниже. Пусть введен полиномиальный дифференциальный оператор

$$L(D,z)w(z) = \sum_{k=0}^{2} P_k(z) D^{2-k} w(z) = 0, \tag{2}$$

где $L(D,z)$ – полином от двух переменных: D – оператора дифференцирования и z – оператора умножения на комплексную переменную z. Здесь P_k – полиномы по z. Полином, введенный в (1), обозначим $L^0(D,z)$. Следовательно, $\deg(P_k) \leqslant 2-k$ в (1).

Пусть размерность $+1$ ассоциируется с умножением на z, а размерность -1 ассоциируется с дифференцированием D. Тогда L^0 имеет размерность 0.

Наряду с уравнением (1) можно рассматривать следующую систему линейных уравнений первого порядка:

$$R(z)\vec{Y}'(z) = A\vec{Y}(z). \tag{3}$$

Здесь $R(z)$ и A – матричные полиномы с $\deg(R(z)) = 1$, $\deg(A) = 0$. Выберем

$$R(z) = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a-c & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Положив

$$R^{-1}A = \frac{T}{z}, \quad T = \begin{pmatrix} a-c & a \\ z+c-a & -a \end{pmatrix},$$

мы придем к другой системе:

$$\vec{Y}'(z) = \frac{1}{z} T(z)\vec{Y}(z).$$

Уравнение второго порядка для первой компоненты $y_1(z)$ вектора $\vec{Y}(z)$ есть (1).

Имеются другие системы, отвечающие КГУ. Здесь выбрана система с минимальными степенями полиномов и нулевой размерностью в соответствии с нашим определением.

Система (3) может быть подвергнута интегральному преобразованию Эйлера или интегральному преобразованию Лапласа. Рассмотрим последнее,

$$\vec{Y}(z) = \int_l e^{-z\zeta} \vec{V}(\zeta) d\zeta, \tag{4}$$

с подходящим выбором контура интегрирования l. В результате возникает следующая система для $\vec{V}(\zeta)$ вместо (3):

$$-R(\zeta)\vec{V}'(\zeta) = (A + R')\vec{V}(\zeta). \tag{5}$$

Сравнивая (3) и (5), мы приходим к различным симметриям КГУ. В частности, может быть получено представление конфлюэнтных гипергеометрических функций через элементарные функции.

Просуммируем результаты, полученные выше.

1. КГУ содержит одну фуксову и одну иррегулярную сингулярности и характеризуется двумя параметрами, которые связаны с локальным поведением решений в окрестностях сингулярностей.
2. КГУ эквивалентно линейной системе первого порядка, которая имеет нулевую размерность.

Конфлюэнтное уравнение Гойна

Рассмотрим КУГ с двумя фуксовыми сингулярностями в конечных точках z_j, $z_1 = 0$, $z_2 = t$, и иррегулярной особой точкой на бесконечности. Оно записывается как

$$L^1(D, z)w(z) = (\sigma(z)D^2 + \tau(z)D + (\omega(z) - th))w(z) = 0. \tag{6}$$

Здесь

$$\sigma(z) = z(z - t),$$
$$\tau(z) = -z(z - t) + c(z - t) + dz,$$
$$\omega(z) = -az.$$

Следовательно, полиномы $\sigma(z)$ и $\tau(z)$ имеют вторую степень по z. Как следствие, дифференциальный оператор L^1 в соответствии (2) имеет размерность 1. Отметим, что выбранная запись КУГ отличается от таковой в книге [3].

Параметр h называют акцессорным параметром. Выбранный множитель перед ним, а именно t, приводит к выполнению следующей леммы.

Лемма 1. *Уравнение* (6) *редуцируется при* $t = 0$ *к* КГУ (1).

Положим $t = 0$ в (6). Получим вместо (6)

$$zL^0(D, z) = 0.$$

При выборе другого множителя, не кратного t, акцессорный параметр h сохраняется в предельном уравнении.

Интерес к КУГ растет в последние десятилетия [3, 4]. Во-первых, это более общее уравнение по сравнению с КГУ, а во-вторых, возникает все большее число его физических приложений.

Добавим в КУГ ложную сингулярность. В ложной сингулярности общее решение уравнения не содержит логарифмических членов и является голоморфной функцией для выбранного представления уравнения [5]. Можно рассмотреть ложную сингулярность с произвольным расположением $z = q$, а именно уравнение

$$\begin{aligned}\sigma(z)w''(z) + \left(\tau(z) - \frac{\sigma(z)}{z-q}\right)w'(z) + (\omega(z) - th)w(z) \\ - \left[\sigma(q)\mu^2 + \left(\tau(q) - \frac{\sigma(q)}{z-q}\right)\mu + \omega(q) - th\right]w = 0.\end{aligned} \tag{7}$$

Мы называем (7) деформированным конфлюэнтным уравнением Гойна.

Могут быть выбраны два независимых решения $w_1(z)$ и $w_2(z)$, в точке $z = q$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$w_1(q) = 1, \quad w_1'(q) = \mu, \quad w_1''(q) = 0$$

для одного решения $w_1(z)$ и

$$w_2(q) = 0, \quad w_2'(q) = 0, \quad w_2''(q) = 1$$

для второго решения $w_2(z)$.

Введем два полинома. Первый полином есть

$$H(p, z) = \frac{1}{t}(\sigma(z)p^2 + \tau(z)p + \omega(z)), \tag{8}$$

где p – квантовый оператор дифференцирования $p = d/dz$, а z – оператор умножения. Это операторный полином, и мы называем его квантовым гамильтонианом.

Другой полином $H(\mu, q)$, равный

$$H(\mu, q) = \frac{1}{t}(\sigma(q)\mu^2 + \tau(q)\mu + \omega(q)), \tag{9}$$

мы назовем классическим гамильтонианом от двух классических переменных: μ – импульса и q – координаты. Оба гамильтониана (8) и (9) включают t как параметр, который далее ассоциируется со временем. Важно подчеркнуть, что (8) и (9) – одинаковые функции, но записанные в различных переменных.

В предложенных обозначениях уравнение (7) может быть записано в симметричной форме:

$$\begin{aligned}(H(p,z)-h)w(z)-(H(\mu,q)-h)w(z)\\ +\frac{1}{(z-q)t}(\sigma(q)\mu w(z)-\sigma(z)w'(z))=0.\end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 2. *Вторая строчка в* (10) *пропадает при выборе*

$$z=q,\quad \ln w'(q)=\mu,\quad w''(q)=0.$$

Доказательство основано на рассмотрении разложения Тейлора по степеням $z-q$ в точке $z=q$.

Теперь мы имеем время t как параметр в обоих гамильтонианах. В квантовой механике варьирование времени может соответствовать адиабатичекой деформации квантовой системы. В случае классического гамильтониана мы можем говорить о классическом динамическом движении. Антиквантование уравнения (10) состоит из подстановке p вместо μ и z вместо q. Оно переводит уравнение (10) в тождество при дополнительном условии, что рассматривается решение $w_1(z)$. Ясно, что динамическое движение $\mu(t)$, $q(t)$, определяемое гамильтонианом (9), следует либо согласно гамильтоновой системе уравнений, либо согласно уравнению Эйлера–Лагранжа.

Теорема. *Антиквантование конфлюэнтного уравнения Гойна приводит его к интегрируемому уравнению Пенлеве* P^V.

Доказательство основано на выводе уравнения Эйлера–Лагранжа из гамильтониана (9) и последующего сравнения с P^V.

Вышеприведенные рассмотрения являются улучшенной версией предыдущих статей [6, 7]. Лемма 1 является новой. Лемма 2 основана на исследовании в [5, 8].

Линейная система первого порядка

Традиционное изучение КУГ и деформированного конфлюэнтного уравнения Гойна развивается в терминах системы 2×2 линейных уравнений. Произведем здесь выкладки, аналогичные статье [1], значительно изменив как изложение базовых идей, так и технику вычислений.

Выберем систему уравнений в виде

$$R\vec{Y'} = \begin{pmatrix} z-t & z-t \\ -\rho & z-\rho \end{pmatrix} \vec{Y'} = A\vec{Y} = \begin{pmatrix} \kappa z + e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \vec{Y}. \tag{11}$$

Регулярные особые точки этой системы в конечной плоскости z суть $z_1 = 0$, $z_2 = t$. Присутствие параметра ρ обеспечивает требуемое число параметров в результирующем уравнении второго порядка. Матрица R выбрана из условия, чтобы ее определитель был равен $\sigma(z)$. Система (11) приводится к виду

$$\sigma(z)\vec{Y'} = T\vec{Y}, \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} T(z) &= \begin{pmatrix} z-\rho & -(z-t) \\ \rho & z-t \end{pmatrix} A \\ &= \begin{pmatrix} (\kappa z + e_1)(z-\rho) - e_3(z-t) & (e_2 - e_4)z + te_4 - \rho e_2 \\ (\rho\kappa + e_3)z + \rho e_1 - te_3 & e_4 z + \rho e_2 - te_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матричный элемент T_{12} обращается в нуль в точке $z = q$, где

$$q = \frac{e_2\rho - e_4 t}{e_2 - e_4}. \tag{13}$$

Эта точка будет ложной особой точкой результирующего уравнения. Если нормировать решение y_1 в точке q условием $y_1(q) = 1$, то производная $y_1'(q) = \mu$ в этой точке вычисляется как

$$q(q-t)\mu = T_{11}(q). \tag{14}$$

Положим также $\kappa = 1$.

Разрешая систему (12) относительно $y_1(z)$, придем к уравнению второго порядка

$$\sigma(z)y_1''(z) + \left(\tau(z) - \frac{\sigma(z)}{z-q}\right) y'(z) + (\omega(z) - th)y_1(z) = 0, \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned}
\tau(z) &= \sigma'(z) - \sigma(z)\,(\ln T_{12})' - \operatorname{tr} T \\
&= -z^2 + tz - (e_1 - e_3 + e_4 - \rho + t + 2)z \\
&\qquad + \rho(e_1 - e_2) + t(e_4 - e_3 - 1), \\
\omega(z) - th &= T_{11}' - \frac{T_{11}}{z-q} + \det A \\
&= -(z-q) + T_{11}'(z) - T_{11}'(q) + \frac{T_{11}(q)}{z-q} + \det A \\
&= (z-q) + \frac{q(q-t)\mu}{z-q} + e_4 z + (e_1 e_4 - e_2 e_3).
\end{aligned}$$

Видно, что построенное уравнение (15) совпадает с деформированным КУГ (7) при установлении правильной связи между параметрами. В уравнении (7) параметрами являются, например, a, c, d, μ, q, а в уравнении (15) параметрами являются e_1, e_2, e_3, e_4, ρ.

Имеем

$$\begin{gathered}
d = -e_1 + \rho - t + 1 + (e_1 - e_2)\frac{\rho}{t}, \\
c = e_3 - e_4 + 1 + (e_2 - e_1)\frac{\rho}{t}, \\
a = -1 - e_4, \\
\mu = \frac{T_{11}(q)}{q(q-t)}, \\
h = \frac{q}{t} - \frac{e_1 e_4 - e_2 e_3}{t}.
\end{gathered}$$

Пять параметров системы (11) также могут быть получены в терминах параметров деформированного уравнения Гойна. Следует отметить особую роль параметра ρ, который задает "полиномиальное вращение" в векторном пространстве для $\vec{Y}$.

Аналогично находится и уравнение второго порядка для компоненты $y_2(z)$. Оно также является деформированным уравнением Гойна.

Системы уравнений первого порядка удобно использовать для вывода различных интегральных соотношений. Конкретные формулы и соответствующие симметрии обсуждаются в [1]. Таким образом, многие базовые свойства конфлюэнтных гипергеометрических уравнений переносятся и на конфлюэнтное уравнение Гойна.

Уравнение Пенлеве

Уравнение Пенлеве – это нелинейное интегрируемое уравнение, широко изучаемое и применяемое в последние десятилетия. Недавние исследования в этой области можно найти, например, в сборнике статей [9]. Наши интересы лежат во взаимно однозначном соответствии между уравнениями Гойна и уравнениями Пенлеве [3, 7].

Предложенный в данной статье подход служит оправданием эвристического антиквантования уравнения Гойна, предложенного в предыдущих статьях, начиная с публикации [10] в J. Phys. A.: Math. Gen.

Мы вкратце повторим вывод уравнения P^V. Преобразование гамильтониана в лагранжиан состоит в переходе от переменной μ к переменной $\dot{q}$ и переходе от гамильтониана $H(\mu, q)$ к лагранжиану $\mathcal{L}(\dot{q}, q)$ согласно формулам

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{2\sigma(q)\mu + \tau(q)}{t},$$

$$\mathcal{L}(\dot{q}, q) = \dot{q}\mu - H(\mu, q) = \frac{((t)^{1/2}\dot{q} - (t)^{-1/2}\tau(q))^2}{4\sigma(q)} - \frac{\omega(q)}{t}. \qquad (16)$$

Соответствующее (16) уравнение Эйлера–Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

в изучаемом случае будет иметь вид

$$\begin{aligned} &\ddot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial \ln \sigma(q)}{\partial q}\dot{q}^2 + \frac{\partial(\ln t/\sigma(q))}{\partial t}\dot{q} \\ &\quad - \frac{\sigma(q)}{t^2}\left[\frac{\partial}{\partial q}\frac{\tau(q)^2}{2\sigma(q)} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\tau(q)}{\sigma(q)} - 2\frac{\partial(\omega(q))}{\partial q}\right] = 0. \end{aligned} \qquad (17)$$

Прямые вычисления ведут от (17) к нелинейному уравнению, которое оказывается уравнением Пенлеве P^V:

$$\begin{aligned} &\ddot{q} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-t}\right)\dot{q}^2 + \frac{\dot{q}q}{t(q-t)} \\ &\quad + \frac{q(q-t)}{2t^2}\left[\frac{-c^2 t}{q^2} + \frac{d^2 t}{(q-t)^2} - 2q + t + 2(c+d) - 4a\right]. \end{aligned} \qquad (18)$$

Выведенное уравнение не вполне похоже на традиционную запись P^V. Тем не менее, оно тоже является уравнением P^V, как мы увидим ниже. Чтобы получить это и тем самым разрешить расхождение, проведем обратное преобразование к переменной $q \to qt$, то есть вернемся к традиционной записи КУГ. Получим

$$\begin{aligned}
&\ddot{q} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q-1}\right)\dot{q}^2 + \frac{\dot{q}}{t} - \frac{1}{2t^2}\left[(c^2+1)\frac{q}{q-1} - d^2\frac{q-1}{q}\right] \\
&\quad - \frac{1}{2}q(q-1)(2q-1) + \frac{q(q-1)}{t}((c+d)-2a) = 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Выведенное уравнение является подмножеством уравнения Пенлеве P^V. Обсуждение можно найти в [3].

Сравнение с КУГ (6) порождает многие размышления. Если мы вспомним, что c, d, a – локальные характеристики решений КУГ в точках z_j, мы немедленно получим, что c, d, a являются локальными характеристиками уравнения Пенлеве P^V. КУГ может быть подвергнуто дробно-линейному преобразованию независимой переменной и s-гомотопному преобразованию (ср. [3]) зависимой переменной. В обоих случаях свойство интегрируемости сохраняется.

Ключевая роль дополнительных ложных особенностей делает теорию уравнений Гойна отличной от теории гипергеометрического уравнения. Технические средства остаются частично теми же, но идеология является значительно более продвинутой.

Что происходит далее при введении новых сингулярностей в фуксово уравнение? Одна добавленная сингулярность позволяет появление второго акцессорного параметра и одной дополнительной ложной сингулярности при дифференцировании [5]. Нельзя говорить о двух гамильтонианах, и в результате свойство интегрируемости становится неверным. Открытой является ситуация с линейными дифференциальными операторами высшего порядка, если они могут быть факторизованы.

Литература

1. А. Казаков, С. Славянов, *Интегральные симметрии Эйлера для конфлюэнтного уравнения Гойна и симметрии уравнения Пенлеве P^V.* — Теор. мат. физ. **179** (2014), 189–195.
2. С. Славянов, *Симметрии и ложные сингулярности для простейших фуксовых уравнений.* — Теор. мат. физ., в печати (2017).
3. С. Славянов, В. Лай, *Специальные функции: единая теория, основанная на анализе сингулярностей,* Невский диалект, СПб (2002).
4. A. Ronveaux (ed.), *Heun's Differential Equation,* Oxford Univ. Press, Oxford–New York–Tokyo, 1995.

5. С. Славянов, Д. Шатько, А. Ишканян, Т. Ротинян, *Генерация и удаление ложных особенностей в линейных ОДУ с полиномиальным коэффициентом.* — Теор. мат. физ. **189** (2016), 1726–1733.
6. С. Славянов, *Антиквантование и соответствующие симметрии.* — Теор. мат. физ. **182** (2015), 182–188.
7. С. Ю. Славянов, О. Л. Стесик, *Антиквантование деформированных уравнений класса Гойна.* — Теор. мат. физ. **186**, вып. 1 (2016), 142–151.
8. A. Ishkhanyan, K. Suominen, *New solutions of Heun's general equation.* — J. Phys. A **36** (2003), L81–L86.
9. A. D. Bruno, A. B. Batkin (eds.), *Painlevé Equations and Related Topics*, De Gruyter (2012).
10. S. Yu. Slavyanov, *Painlevé equations as classical analogues of Heun equation.* — J. Phys. A **29** (1996), 7329–7335.

Slavyanov S. Yu., Salatich A. A. Confluent Heun equation and confluent hypergeometric equation.

The confluent Heun equation and confluent hypergeometric equation are studied in scalar and vector forms with particular emphasis to the role of apparent singularities. The relation to the Painlevé equation is shown.

С.-Петербургский государственный университет, С.-Петербург, Россия
E-mail: slav@ss2034.spb.edu

Поступило 4 сентября 2017 г.