Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 462, 2017 г.

А. М. Вершик, А. В. Малютин

БЕСКОНЕЧНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ В ДИСКРЕТНОЙ ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

§1. Введение

В работах [1–4,7] развивается теория абсолюта графов, групп и полугрупп. В некоторых случаях для вычисления абсолюта группы требуется описать множество геодезических лучей в графе Кэли группы (относительно заданной системы образующих). В настоящей заметке задача описания геодезических лучей решается для случая дискретной группы Гейзенберга со стандартной системой образующих

$$N_2 = \langle x, y \mid [[x, y], x] = [[x, y], y] = 1\rangle. \tag{1}$$

Полученная классификация геодезических используется при вычислении абсолюта дискретной группы Гейзенберга, которое будет приведено в отдельной готовящейся работе.

Терминология. Работа базируется на стандартной терминологии комбинаторной теории групп (см., например, [5]). Так, рассматривая конечные и бесконечные последовательности элементов некоторого множества, мы называем это множество *алфавитом*, его элементы – *символами* или *буквами*, а последовательности – *словами* над этим алфавитом. Множество всех конечных слов над произвольным алфавитом формирует свободную полугруппу с операцией конкатенации.

Для копредставлений групп рассматриваются алфавиты, состоящие из пар связанных букв вида $\{a, a^{-1}\}$; такие буквы называются *взаимно обратными*. *Словом без взаимно обратных букв* называется слово, никакие две буквы которого не являются взаимно обратными (учитываются не только стоящие рядом буквы). Слова записываются без запятых, блок из n последовательных букв a обозначается через a^n, блок

Ключевые слова: дискретная группа Гейзенберга, нормальная форма, абсолют, граница-выход, геодезическая.

Работа поддержана грантом РНФ 17-71-20153.

из n последовательных букв a^{-1} – через a^{-n}. Запись $(a^{-1})^{-1}$ интерпретируется как буква a, а запись a^0 – как пустое (под)слово. *Обратным* к слову $w_1 \dots w_n$ называется слово $w_n^{-1} \dots w_1^{-1}$. Запись $a^{+\infty}$ (соответственно $a^{-\infty}$) отвечает бесконечному вправо слову, каждая буква которого есть буква a (соответственно a^{-1}). Запись ${}_{\infty+}a$ (соответственно ${}_{\infty-}a$) обозначает бесконечное влево слово над алфавитом $\{a\}$ (соответственно $\{a^{-1}\}$).

При задании группы копредставлением (через образующие и соотношения) вида

$$G = \langle S_+ \mid R \rangle$$

мы рассматриваем алфавит $S = S_+ \cup S_-$ из образующих и обратных к ним. Группа строится по копредставлению как множество классов эквивалентных конечных слов над алфавитом S с операцией, индуцированной конкатенацией слов, где два слова эквивалентны, если от одного к другому можно перейти последовательными вставками и вычеркиваниями слов из R и двухбуквенных слов вида aa^{-1}. Подробности см. в [5].

Введем дополнительный термин, не являющийся, в отличие от приведенных выше, стандартным для комбинаторной теории групп. Будем говорить, что два слова связаны *рокировкой*, если одно из них получается из другого перестановкой каких-то двух соседних букв (мы не требуем, чтобы слова, связанные рокировкой, представляли один и тот же элемент группы).

Определение. Геодезические слова. *Если дано копредставление группы с множеством образующих S_+, то конечное слово над алфавитом $S = S_+ \cup S_-$ образующих и обратных к ним называется* геодезическим (*для заданного копредставления*), *если отвечающий ему элемент группы не представлен более короткими словами. Бесконечное слово называется* геодезическим, *если все его конечные части являются геодезическими.*

Геодезические слова маркируют геодезические пути в графе Кэли.

Главным результатом настоящей работы является следующая теорема.

1.1. Теорема. *В дискретной группе Гейзенберга*

$$N_2 = \langle x, y \mid [[x,y],x] = [[x,y],y] = 1 \rangle$$

множество всех бесконечных вправо геодезических слов над алфавитом $S := \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ *является объединением следующих двух классов.*

Класс $\mathscr{A}$: *слова без взаимно обратных букв.*

Класс $\mathscr{B}$: *слова вида* $Vab^m a^{-1} b^{+\infty}$ *и слова вида* $a^n b^{-1} a^m b V b^{+\infty}$, *где* $\{a, b\}$*– пара не взаимно обратных элементов из* S, n *– неотрицательное целое число,* m *– натуральное число, а* V *– слово над алфавитом* $\{a, b\}$, *приводимое к виду* $a^i b^j$ *за менее чем* m *рокировок.*

Поскольку каждое бесконечное вправо подслово в бесконечном в обе стороны геодезическом слове является геодезическим, из теоремы 1.1 естественным образом вытекает описание бесконечных в обе стороны геодезических слов для N_2.

1.2. Следствие. *В дискретной группе Гейзенберга* (1) *множество всех бесконечных в обе стороны геодезических слов над алфавитом* $S = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ *является объединением следующих двух классов.*

A) *Бесконечные в обе стороны слова без взаимно обратных букв.*

B) *Класс, сформированный словами следующих видов*:

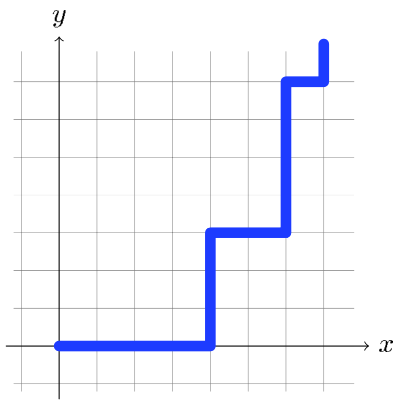
$$_{\infty+}aVab^m a^{-1} b^{+\infty}, \qquad _{\infty+}bab^m a^{-1} b^{+\infty}, \qquad _{\infty+}ab^{-1} a^m b V b^{+\infty},$$

где $\{a, b\}$ *– пара не взаимно обратных элементов из* S, m *– натуральное число, а* V *– слово над алфавитом* $\{a, b\}$, *приводимое к виду* $a^i b^j$ *за менее чем* m *последовательных рокировок.*

Замечания. 1. У дискретной группы Гейзенберга имеется удобная геометрическая интерпретация через пути на плоскости (см., например, [6]). Эта интерпретация возникает из абелизации

$$N_2 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} = \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle. \tag{2}$$

Гомоморфизм абелизации (2) (как всякий гомоморфизм с наследуемой системой образующих) дает проекцию графа Кэли дискретной группы Гейзенберга (относительно образующих x и y) на граф Кэли группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Вложив граф Кэли группы $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, являющийся двумерной целочисленной решеткой, в плоскость, мы получаем проекцию группы Гейзенберга и ее графа Кэли на плоскость. Любому слову в алфавите образующих (и обратных к ним) отвечает путь в графе Кэли с началом в единице группы. В рамках рассматриваемой конструкции слова над алфавитом $S = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ получают представление выходящими из начала координат путями на целочисленной решетке на плоскости. Два таких конечных пути представляют один и тот же элемент группы Гейзенберга, если их концы совпадают, а ориентированная площадь образованного этими путями замкнутого контура равна нулю. В качестве иллюстрации на рисунках 1 и 2 изображены начальные участки бесконечных путей в $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, отвечающих типичным геодезическим классов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$.

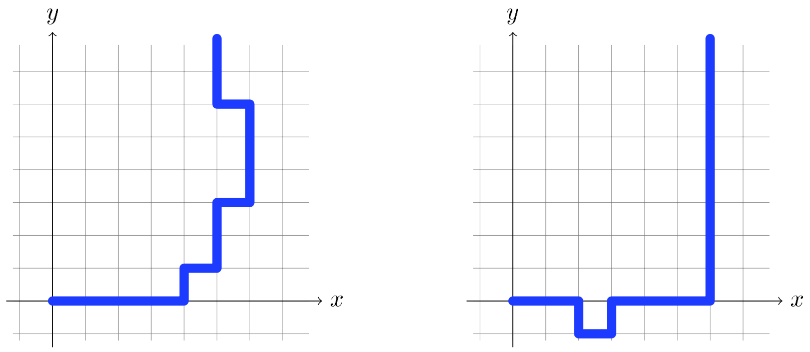


$x^4y^3x^2y^4xy\dots$

Рис. 1. Начальный участок проекции типичной геодезической класса $\mathscr{A}$.

В доказательствах мы пользуемся формальными алгебраическими аргументами, однако для наглядной интуитивной интерпретации производимых построений удобно иметь в виду описанное представление путями на плоскости. Особую роль здесь играет понятие площади. Ниже мы еще раз обратимся к этому подробнее. Здесь же лишь отметим в дополнение, что в терминах площади и путей на плоскости фигурирующее в формулировке теоремы 1.1 минимальное количество рокировок, требующееся для приведения слова V над алфавитом $\{a,b\}$ к виду a^ib^j, есть площадь области, ограниченной путями в $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, соответствующими словам V и a^ib^j.

2. Очевидно, при факторизации группы с наследованием системы образующих множество геодезических слов фактор-группы содержится в множестве геодезических слов исходной группы. Класс $\mathscr{A}$ из теоремы 1.1 есть класс бесконечных вправо геодезических слов в группе $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, возникающей при абелизации (2).



$x^4yxy^2xy^3x^{-1}y^{+\infty}$ $\qquad$ $x^2y^{-1}xyx^3y^{+\infty}$

Рис. 2. Начальные участки проекций типичных геодезических класса $\mathscr{B}$.

3. В дискретной группе Гейзенберга задача описания множества всех конечных геодезических сложнее, чем задача описания бесконечных геодезических. В частности, имеются конечные геодезические, не входящие ни в какие бесконечные. Например, при любом m слово $x^m y^m x^{-m} y^{-m}$ является геодезическим, но не может быть продолжено не только до бесконечного геодезического слова, но и до геодезического слова на единицу большей длины.

§2. Предварительные конструкции

У группы Гейзенберга (1) имеется классическое точное представление целочисленными матрицами вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{x} & \mathrm{z} \\ 0 & 1 & \mathrm{y} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

в котором элементы x^m, y^n и $[x,y]^k$ представлены соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из свойств этого представления выводится следующая лемма.

2.1. Лемма о нормальной форме. *Для элемента $g \in N_2$ существует единственная тройка целых чисел*

$$(M_x(g), M_y(g), M_z(g)),$$

такая, что

$$g = [x, y]^{M_z(g)} y^{M_y(g)} x^{M_x(g)}.$$

Доказательство. Существование сразу следует из определения (1). Единственность чисел $M_x(g)$ и $M_y(g)$ доказывается обращением к абелизации (2). Отсюда единственность числа $M_z(g)$ следует в силу того, что коммутатор $[x, y]$ является элементом бесконечного порядка (последнее вытекает, к примеру, из вышеупомянутого свойства представления (3)). □

Обозначение. *Для слова W над алфавитом $S = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$ положим*

$$M_x(W) := M_x(g), \quad M_y(W) := M_y(g), \quad M_z(W) := M_z(g),$$

где g – элемент группы Гейзенберга (1), представленный словом W. На величину $M_z(W)$ будем ссылаться как на площадь. *В представлении (3) величине $M_z(W)$ отвечает угловой матричный элемент, а при представлении путями на двумерной целочисленной решетке эта величина совпадает с площадью области, ограничиваемой соответствующим слову W путем и путем, отвечающим слову $y^{M_y(g)} x^{M_x(g)}$.*

Определение. *В языке S^* всех конечных слов над алфавитом*

$$S = \{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$$

следующие инволюции будем называть геометрическими:

1) *семь нетривиальных инволюций, индуцированных теми перестановками на множестве S, которые переводят пары взаимно обратных символов в пары взаимно обратных;*

2) *инволюция, переводящая каждое слово в обратное к нему, а также инволюция, переставляющая буквы каждого слова в обратном порядке.*

2.2. Лемма. *Над алфавитом системы образующих S дискретной группы Гейзенберга N_2 геометрические инволюции переводят геодезические слова в геодезические.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидным образом следует из того, что геометрические инволюции задают полугрупповые автоморфизмы или антиавтоморфизмы на полугруппе слов с операцией конкатенации, а множество слов, представляющих тривиальный элемент группы, под действием геометрических инволюций инвариантно. На уровне путей на целочисленной решетке геометрическим инволюциям отвечают отражения (изометрии) решетки. □

§3. Доказательство основной теоремы

Сперва докажем, что слова описанных в теореме 1.1 классов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются геодезическими, затем проверим, что любое бесконечное вправо геодезическое слово относится к одному из этих классов.

Доказательство геодезичности слов класса $\mathscr{A}$. Слова класса $\mathscr{A}$ являются геодезическими, поскольку при гомоморфизме абелизации (2) они переходят в геодезические. □

Для доказательства геодезичности слов класса $\mathscr{B}$ нам потребуются вспомогательные утверждения.

3.1. Утверждение. *Для дискретной группы Гейзенберга N_2 с системой образующих S имеют место следующие свойства.*

1) *Всякое слово W, полученное из слова $x^iy^jxy^mx^{-1}y^n$, где i, j, m и n – неотрицательные целые числа, за менее чем m последовательных рокировок, является геодезическим.*

2) *Слово, полученное из слова вида $x^iy^jxy^mx^{-1}$ последовательным применением r рокировок $xy \to yx$, является геодезическим тогда и только тогда, когда $r < m$.*

Доказательство. 1) Обращение к абелизации показывает, что во всяком слове V, представляющем тот же элемент $g \in N_2$, что и слово W, имеется по меньшей мере i вхождений буквы x и $j + m + n$ вхождений буквы y (так что длина слова V составляет по меньшей мере $i + j + m + n$). Ни одно из слов длины $i + j + m + n$, составленных из i экземпляров буквы x и $j + m + n$ экземпляров буквы y, не является представителем элемента g, поскольку число M_z у элементов, представленных словами из описанного множества, варьируется от 0 до $i(j + m + n)$, а

$$M_z(g) > M_z(x^iy^jxy^mx^{-1}y^n) - m = i(j+m+n) + m - m = i(j+m+n).$$

Ни одно из слов длины $i+j+m+n+1$ также не является представителем элемента g, поскольку в нашем случае длины слов, представляющих один и тот же элемент, имеют одинаковую четность. Таким образом, слово W (длины $i+j+m+n+2$) является кратчайшим.

2) Заметим, что все слова, получаемые из слова $x^iy^jxy^mx^{-1}$ последовательным применением r рокировок $xy \to yx$, имеют одинаковую длину и представляют один и тот же элемент группы, поскольку имеют одинаковые характеристики M_x, M_y и M_z. Следовательно, геодезическими являются либо все слова из указанного множества, либо ни одно из них. При $r \geqslant m$ последовательное применение r рокировок $xy \to yx$ к слову $x^iy^jxy^mx^{-1}$ можно распределить таким образом, чтобы получить негеодезическое сократимое слово с xx^{-1} на конце. При $r < m$ геодезичность следует из первой части утверждения. □

Доказательство геодезичности слов класса $\mathscr{B}$. Вытекает из утверждения 3.1 и леммы 2.2, поскольку все конечные начальные подслова слов класса $\mathscr{B}$ получаются геометрическими инволюциями из класса геодезических слов утверждения 3.1. □

Перейдем ко второй части доказательства теоремы 1.1 – покажем, что любое бесконечное вправо слово относится к одному из классов $\mathscr{A}$ или $\mathscr{B}$. В этой части доказательства ключевую роль играют следующие объекты.

Определение. Развороты и повороты. *В слове над алфавитом*

$$\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$$

подслова каждого из четырех видов

$$xy^mx^{-1}, \quad yx^{-m}y^{-1}, \quad x^{-1}y^{-m}x, \quad y^{-1}x^my,$$

где m – натуральное число, будем называть левыми разворотами. Правыми разворотами *будем называть подслова каждого из следующих четырех видов:*

$$xy^{-m}x^{-1}, \quad y^{-1}x^{-m}y, \quad x^{-1}y^mx, \quad yx^my^{-1}.$$

Кроме того, слова xy, yx^{-1}, $x^{-1}y^{-1}$ и $y^{-1}x$ будем называть левыми поворотами, *а слова xy^{-1}, $y^{-1}x^{-1}$, $x^{-1}y$ и yx* – правыми поворотами.

Отметим, что слова класса $\mathscr{A}$ не содержат разворотов и характеризуются этим свойством (в классе бесконечных вправо несократимых слов над алфавитом $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$). Каждое из слов класса $\mathscr{B}$ содержит ровно один разворот.

Определение. *Пусть слово W содержит разворот $ab^m a^{-1}$. Переход от слова W к слову W', получающемуся из W заменой разворота $ab^m a^{-1}$ на слово b^m, будем называть* устранением разворота, *а обратный переход* – созданием разворота.

Как легко убедиться, если конечные слова W и W' связаны заменой $ab^m a^{-1} \to b^m$, т. е. устранением разворота длины $m+2$, то $M_x(W) = M_x(W')$ и $M_y(W) = M_y(W')$, а $M_z(W)$ и $M_z(W')$ отличаются на m.

3.2. Лемма. *Для дискретной группы Гейзенберга N_2 с системой образующих S имеют место следующие свойства.*

1) *Ни одно из геодезических слов, содержащих левые развороты, не содержит правых разворотов.*

2) *Ни одно из геодезических слов, содержащих (по меньшей мере) m правых поворотов, не содержит левого разворота длины m.*

3) *Ни одно геодезическое слово не содержит пяти разворотов.*

Доказательство. 1) Если в некотором слове W имеются правый и левый развороты, в них можно выбрать непересекающиеся правый и левый повороты. Произведя в этих двух поворотах рокировки, мы получим слово W' той же длины и представляющее тот же элемент группы, что и W. Если хотя бы один из двух рассматриваемых разворотов имел длину 3, то W' сократимо, так что W не является геодезическим. Если оба рассматриваемых разворота имели длину больше 3, то после рокировок они дают развороты меньшей длины, и индуктивный переход завершает доказательство.

2) Пусть слово W содержит левый разворот длины m и не менее m правых поворотов. Устранение в W левого разворота длины m укорачивает слово на две буквы, уменьшает площадь M_z на $m-2$ и устраняет не более двух правых поворотов. Таким образом, оставшихся правых поворотов достаточно для того, чтобы провести в них $m-2$ рокировок и, увеличив площадь M_z на $m-2$, получить слово, которое короче слова W, но представляет тот же элемент группы.

3) Желая прийти к противоречию, допустим существование геодезического слова, содержащего пять разворотов. Пусть W – наиболее короткое из таких слов. Тогда W начинается разворотом. Применив, если требуется, подходящую геометрическую инволюцию, мы можем

считать, что начальный разворот левый. Если бы при этом в W имелись правые повороты, то, как нетрудно проверить, сделав две рокировки – в одном из правых поворотов и с первыми двумя буквами слова (они образуют левый поворот), – а затем удалив первую букву слова, мы получили бы либо сократимое слово, либо геодезическое слово, по-прежнему содержащее пять разворотов, но более короткое, чем исходное. Следовательно, в W нет правых поворотов, откуда вытекает, что геометрическими инволюциями его можно привести к виду

$$W' := xy^{m_1}x^{-m_2}y^{-m_3}x^{m_4}y^{m_5}x^{-1},$$

где m_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, – натуральные числа и $m_2 \leqslant m_4$. Переставляя участки y^{m_1} и $x^{-m_2}y^{-m_3}x^{m_2}$, получаем, что слово

$$W'' := x(x^{-m_2}y^{-m_3}x^{m_2})(y^{m_1})x^{m_4-m_2}y^{m_5}x^{-1}$$

представляет тот же элемент и имеет ту же длину, что и W'. Следовательно, поскольку слово W'' сократимо (на участке xx^{-m_2}), ни это слово, ни W', ни W не являются геодезическими. □

3.3. Лемма. *Для дискретной группы Гейзенберга N_2 с системой образующих S имеют место следующие свойства.*

1) *Каждое бесконечное вправо геодезическое слово, содержащее хотя бы один разворот, оканчивается бесконечным повторением одной и той же буквы.*

2) *Каждое бесконечное вправо геодезическое слово W, содержащее разворот, при устранении разворота дает слово без разворотов.*

Доказательство. 1) Поскольку ни одно геодезическое слово не содержит пяти разворотов (лемма 3.2), бесконечное геодезическое слово W, не оканчивающееся бесконечным повторением одной и той же буквы, должно содержать бесконечно много как левых, так и правых поворотов. Однако слово, содержащее разворот и бесконечно много поворотов другого знака, не является геодезическим в силу лемм 3.2 и 2.2.

2) Допустим, что при устранении разворота слово W дает слово, также содержащее разворот. В силу первого утверждения леммы слово W оканчивается бесконечным повторением некоторой буквы, т. е. имеет вид $Vs^{+\infty}$. Выберем достаточно большое целое m – скажем, в три раза превышающее длину слова V – и рассмотрим начальное подслово $U := Vs^m$ слова $W = Vs^{+\infty}$. Тогда устраняемый разворот содержится в слове U, а при устранении этого разворота слово U дает

слово U', также содержащее разворот. Устраняя (какой-нибудь, если их несколько) разворот в U', мы получаем слово U'', которое на четыре буквы короче, чем U. При этом устранение разворота может затрагивать максимум одну букву в конечном подслове вида s^ℓ, так что U'' гарантированно оканчивается на s^{m-2}. Поскольку m достаточно велико, у нас имеется возможность создать разворот в слове U'' таким образом, чтобы для получающегося слова U''' выполнялось условие $M_z(U''') = M_z(U)$. Таким образом, слово U''' представляет тот же элемент группы, что и U. Поскольку U''' на две буквы короче, чем U, это входит в противоречие с предполагаемой геодезичностью слов U и W. □

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 1.1.

3.4. Предложение. *Над алфавитом системы образующих S дискретной группы Гейзенберга N_2 каждое бесконечное вправо геодезическое слово W лежит в одном из классов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ из теоремы* 1.1.

Доказательство. Если слово W не содержит разворотов, то оно, как легко видеть, лежит в классе $\mathscr{A}$. Если W содержит разворот, то в силу первого утверждения леммы 3.3 оно оканчивается бесконечным повторением одной и той же буквы, а в силу второго утверждения леммы 3.3 слово W получается из слова W' класса $\mathscr{A}$ созданием разворота. Значит, слово W' имеет вид

$$a^{m_0} b^{n_1} a^{m_1} \dots b^{n_\ell} a^{m_\ell} b^{+\infty},$$

где $\{a, b\}$ – пара не взаимно обратных элементов из S, для некоторых неотрицательных целых чисел ℓ и m_0 и натуральных чисел $n_1, m_1, \dots$. Ясно, что создание разворота на базе подслова u^i, входящего в подслово вида vu^iv (где $\{u, v\} = \{a, b\}$), дает либо и правый, и левый развороты (так что результат не является геодезическим по лемме 3.2), либо сократимую пару букв. Следовательно, создание разворота, переводящее W' в W, проходит на первом или последнем “прямом” участке слова W', т. е. либо на завершающем участке $b^{+\infty}$, либо на участке a^{m_0} (при этом $m_0 > 0$), либо на участке b^{n_1} (при этом $\ell > 0$ и $m_0 = 0$). Отсюда видно, что W имеет вид $Vab^m a^{-1} b^{+\infty}$ или $a^n b^{-1} a^m b V b^{+\infty}$, где n – неотрицательное целое число, m – натуральное число, а V – слово над алфавитом $\{a, b\}$ (ср. с описанием класса $\mathscr{B}$). Если бы при этом слово V не приводилось к виду $a^i b^j$ за менее чем m последовательных рокировок, то оно не было бы геодезическим в силу утверждения 3.1 (и леммы 2.2 об инволюциях). □

§4. Дополнительные замечания

Как уже отмечалось во введении, в дискретной группе Гейзенберга задача описания множества всех конечных геодезических сложнее, чем (решенная выше) задача описания бесконечных геодезических. Из леммы 3.2 вытекает, что (над алфавитом системы образующих S дискретной группы Гейзенберга N_2) каждое конечное геодезическое слово является подсловом в слове вида

$$a^{m_1}W_{b,a}b^{m_2}W_{a^{-1},b}a^{-m_3}W_{b^{-1},a^{-1}}b^{-m_4}W_{a,b^{-1}}a^{m_5},$$

где $\{a,b\}$ – пара не взаимно обратных элементов из набора

$$\{x,y,x^{-1},y^{-1}\},$$

m_i, $i=1,2,3,4,5,$ – натуральные числа, а $W_{p,q}$ – либо пустое слово, либо слово над алфавитом $\{p,q\}$, начинающееся на p и оканчивающееся на q.

Чуть более тщательный анализ показывает, что у всякого геодезического пути в графе Кэли группы N_2 проекция на плоскость xy есть простая кривая, являющаяся частью границы некоторой области, гомеоморфной диску и слабо геодезически выпуклой[1] в прямоугольной метрике (эту метрику называют также L1 метрикой, "манхэттенской метрикой" и т. п.). Доказать это можно по индукции.

Для полноты сформированного списка свойств бесконечных геодезических приведем также следующее свойство.

4.1. Следствие. *Над алфавитом системы образующих S дискретной группы Гейзенберга N_2 ни одно бесконечное геодезическое слово не содержит двух разворотов.*

Доказательство. Вытекает из предложения 3.4. □

Литература

1. А. М. Вершик, *Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов.* — Функц. анализ и его прил. **48**, вып. 4 (2014), 26–46.
2. А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **432** (2015), 83–104.

[1] В том смысле, что любые две точки области соединены некоторой геодезической, целиком содержащейся в этой области.

3. А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Фазовый переход в задаче о границе-выход для случайных блужданий на группах.* — Функц. анализ и его прил. **49**, вып. 2 (2015), 7–20.
4. А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Абсолют конечно порожденных групп. I. Коммутативные (полу)группы*, препринт (2017).
5. В. Магнус, А. Каррас, Д. Солитэр, *Комбинаторная теория групп.* М., Наука, 1974.
6. M. Shapiro, *A geometric approach to the almost convexity and growth of some nilpotent groups.* — Math. Ann. **285** (1989), 601–624.
7. A. M. Vershik, *Intrinsic metric on graded graphs, standardness, and invariant measures.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **421** (2014), 58–67.

Vershik A. M., Malyutin A. V. Infinite geodesics in the discrete Heisenberg group.

We give an exhaustive description of the family of infinite geodesics in the discrete Heisenberg group (with respect to the standard generating set). The classification of infinite geodesics is needed to describe the so-called absolute (exit boundary) of a group. The absolute of the discrete Heisenberg group will be described in a forthcoming paper.

Поступило 23 ноября 2017 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия
E-mail: avershik@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия
E-mail: malyutin@pdmi.ras.ru