Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 462, 2017 г.

А. М. Вершик, М. И. Граев

НЕУНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП $U(p,q)$-ТОКОВ ПРИ $q \geqslant p > 1$

Марк Иосифович Граев скончался в Москве 22 апреля 2017 г. (род. 22 ноября 1922 г.). Он принадлежал к неширокому кругу лучших математиков страны, творчество которых пришлось на вторую половину XX века. Начало его математической биографии с середины 1940-х гг. связано с московской алгебраической школой А. Г. Куроша, который поручил М. И. продолжить исследования по теории свободных непрерывных групп, начатые А. А. Марковым в 1930-е гг. Этой теории посвящена кандидатская диссертация М. И. и первые его статьи, ставшие широко известными в алгебраической литературе и заслужившие первую премию Московского математического общества (1948 г.). С конца 1940-х гг. М. И. посещает семинар И. М. Гельфанда и постепенно становится постоянным и главным соавтором И. М. по классической теории представлений. В их работах (а также в предшествующих работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка) содержится огромный корпус разнообразных результатов по одной из главных математических теорий XX века. Совместно И. М. и М. И. было написано около сотни статей и три книги, включая два выпуска серии "Обобщенные функции". Кроме того, М. И. написал еще две книги по интегральной геометрии и гипергеометрическим функциям. В последние 10 лет мы с М. И. работали вместе, продолжая наш цикл работ с И. М. Гельфандом, начатый еще в 1970-х гг. Данная статья является последней нашей совместной работой. Говоря об отличительных свойствах М. И. как математика, хочу отметить исключительную тщательность в каждодневной работе и редкую преданность своей науке, которой была посвящена вся без остатка его жизнь. Огромные успехи М. И. в математике достигнуты в немалой степени благодаря замечательным чертам его характера – доброте, спокойствию, скромности, бескорыстию. Надеюсь, что его имя останется замечательным примером ученого для следующих поколений математиков.

Ключевые слова: группа Ивасавы, когомологии, группы токов, неунитарные представления.

Поддержано грантом РНФ 17-71-20153.

См. также очерк о М. И. в “Успехах математических наук”, т. 63, вып. 1(379), 169–182 (2008), и имеющийся там же список печатных работ М. И.

§1. Введение

В этой работе, запланированной нами несколько лет назад, но обсуждавшейся с М. И. в деталях только в самое последнее время, содержится проект построения неунитарных представлений групп токов с коэффициентами в полупростых группах типа $U(p,q)$. Следует пояснить, в чем суть и необходимость такого проекта. Группы токов, или функциональные группы Ли, – это группы функций на многообразиях или группы сечений расслоений групповым слоем над многообразиями, значения которых (функций, сечений) суть элементы конечномерной группы Ли (или даже произвольной локально компактной группы), называемой группой коэффициентов. Представлениям таких групп токов, начиная с 1970-х гг., посвящено немало работ, из которых мы упомянем лишь самые главные: [1–10].

Было понято, что для построения унитарных представлений групп токов необходимо использовать нетривиальные когомологии групп коэффициентов со значениями в неприводимых унитарных представлениях группы коэффициентов. Представления, в которых 1-когомологии нетривиальны, называются особыми, и необходимое условие особости состоит в “приклеенности” (неотделимости) этого представления и единичного представления. Наибольший интерес представляли, конечно, полупростые группы; изучение их с этой точки зрения было начато в [2].

Особые неприводимые представления существуют далеко не у всех групп Ли. Например, для вещественных форм полупростых групп Ли это лишь группы вещественного ранга 1 за исключением симплектической серии, другими словами, только те группы, которые не обладают свойством Каждана (= изолированность в топологии Фелла единичного представления в пространстве неприводимых унитарных представлений). Иначе говоря, это группы $U(p,1), O(p,1)$, $p=1,2,\dots$. Для таких групп соответствующая теория была построена в работах [2,3] и других в 1970–1980 гг. После некоторого перерыва эти исследования были продолжены в последующих наших работах, вот их полный список: [13–25]. В частности, был развит новый способ реализации таких представлений, намеченный в [4], использующий вместо фоковского пространства более естественные теоретико-вероятностные конструкции – интегральные, пуассоновские и квазипуассоновские модели. Основная идея, общая для всех работ этой серии, состоит в том, что сначала теория представлений развивается для разрешимой подгруппы полупростой группы, а именно для группы Ивасавы, а затем продолжается на всю полупростую группу. Естественность этой идеи, во всяком случае для вещественных форм типа $U(p,q), O(p,q), Sp(p,q)$, вытекает из самой структуры группы и ее подгруппы Ивасавы. Однако переход к разрешимым подгруппам позволяет использовать иные модели факторизаций, отличные от фоковской и более удобные. Имеется в виду, что класс процессов Леви и, в частности, гамма-процесс дает альтернативные модели гильбертова пространства и факторизаций, удобные для теории представлений и квантования. Одно из существенных следствий этого подхода – оформление идеи обобщения аналога лебеговой меры в бесконечномерном пространстве, которая является перенормировкой меры гамма-процесса, обладает большой группой симметрий и связана с мерами Пуассона–Дирихле [11,12].

Изучение данных групп еще не закончено, однако следует обратиться к случаям, которые не попадают в рамки имеющихся схем. А именно, что делать с представлениями групп токов со значениями в $O(p,q), U(p,q)$ при $q > 1$ и $Sp(p,q)$, а также в других вещественных формах полупростых групп?

Поскольку у этих групп нет особых неприводимых унитарных представлений, следует обратиться к особым неунитарным неприводимым представлениям, и это делается в наших последних работах. В данной статье мы доводим до конца такое построение для групп $U(p,q)$. План состоит в том, что сначала строится коцикл в неунитарном представлении подгруппы Ивасавы группы $U(p,q)$. В связи с этим мы подробно излагаем не очень распространенную структурную теорию групп Ивасавы. Подгруппа Ивасавы группы $U(p,q)$ – это разрешимая группа, являющаяся полупрямым произведением некоторой нильпотентной подгруппы нижнетреугольных матриц S на так называемую группу Гейзенберга $N_{p,q}$. Если нильпотентные группы не имеют нееденичных особых унитарных представлений, то ситуация с разрешимыми группами совершенно не ясна. Мы не знаем, имеются ли особые унитарные представления у групп Ивасавы ранга большего 1. Но в любом случае эти особые представления не могут быть продолжены до особых унитарных представлений всей полупростой группы. Поэтому мы определяем естественные неунитарные особые представления группы Ивасавы, т.е. строим нетривиальные 1-когомологии в неунитарном представлении этой группы, и затем продолжаем представление и коцикл на всю группу $U(p,q)$. Это удается сделать лишь при отказе от унитарности представления, но при сохранении ограниченности операторов представления для большей части группы, за исключением основной инволюции, которая может быть неограниченной. После продолжения представления и коцикла мы приступаем к воспроизведению конструкции квазипуассоновской модели представления ее группы токов. Это не вызывает серьезных трудностей. Построение намечено в основных чертах и будет рассмотрено в деталях позже. Существенно, что построенное представление действует в гильбертовом пространстве (L^2 по квазипуассоновской мере) операторами либо ограниченными (для подавляющего большинства элементов группы), либо плотно определенными (для инволюции и некоторых элементов компактной подгруппы), а все важные свойства представлений групп токов, которые имеют место для групп ранга 1, сохраняются.

Предстоит еще выяснить, какие операторы типа вертексных можно определить в пространствах этих представлений и каким может быть родство моделей с соответствующей теорией фоковского пространства и т.п. Но этой работой закладывается, я полагаю, некоторый фундамент для последующих рассмотрений.

§2. Описание группы $U(p,q)$ и ее разрешимой подгруппы (группы Ивасавы)

2.1. Группа $U(p,q)$. По определению $U(p,q)$ есть группа линейных преобразований пространства $\mathbb{C}^{p+q}$, сохраняющих эрмитову форму сигнатуры (p,q). Здесь эта форма выбрана так, чтобы максимальная разрешимая подгруппа группы $U(p,q)$ имела наиболее простой вид:

$$\sum_{i=1}^{p}(x_i\bar{x}_{q-p+i}+\bar{x}_i x_{q-p+i})+\sum_{i=p+1}^{q}|x_{p+i}|^2, \quad q \geqslant p.$$

Условимся все комплексные матрицы порядка $p+q$, $q \geqslant p$, представлять в блочной форме:

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix},$$

где диагональные клетки – блочные матрицы порядков p, $q-p$ и p соответственно; предполагается, что $q \geqslant p$. В частности, при $q = p$ эти матрицы вырождаются в блочные матрицы второго порядка.

В этих обозначениях $U(p,q)$ определяется как группа блочных матриц, удовлетворяющих условию

$$g\sigma g^* = \sigma, \quad \text{где} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_p \\ 0 & e_{q-p} & 0 \\ e_p & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

– инволюция, а символ $*$ обозначает композицию операций комплексного сопряжения и матричного транспонирования.

Это условие эквивалентно следующим соотношениям между блоками матрицы g:

$$\begin{aligned} g_{13}g_{31}^* + g_{12}g_{32}^* + g_{11}g_{33}^* &= e_p, \\ g_{23}g_{21}^* + g_{22}g_{22}^* + g_{21}g_{23}^* &= e_q, \\ g_{13}g_{21}^* + g_{12}g_{22}^* + g_{11}g_{23}^* &= 0, \\ g_{13}g_{11}^* + g_{12}g_{12}^* + g_{11}g_{13}^* &= 0, \\ g_{23}g_{31}^* + g_{22}g_{32}^* + g_{21}g_{33}^* &= 0, \\ g_{33}g_{31}^* + g_{32}g_{32}^* + g_{31}g_{33}^* &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Вещественная размерность группы $U(p,q)$ равна $(p+q)^2$.

2.2. Подгруппы S и N. Обозначим через S подгруппу блочно-диагональных матриц из $U(p,q)$ вида

$$\begin{pmatrix} s^{-*} & 0 & 0 \\ 0 & e_{q-p} & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix},$$

где s пробегает подгруппу комплексных нижнетреугольных матриц $\|r_{ij}\|$ порядка p, $r_{ij} = 0$ при $i < j$, а диагональные элементы r_{ii} вещественны и положительны.

Очевидно, что S – разрешимая группа ранга p; ее вещественная размерность равна p^2.

Обозначим через N подгруппу (Гейзенберга) блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} e_p & 0 & 0 \\ -z^* & e_{q-p} & 0 \\ \zeta & z & e_p \end{pmatrix},$$

где ζ – комплексная матрица порядка p, z – комплексная матрица размера $p\times(q-p)$, а условие принадлежности этих матриц группе $U(p,q)$ имеет следующий вид:

$$\zeta + \zeta^* - zz^* = 0, \quad \text{т.е.} \quad \zeta = n - \frac{1}{2}zz^*,$$

где n – косоэрмитова матрица. Иначе говоря, матрица ζ имеет заданную вещественную часть, определяемую матрицей z.

Элементы из N условимся представлять парами (ζ, z) с законом умножения

$$(\zeta_1, z_1)(\zeta_2, z_2) = (\zeta_1 + \zeta_2 - zz^*, z_1 + z_2).$$

Очевидно, что N – нильпотентная подгруппа группы $U(p,q)$ вещественной размерности $p(2q-p)$.

Обозначим через Q подгруппу в $U(p,q)$, порожденную подгруппами S и N. Группа Q является их полупрямым произведением:

$$Q = S \leftthreetimes N.$$

Элементы группы S действуют на N как групповые автоморфизмы:

$$s : (\zeta, z) \to (\zeta, z)^s = (s^*, sz).$$

2.3. Подгруппа Ивасавы P. Для каждой полупростой группы Ли G справедливо следующее аналитическое разложение Ивасавы:

$$G = NTK,$$

где N – максимальная нильпотентная подгруппа, $T = (\mathbb{R}_+^*)^p$, где p – ранг группы G, а K – максимальная компактная подгруппа в G. Это разложение, разумеется, не является групповым, но тем не менее первые две компоненты образуют подгруппу в G, а именно полупрямое произведение T и N.

Определение 1. *Полупрямое произведение $P = T \leftthreetimes N$ групп N и T называется подгруппой Ивасавы полупростой группы $U(p,q)$. Подгруппу N мы называем группой Гейзенберга (см. далее). В случае $p = q$ группа N есть аддитивная (коммутативная) группа комплексных матриц порядка p, т.е. “вырожденная” группа Гейзенберга.*

В принятом здесь матричном представлении группы $U(p,q)$ можно считать, что N есть подгруппа всех блочных матриц, у которых элемент g_{33} пробегает подгруппу нижнетреугольных нильпотентных матриц порядка p, а T есть пересечение подгруппы S с группой блочно-диагональных матриц.

Таким образом, справедливо аналитическое (не групповое) разложение $U(p,q)=PK$, играющее существенную роль в наших конструкциях.

Из определения следует, что группа P в нашем случае изоморфна введенному ранее полупрямому произведению $Q = S \leftthreetimes N$, т.е. подгруппе всех блочно-треугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} (s^*)^{-1} & 0 & 0 \\ -(sz)^* & e_{q-p} & 0 \\ s\zeta & sz & s \end{pmatrix}.$$

Дадим прямое описание группы Гейзенберга $N = N_{p,q}$. Обозначим через $A \sim \mathbb{R}^{p^2}$ аддитивную группу косоэрмитовых матриц n порядка p, через $\mathcal{A}$ – двойственную ей группу унитарных характеров $\chi(n)$ и через $Z \sim \mathbb{C}^{p(q-p)}$ – аддитивную группу комплексных матриц размера $p \times (q-p)$.

В этих обозначениях группа Гейзенберга N представима как группа пар (n,z), $n \in A$, $z \in Z$, с законом умножения

$$(n_1,z_1)(n_2,z_2) = (n_1+n_2-\frac{1}{2}(z_1z_2^*-z_2z_1^*), z_1+z_2).$$

Иначе говоря, N есть центральное расширение коммутативной группы Z с помощью коммутативной группы A и симплектической 2-формы $\omega : Z\times Z \to A$, где $\omega(z_1,z_2)=z_1z_2^*-z_2z_1^*$. Центром группы является подгруппа A, а фактор-группа по центру есть группа Z. Напомним, что обычная запись классической трехмерной группы Гейзенберга как суммы $\mathbb{C}+\mathbb{R}$ с симплектической формой $\omega(u_1,u_2)=i[u_1\cdot u_2{}^*-u_2\cdot u_1{}^*] \in \mathbb{R}$, $u_1,u_2 \in \mathbb{C}$, соответствует в наших обозначениях $n \in i\mathbb{R}$, $z=u\in\mathbb{C}$, т.е. классическая вещественная трехмерная группа Гейзенберга отвечает случаю $p=1$, $q=2$.

Вещественная размерность общей группы $N_{p,q}$ (при $p \neq q$) равна $2p(q-p)+p^2 = p(2q-p)$, а размерность группы Ивасавы (подгруппы в $U(p,q)$) равна $2pq$. Размерность максимальной компактной подгруппы $(U(p)\times U(q))$ равна p^2+q^2.

Подчеркнем, что изучение группы Ивасавы как разрешимой группы, ее представлений и когомологий заслуживает внимания само по себе, независимо от рассматриваемых далее приложений к представлениям групп токов и к другим вопросам.

§3. Описание невырожденных неприводимых унитарных представлений групп Гейзенберга N и Ивасавы P

В дальнейшем мы будем говорить о группе, а не о подгруппе Ивасавы, поскольку она нас интересует сама по себе. Начнем с того, что на описанных выше группах N, Z определено действие группы автоморфизмов S:

$$n \to sns^*, \quad \chi(n) \to \chi(sns^*), \quad z \to sz.$$

Таким образом, множество элементов группы A и множество элементов группы ее унитарных характеров $\mathcal{A}$ распадаются на орбиты действия группы S.

Назовем элементы этих групп и их S-орбиты невырожденными, если отображения $n \to sns^*$ и $\chi(n) \to \chi(sns^*)$ являются точными. Элементы каждой невырожденной S-орбиты назовем сопряженными между собой.

В частности, невырожденными являются характеры вида

$$\chi^\epsilon(n) = \exp(\mathrm{tr}(\epsilon n)), \quad \text{где} \quad \epsilon = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p), \quad \epsilon_i = \pm 1.$$

Орбита каждого характера χ^ϵ состоит из характеров вида

$$\chi^\epsilon_s(n) = \chi^\epsilon(sns^*).$$

Теорема 1. *Множество всех невырожденных характеров исчерпывается множеством характеров вида χ^ϵ_s. Таким образом, имеется в точности 2^p орбит невырожденных характеров относительно действия группы S.*

В этом пункте каждому невырожденному характеру будет сопоставлено неприводимое унитарное представление группы Гейзенберга.

Группа S действует на N как группа автоморфизмов

$$s : (n, z) \to (n, z)^s = (sns^*, sz).$$

Действие группы S на группе Гейзенберга N разбивает множество всех ее неприводимых неунитарных представлений T на S-орбиты:

S-орбита представления T есть множество всех унитарных представлений T^S, заданных формулой

$$T^s(g) = T(g^s), \quad s \in S.$$

Определение 2. *Назовем неприводимое унитарное представление T группы N, а также его S-орбиту невырожденными, если отображение $s \mapsto T^s$ является точным.*

С каждым характером χ связано индуцированное им унитарное представление группы N, действующее в гильбертовом пространстве $H_\chi = L^2(Z, dz)$, где dz – лебегова мера на Z.

Операторы T этого представления задаются следующей формулой:

$$T(n^0, z^0) f(z) = \chi^\epsilon(n - \frac{1}{2}(zz^{0*} - z^0 z^*)) f(z + z^0).$$

Заметим, что пространство H регулярного представления группы N есть прямой интеграл $H = \overset{\otimes}{\int} H_\chi d\chi$, где $d\chi$ – инвариантная мера на группе характеров χ.

Изучим структуру пространств H_χ, связанных с невырожденными характерами χ, и их разложение на неприводимые пространства.

3.1. Представление T группы N, индуцированное невырожденным характером. Обычно представление группы Гейзенберга в гильбертовом пространстве H_χ реализуют как представление, индуцированное характерами χ^ϵ. В соответствии с общим определением индуцированного представления $H_\chi = L^2(Z, dz)$, операторы представления группы N в пространстве H_χ задаются формулой

$$T^\epsilon(n^0, z^0) f(z) = \chi^\epsilon(n - \frac{1}{2}(zz^{0*} - z^0 z^*)) f(z + z^0), \tag{3}$$

или, в более подробных обозначениях,

$$T^\epsilon(n^0, z^0) f(z) = \exp\left(\sum_{i=1}^{p} (\epsilon_i n_{ii} - \frac{1}{2}(z_i z_i^{0*} - z_i^0 z_i^*))\right) f(zz^0), \tag{4}$$

где z_i есть i-я строка матрицы z. Рассмотрим сначала случай невырожденного характера на N вида $\chi^\epsilon(n) = \exp(\mathrm{tr}\, \epsilon n)$, где $\epsilon = \mathrm{diag}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$, $\epsilon_i = \pm 1$.

Заметим, что каждая из невырожденных S-орбит в пространстве характеров имеет характер χ в качестве своего представителя.

Нам, однако, понадобится другая реализация представления T, полученная заменой функций $f(z)$ функциями $f(z)e^{-\frac{1}{2}\operatorname{tr} zz^*}$.

Теорема 2. *В новой реализации представление T группы N действует в гильбертовом пространстве $L^2(Z, d\mu(z))$, где $d\mu(z) = e^{-\operatorname{tr} zz^*}dz$ есть гауссовская мера на Z, операторами вида*

$$T^\epsilon(n^0, z^0)f(z) = \exp\Big(\sum_{i=1}^{p}(\epsilon_i n_{ii} - \frac{1}{2}z^0 z^{0*} - \sum_{i;\epsilon_i=1} z_i z_i^{0*} - \sum_{i;\epsilon_i=1} z_i^0 z_i^*)\Big) f(z + z^0), \quad (5)$$

где z_i есть i-я строка матрицы z.

В самом деле, в новой реализации формула для оператора представления T получается из формулы в старой реализации добавлением следующего множителя:

$$e^{-\operatorname{tr}[(z+z^0)]z^* z^{0*} + \operatorname{tr} zz^{0*}} = \chi\Big(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}(z_i^0 z_i^{0*} + z_i z_i^{0*} + z_i^0 z_i^*)\Big). \quad (6)$$

Следствие 1. *Гильбертово пространство $L^2(Z, \mu)$ представимо как тензорное произведение гильбертовых пространств*

$$L^2(Z, \mu) = \otimes_{i=1}^{p} L^2(Z_i, \mu_i), \quad (7)$$

где Z_i есть i-я строка матрицы Z, а μ_i – гауссовская мера на Z_i, с заданными на них представлениями T_i однострочечных групп Гейзенберга (n_i, z_i):

$$T_i^\epsilon(n_i^0, z_i^0)f(z_i) = \exp(n_{ii} - \frac{1}{2}z_i^0 z_i^{0*} - z_i z_i^{0*}) f(z_i + z_i^0) \quad (8)$$

при $\epsilon_i = 1$,

$$T_i^\epsilon(n_i^0, z_i^0)f(z_i) = \exp(-n_{ii} - \frac{1}{2}z_i^0 z_i^{0*} - z_i^0 z_i^*) f(z_i + z_i^0) \quad (9)$$

при $\epsilon_i = -1$.

3.2. Разложение представления группы N в пространстве H_χ^ϵ на неприводимые.

Определение 3. *Назовем баргмановским пространством типа ϵ и обозначим через K^ϵ подпространство функций $f(z)$ из $L^2(Z, \mu)$, голоморфных относительно строк z_i, где $\epsilon_i = 1$, и антиголоморфных относительно строк z_i, где $\epsilon_i = -1$. Из сформулированной выше теоремы и ее следствия вытекает, что это подпространство замкнуто и инвариантно. Операторы представления группы N определены на нем в соответствии с приведенными ранее формулами.*

Из явного описания представления группы в пространстве H_χ следует, что K^ϵ является инвариантным гильбертовым подпространством в H^ϵ.

Очевидно также, что баргмановское пространство K^ϵ является тензорным произведением гильбертовых пространств

$$K^\epsilon = \bigotimes_{i=1}^{p} K_i,$$

где K_i – пространство голоморфных функций от z_i при $\epsilon_i = 1$ и антиголоморфных функций от z_i при $\epsilon_i = -1$, с заданными на них представлениями однострочечных групп Гейзенберга.

Отметим два свойства баргмановского пространства K^ϵ.

(i) Следующие конечные мономы образуют ортонормированный базис в баргмановском пространстве:

$$f(z) = \prod_{ij} \frac{x_{ij}^k}{\sqrt{k_{ij}!}},$$

где $x_{ij} = z_{ij}$ при $\epsilon_i = 1$ и $x_{ij} = \bar{z}_{ij}$ при $\epsilon_i = -1$.

(ii) $\int\limits_z f(z)\, d\mu(z) = f(0)$ для любой функции $f \in K^\epsilon$.

Теорема 3. *Представление T^ϵ группы N в баргмановском пространстве K^ϵ неприводимо.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь случай $\epsilon = (1, \ldots, 1)$. Введем инфинитезимальные операторы рождения и уничтожения, ассоциированные с представлением T, т.е. операторы вида

$$A_{ij}^{+} f = \left. \frac{\partial (Tf)}{\partial z_{ij}^0} \right|_{z^0=0}, \quad A_{ij}^{-} f = \left. \frac{\partial (Tf)}{\partial \bar{z}_{ij}} \right|_{z^0=0}.$$

Из определения следует, что операторы A^+ повышают степень каждого монома на единицу, а операторы A^- понижают эту степень на единицу и, значит, аннулируют вакуумный вектор. Неприводимость представления следует из этих свойств операторов $A_{ij}^{+,-}$. $\square$

Теорема 4. *Представление T^ϵ группы N в гильбертовом пространстве $L^2(Z, \mu)$ счетнократно его ограничению на баргмановское подпространство K^ϵ, т.е. разложимо в счетную прямую сумму неприводимых представлений, эквивалентных представлению группы N в баргмановском пространстве K^ϵ.*

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для случая представления в пространстве $L^2(Z,\mu)$, где Z – группа однострочечных матриц $z=(z_1,\dots,z_m)$.

Свяжем с каждым мультипликатором $k=(k_1,\dots,k_m)$, $k\geqslant 0$, гильбертово подпространство L_K, полученное пополнением по норме всех линейных комбинаций мономов вида $z^{k'}z'^{k''}$, где k' любое, $k''\leqslant k$. В частности, $L_0=K$. Из определения следует, что

(a) подпространства L_k инвариантны;
(b) $L_k\subset L_{k'}$ при $k<k'$; в частности, $L_k\subset L_{k+e_i}$, $i=1,\dots,n-1$, где $\{e_i\}$ – стандартный базис в $\mathbb{Z}^{n-1}$;
(c) пополнение индуктивного предела пространств L_k относительно вложений $L_k\subset L_{k'}$ совпадает с пространством H_1^+.

Для каждого мультииндекса k и индекса $i=1,\dots,n-1$ обозначим через $L_{k,i}$ прямое дополнение к L_k в пространстве L_{k+e_i}, т.е.

$$L_{k+e_i}=L_{k,i}\otimes L_k.$$

Очевидно, что пространства $L_{k,i}$ инвариантны и что все пространство H_1^+ представимо (не единственным образом) в виде счетной прямой суммы таких пространств.

Убедимся, что представление T группы N в любом пространстве $L_{k,i}$ эквивалентно ее представлению $T_{1,0}^+$ в пространстве K.

Обозначим $f=\bar z^{k+e_i}$. Этот вектор лежит в L_{k+e_i} и ортогонален подпространству L_k. Таким образом, $f\in L_{k,i}$. Легко также убедиться, что f – циклический вектор в $L_{k,i}$. Аналогично, вектор $f_0\equiv 1$ принадлежит пространству K и цикличен в этом пространстве. Поэтому достаточно убедиться, что для любого элемента $g\in N$ скалярные произведения $\langle T(g)f,f\rangle$ и $\langle T(g)f_0,f_0\rangle$ различаются множителем, зависящим только от k. Этот факт непосредственно следует из описания операторов представления, а именно, согласно этому описанию,

$$\langle T(g)f_0,f_0\rangle=e^{\zeta_0},\quad \langle T(g)f,f\rangle=e^{\zeta_0}\langle f,f\rangle. \qquad \square$$

3.3. Описание всех невырожденных неприводимых унитарных представлений группы N. Опишем теперь унитарное представление T_s^ϵ, ассоциированное с произвольным невырожденным характером $\chi_S^\epsilon(n)\exp(\mathrm{tr}(\epsilon sns^*))$.

Обозначим через π_s изоморфизм пространства H, задаваемый формулой

$$(\pi_s f)(z)=f(sz).$$

Определим операторы $T_s^\epsilon(y)$ группы N в пространстве H следующим равенством:

$$T_s^\epsilon(g)f(z) = \pi_s(T^\epsilon(g^s)f(z)).$$

Из явных формул для оператора T^ϵ следует такое предложение.

Предложение 1. *Унитарное представление группы N в пространстве H, связанное с невырожденным характером χ_s^ϵ, задается следующей формулой:*

$$T_s^\epsilon(n^0, z^0)f(z) = \exp\left(\sum_{i=1}^{p}\left((\epsilon s n^0 s^*)_{ii} - \frac{1}{2}w_i^0 w_i^{0*}\right)\right.$$
$$\left. - \sum_{i,\epsilon_i=1} w_i w_i^{0*} - \sum_{i,\epsilon_i=-1} w_i^0 w_i^*\right) f(w+w^0), \quad (10)$$

где использованы обозначения $w = sz$, $w^0 = sz^0$.

Обозначим через K_s^ϵ подпространство всех функций $f(w) = f(sz)$, голоморфных относительно i-й строки матрицы w при $\epsilon_i = 1$ и антиголоморфных относительно этой строки при $\epsilon_i = -1$.

Из описания операторов представления T_s^ϵ следует такая теорема.

Теорема 5. *Пространства K_s^ϵ являются замкнутыми инвариантными подпространствами гильбертова пространства H^ϵ.*

Назовем эти подпространства баргмановскими подпространствами, ассоциированными с характерами χ_s^ϵ.

Таким образом, каждому невырожденному характеру χ_s^ϵ поставлено в соответствие унитарное представление T_s^ϵ группы N в гильбертовом пространстве K_s^ϵ, сопряженное с представлением T^ϵ в пространстве K^ϵ.

По аналогии с рассмотренными ранее представлениями T^ϵ группы N устанавливается, что

(a) представления T_s^ϵ неприводимы;
(b) пространство K_s^ϵ представимо как тензорное произведение гильбертовых пространств функций на W_i, где W_i есть i-я строка матрицы W, голоморфных при $\epsilon_i = 1$ и антиголоморфных при $\epsilon_i = -1$;
(c) представление группы N в гильбертовом пространстве H_s^ϵ счетнократно неприводимому представлению в пространстве K_s^ϵ.

Теорема 6. *Представления T_s^ϵ группы N попарно неэквивалентны.*

Доказательство. Вычислим сферические функции $\phi_s^\epsilon(n,z)$ этих представлений, т.е. функции $\phi_s^\epsilon(g) = \langle T_s^\epsilon(g)\mathbf{1},\mathbf{1}\rangle$, где $\mathbf{1}$ – вакуумный вектор в пространстве представления. Из явной формулы для операторов представления следует, что $\phi_s^\epsilon(n,z) = \chi_s^\epsilon(n - \frac{1}{2}zz^*)$. Поскольку эти функции попарно различны, соответствующие представления попарно неэквивалентны. □

Следствие 2. *Представления T_s^ϵ группы N образуют полную систему невырожденных неприводимых унитарных представлений.*

Заключая этот пункт, подчеркнем, что изложенная схема рассмотрения представлений общей группы Гейзенберга, т.е. центрального расширения коммутативной группы с помощью коммутативной группы и симплектической 2-формы, носит общий характер и принципиально ничем не отличается от теории представлений классической трехмерной группы Гейзенберга. В силу нильпотентности у таких групп нет точных особых неприводимых представлений: все нетривиальные коциклы со значениями в неприводимых представлениях суть просто аддитивные характеры со значениями в одномерном единичном представлении. Этот результат, по-видимому, доказан несколькими авторами (см., например, [8]). В то же время, если отказаться от неприводимости, нетривиальные когомологии появляются, например, в регулярном представлении или в любом унитарном представлении, слабо содержащем единичное. Этим мы и воспользуемся, когда будем изучать представления группы Ивасавы, т.е. полупрямого произведения некоторой нильпотентной группы и группы Гейзенберга.

§4. Неунитарные представления группы Ивасавы P

4.1. Почти инвариантные меры на группе S и неунитарные представления.

Определение 4. *Назовем меру $d\nu(s)$ на S почти инвариантной, если эта мера квазиинвариантна относительно преобразований $s \to s_0$ группы S и ее производные $\frac{d\nu(ss_0)}{d\nu(s)}$ ограничены при любом $s_0 \in S$.*

В частности, мера Хаара на S – инвариантная относительно правых сдвигов $s \to ss_0$ – является почти инвариантной мерой на S.

Свяжем с каждой S-орбитой в пространстве невырожденных унитарных представлений T_s^ϵ и с каждой почти инвариантной мерой $d\nu(s)$ на S неунитарное представление группы N.

По определению это представление реализуется в прямом интеграле

$$\mathcal{K}_s^\epsilon = \int_S^{\oplus} K_s^\epsilon \, d\nu(s) \tag{11}$$

по S гильбертовых пространств K_s^ϵ с действующими на них представлениями T_s^ϵ группы N.

Действия на K_s^ϵ унитарных представлений T_s^ϵ индуцируют унитарное представление группы N на всем пространстве $\mathcal{K}^\epsilon$.

Определим далее операторы T_s^ϵ группы S в пространстве $\mathcal{K}^\epsilon$ как операторы правого сдвига:

$$T^\epsilon(s_0)f(s) = f(ss_0) \quad \text{при любом} \quad s_0 \in S.$$

Из условия почти инвариантности меры $d\nu(s)$ следует, что эти операторы определены и ограничены на всем гильбертовом пространстве $\mathcal{K}^\epsilon$.

Легко убедиться, что определенные так операторы подгрупп N и S совместно порождают, вообще говоря, неунитарное представление всей группы Ивасавы $P = S \leftthreetimes N$. Очевидно, это представление унитарно в случае, когда $d\nu(s)$ есть мера Хаара.

Теорема 7. *Представления $\widetilde{T}$ группы Ивасавы P операторно неприводимы и попарно неэквивалентны.*

Доказательство. Попарная неэквивалентность представлений $\widetilde{T}^\epsilon$ следует из попарной неэквивалентности представлений T_s^ϵ группы N при различных ϵ и s.

Докажем их неприводимость. Пусть A – произвольный ограниченный оператор в пространстве H^ϵ, коммутирующий с операторами представления $\widetilde{T}^\epsilon$. Из попарной неэквивалентности представлений T_s^ϵ подгруппы N следует, что этот оператор кратен единичному оператору на каждом подпространстве K_s^ϵ.

Из эргодичности меры $\nu(s)$ на S следует, что этот оператор есть константа. $\square$

Теорема 8. *Представление T группы P, ассоциированное с почти инвариантной мерой ν, эквивалентно представлению $\widetilde{T}$ этой группы* *в гильбертовом пространстве* $L^2(S,\mu,K)$*, ассоциированном с мерой Хаара, где операторы представления подгруппы* N *унитарны и сохраняют тот же вид, а операторы подгруппы* S *задаются формулой*

$$(\widetilde{T}(s_0)F)(s) = F(ss_0)\frac{a(s)}{a(ss_0)}, \quad \textit{где} \quad |a(s)|^2 = \frac{d\mu(s)}{d\nu(s)}.$$

Доказательство. Воспользуемся следующим равенством:

$$\int\limits_S |f(ss_0)|^2\, d\nu(s) = \int\limits_S |f(ss_0)a(s)|^2\, d\mu(s).$$

Положив $F(s) = f(s)a(s)$, мы можем представить правую часть этого равенства в виде

$$\int\limits_S |F(ss_0)\frac{a(s)}{a(ss_0)}|^2\, d\mu(s).$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы. □

§5. Особые неунитарные представления группы Ивасавы

5.1. Определение особого представления.

Определение 5. *Представление* T *(необязательно унитарное) локально компактной группы* G *в гильбертовом пространстве* H *называется особым, если его группа* 1*-когомологий нетривиальна; это означает, что существует нетривиальное непрерывное отображение* $\beta : G \to H$*, удовлетворяющее соотношению*

$$\beta(g_1g_2) = T(g_1)\beta(g_2) + \beta(g_1)$$

*(*1*-коцикл). Нетривиальность означает, что этот коцикл не представим в виде* $\beta(g) = T(g)\xi - \xi$*, где* $\xi \in H$*.*

Свойство представления T группы G быть особым существенно для построения представления ее группы токов G^X, т.е. группы отображений $G \to X$, где X – пространство с вероятностной мерой, с операцией поточечного умножения. Именно, если T – неприводимое унитарное особое представление группы G, то существует фоковская конструкция, сопоставляющая этому представлению неприводимое представление группы токов G^X.

Цель статьи состоит в том, чтобы в классе почти инвариантных мер $\nu(s)$ на группе S выделить те, для которых описанное выше представление группы P в пространстве H^ϵ является особым представлением, и затем продолжить его до представления соответствующей группы $U(p,q)$.

5.2. Достаточные условия особости представления группы Ивасавы P, ассоциированного с почти инвариантной мерой. Для простоты ограничимся представлениями в пространствах $\mathcal{K}^\epsilon$, где $\epsilon = (1,1,\ldots,1)$. В этом случае

$$\mathcal{K} = \int_S^{\otimes} K_s \, d\nu(s),$$

где $K_s = K$ – пространства голоморфных функций от Z.

Критерий допустимости для случая произвольного ϵ аналогичен.

Теорема 9. *Пусть ν – почти инвариантная мера на S, для которой существует скалярная положительная функция $f(s)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) $\int_S f(s)^2 \, d\nu(s) = \infty$;

(ii) $\int_S |f(ss_0) - f(s)|^2 \, d\nu(s) < \infty$ *для любого* $s_0 \in S$;

(iii) $\int_S (1 - \operatorname{Re} e^{\operatorname{tr}(s(n - \frac{1}{2}zz^*)s^*)}) f^2(s) d\nu(s) < \infty$ *для любого* $(n_0, z_0) \in N$.

Тогда представление T группы Ивасавы, ассоциированное с мерой $d\nu(s)$, обладает нетривиальным 1-коциклом вида

$$\beta(g) = T(g) f(s)\mathbf{1} - f(s)\mathbf{1}$$

и является таким образом особым представлением.

Доказательство. Очевидно, что условие (ii) эквивалентно условию, что значение $\beta(s_0)$ принадлежит пространству представления при любом $s_0 \in S$. Убедимся, что условие (iii) эквивалентно условию принадлежности значения $\beta(g)$ пространству представления при $g \in N$. В самом деле, это условие принадлежности имеет вид

$$\int_S \|T_s(g)\mathbf{1} - \mathbf{1}\|_K^2 |f(s)|^2 \, d\nu(s) < \infty \quad \text{для} \quad g \in N. \tag{12}$$

Поскольку $\int\limits_S \|T(n_0, z_0)\mathbf{1} - \mathbf{1}\|^2_{K_s} = 2(1 - \operatorname{Re} e^{\operatorname{tr}(sns^* - \frac{1}{2}zz^*)})$, это условие эквивалентно условию (iii). Таким образом, доказано, что β есть 1-коцикл. Из условия (i) следует, что этот коцикл нетривиален.

Попутно получена явная формула для нормы этого нетривиального коцикла:

$$\|\beta(s_0)\|^2 = \int\limits_S |f(ss^0) - f(s)|^2 \, d\nu(s) \quad \text{при} \quad s_0 \in N, \tag{13}$$

$$\|\beta(n^0, z^0)\|^2 = \int (1 - \operatorname{Re}\operatorname{tr}(s(n - \frac{1}{2}zz^*)s^* f^2(s)) \, d\nu(s) \tag{14}$$

$$\text{при} \quad (n^0, z^0) \in N. \qquad \square$$

5.3. Пример особого представления. Приведем пример особого представления. Фиксируем почти инвариантную меру на S вида

$$d\nu(s) = |s|^{-p^2} ds, \quad \text{где} \quad |s|^2 = \operatorname{tr}(ss^*) = \sum_{i \geqslant j} |s_{ij}|^2,$$

а ds – лебегова мера на S.

Докажем, что неунитарное представление подгруппы P, ассоциированное с этой мерой, обладает нетривиальным 1-коциклом

$$\beta(p) = T(p)f - f, \quad \text{где} \quad f = e^{-\frac{1}{2}|s|^2}\mathbf{1}.$$

Для этого достаточно убедиться, что функция $f(s)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям (i)–(iii).

Перейдем в выражении для меры $d\mu(s)$ от декартовых координат на S к полярным координатам: $s = r\omega$, где $r = |s|$ и $|\omega| = 1$. В этих координатах условия (i)–(iii) на функции f принимают следующий вид:

(i) $\int\limits_0^\infty e^{-r^2} r^{-1} \, dr = \infty$;

(ii) $\int\limits_S |e^{-\frac{1}{2}r^2|\omega s_0|^2} - e^{-\frac{1}{2}r^2}|^2 \, r^{-1} \, dr d\omega < \infty$;

(iii) $\int\limits_S (1 - e^{-\frac{r^2}{2}\operatorname{tr}(sz^0 z^{0*} s^*)}) r^{-1} \, dr < \infty$.

Выполнение этих трех условий очевидно.

Из (ii) и (iii) интегрированием по r получаем следующие выражения для нормы нетривиального 1-коцикла:

(1) $\|\beta(s_0)\|^2 = \int\limits_\Omega \ln \frac{|\omega s^0|^4}{|\omega s^0|^2 + 1} \, d\omega$;

(2) $\|\beta(n^0,z^0)\|^2 \int\limits_\Omega \ln \frac{|n^0-\frac{1}{2}z^0z^{0*}|^4}{|z^0z^{0*}|^2}\, d\omega.$

§6. Продолжение особого представления подгруппы Ивасавы до представления всей группы $U(p,q)$

6.1. Постановка вопроса. Рассматривается введенное в предыдущем пункте особое неунитарное представление T группы P в гильбертовом пространстве K с нетривиальным 1-коциклом и подпространство L, порожденное векторами коцикла. Решается задача о продолжении представления T группы Ивасавы в пространстве L на всю группу $U(p,q)$.

Конструкция этого продолжения основана на следующем свойстве группы Ивасавы. Как мы уже отмечали, любой элемент g группы $U(p,q)$ представим, и притом однозначно, в виде произведения $g=kp$ элементов k и p, где $p\in P$, а k принадлежит максимальной компактной подгруппе K в $U(p,q)$, определяемых дополнительным соотношением $kk^*=e_p$.

Операторы этого продолжения задаются не на всем гильбертовом пространстве $L^2(S,\mu,K)$, а лишь на некотором предгильбертовом пространстве L, линейно порожденном векторами $b(p,r)$, определяемыми нетривиальным 1-коциклом. Напомним, что в силу доказанной теоремы эти векторы попарно различны и линейно независимы, т.е. образуют неортогональный, вообще говоря, базис в линейном пространстве L.

Определим операторы $T(k)$, $k\in K$, на множестве векторов $b(p)$ как операторы подстановки этого множества.

Рассматривается описанное выше особое неунитарное представление T группы P в пространстве $L^2(S,\mu,K)$ с нетривиальным 1-коциклом:

$$b : p \to L^2(S,\mu,K),$$

$$b(p) = T(g)f - f, \quad \text{где} \quad f = e^{-\operatorname{tr}(ss^*)}.$$

В силу неприводимости векторы $b(p)$ образуют тотальное подмножество в этом пространстве. Искомое продолжение на группу $U(p,q)$ будет определено только на подпространстве L, линейно порожденном этими векторами.

Теорема 10. *Отображение $p \to b(p)$ инъективно. Образ каждого элемента $p = (s, n, z)$ группы P при этом отображении имеет следующий вид:*

$$b(s, n, z) = \exp(-\operatorname{tr}(sas^* + h)), \text{ где } a = s(n - \frac{1}{2}zz^* + 1)s^*, \quad h = z^*s^*.$$

Доказательство. Согласно определению представления T имеем

$$b(s, n, z) = \exp(-\operatorname{tr}(ss_0(n_0 - \frac{1}{2}z_0z_0^*)s_0^* - zz_0^*s_0^* - ss_0s_0^*s^*)) - \exp(-\operatorname{tr}(ss^*)).$$

Полученное выражение эквивалентно приведенному в теореме. Убедимся, что равенство $b(p') = b(p)$ возможно только при $p' = p$. В самом деле, если $p' = s_0'n_0'z_0'$, то в силу формулы для 1-коцикла имеем

$$s_0'(n_0' - \frac{1}{2}z_0'z_0'^* - 1)z_0'^* = s_0(n_0 - \frac{1}{2}z_0z_0^* - 1)z_0^*, \quad s_0'z_0' = s_0z_0.$$

Напомним, что n_0 и n_0' – косоэрмитовы матрицы, поэтому из первого равенства следует, что $n_0's_0'^* = s_0n_0s_0^*$ и $(z_0's_0')(s_0'z_0')^* = (z_0s_0)(s_0z_0)^*$. Отсюда непосредственно следует, что $s_0' = s_0$, а значит, $z_0' = z_0$ и $n_0' = n_0$, т.е. $p' = p$. □

Теорема 11. *Пусть T – неунитарное представление группы P в гильбертовом пространстве $L^2(S, \mu, K)$, и пусть $b(p)$ является 1-коциклом. Тогда существует продолжение представления подгруппы P и ее 1-коцикла $b(p)$ на всю группу $U(p, q)$.*

Для описания этого продолжения воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1. *Векторы $b(p)$ попарно различны и линейно независимы при $p \neq 0$.*

Доказательство. Из явного выражения для операторов представления следует, что эти векторы могут быть представлены в канонической форме коцикла $b(p)$ при $p = (s_0, n_0, z_0)$. Легко убедиться, что $b(p) \neq b(p')$ при $p \neq p'$. □

6.2. Описание представления. Опишем продолжение особого представления подгруппы Ивасавы P в пространстве $L^2(S, \nu, K)$ и его нетривиального 1-коцикла $\pi(p) = T(p)f - f$, где $f = e^{-\frac{1}{2}|s|^2}$, до представления всей группы $U(p, q)$ и ее 1-коцикла. Это продолжение основано на следующем свойстве P как группы Ивасавы: существует максимальная компактная подгруппа $K \subset U(p,q)$, такая, что элементы из $U(p,q)$ представимы, и притом единственным образом, в виде произведения pk, где $p \in P$, $k \in K$ и $kk^* = e_p$.

Искомое продолжение реализуется не на всем гильбертовом пространстве $L^2(S,\nu,K)$, а лишь на его инвариантном подпространстве L, линейно порожденном векторами $\beta(p)$.

Определение 6. *Определим действие операторов представления подгруппы K на множестве векторов $b(p)$ формулой $T(k)b(p) = b(p')$, $p' \in P$, где p' определяется из соотношения $kp = p'k^*$, и продолжим эти операторы по линейности на все пространство L.*

Корректность такого определения вытекает из следующего свойства группы P.

Лемма 2. *Отображение $p \to b(p)$ биективно, и векторы $b(p)$ линейно независимы.*

Утверждение леммы вытекает из следующего представления векторов $b(p) = b(s,n,z)$:

$$b(s,n,z) = \exp(-\operatorname{tr} s^*sa - h), \quad \text{где} \quad a = s(n - \frac{1}{2}z^* - 1), \quad h = sz.$$

Нетрудно убедиться, что построенные так операторы подгруппы K на L задают вместе с операторами подгруппы P представление всей группы $U(p,q)$.

Продолжение 1-коцикла b на всю группу $U(p,q)$ задается формулой $b(p,k) = b(p)$ при любых $p \in P$, $k \in K$.

6.3. Описание оператора инволюции w. Хорошо известно, что группа $U(p,q)$ алгебраически порождается подгруппой Ивасавы P и всего одним элементом компактной группы K – инволюцией w (ср. (1)); поэтому для продолжения представления группы P в пространстве L до представления группы $U(p,q)$ достаточно описать только действие оператора $T(w)$. Опишем это действие.

Из определения следует, что действие этого оператора на векторы $b(p) \in P$ задается формулой

$$T(w)b(p) = b(p'),$$

где элемент $p' \in P$ определяется равенством $kp = p'k^*$. Иначе говоря, инволюция коммутирует с коциклом.

Удобна другая интерпретация пространства L и действия на нем оператора инволюции $T(w)$. А именно, введем пространство H эрмитовых матриц вида pp^*, $p \in P$. Поскольку отображение $p \to |n| = pp^*$ является биекцией, групповая структура на P индуцирует групповую структуру в пространстве P:

$$n_1 n_2 = p n_2 p^*,$$

где элемент $p \in P$ задается равенством $pp^* = n_1$.

Заметим, что отображение $n \to b(n)$ сохраняет пространство H. В результате пространство L можно интерпретировать как пространство, линейно порожденное независимыми векторами $b(n)$, $n \in H$. Операторы подгруппы P действуют по формуле

$$T(p)b(n) = b(pnp^*),$$

а операторы инволюции имеют вид

$$T(w)b(n) = b(p^* n p).$$

6.4. Конструкция продолжения представления подгруппы в свободном $\mathbb{C}$-модуле. Несколько отступая от основной линии, покажем, что приведенная конструкция продолжения представления подгруппы на содержащую ее группу есть частный случай конструкции, применимой к свободным $\mathbb{C}$-модулям. С каждой группой P естественно связан свободный $\mathbb{C}$-модуль $\mathbb{C}[P]$ над множеством элементов p группы P. Его элементы – конечные или счетные суммы вида $\sum \lambda_i p_i$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$ и $p_i \in P$. На этом модуле определено представление T группы P операторами, заданными на базисе этого модуля формулой

$$T(p)p = p_0 p.$$

С каждым элементом p_0 связан нетривиальный коцикл группы P вида

$$\beta(p) = T(p)p_0 - p_0$$

и линейное подпространство L коразмерности 1 в $\mathbb{C}[P]$-модуле, линейно порожденное векторами $\beta(p)$.

Пусть теперь G – произвольная топологическая группа, представимая в виде произведения (в топологическом смысле) подгрупп P и K, пересечение которых содержит лишь единичные элементы. Тогда на нашем модуле можно ввести представление подгруппы K, заданное на базисных элементах p следующей формулой: $T(k)p = p'$, где элемент

$p' \in P$ определяется из соотношения $kp = p'k'$, $k' \in K$. Определенные так операторы продолжаются по линейности на весь модуль и порождают вместе с операторами представления подгруппы P представление всей группы G.

Теорема 12. *Если действие подгруппы K на группе P эргодично, то построенное так представление группы G операторно неприводимо.*

Замечание. Пространство L в этом определении совпадает с пространством L из рассмотренного выше примера. Подгруппа K есть подгруппа элементов, удовлетворяющих дополнительному условию $kk^* = 1$.

Пусть T – произвольное точное представление подгруппы P в пространстве H, а β – его произвольный ненулевой 1-коцикл. Обозначим через $B \subset H$ множество значений этого 1-коцикла и через H_0 подпространство в H, линейно порожденное элементами этого подмножества.

Теорема 13. *Существует продолжение представления T подгруппы P в пространстве H_0 и 1-коцикла β подгруппы P в пространстве H_0 на всю группу $U(p,q)$.*

Приведем конструкцию этого представления. Из точности представления T группы P следует, что элементы $\beta(p) \in B$ попарно различны. Определим операторы $T(k)$, $k \in K$, на множестве B как операторы подстановки этого множества:

$$T(k)\beta(p) = \beta(p'), \quad p' \in P,$$

где элемент p' определяется из соотношения $kp = p'k'$, $k \in K$.

Из попарной различности векторов $\beta(p)$ следует корректность этого определения.

Из определения следует, что операторы T обладают групповым свойством на множестве B, а потому продолжаются до операторов представления подгруппы K на всем пространстве H_0.

Совместно с операторами подгруппы P они порождают искомое продолжение представления этой подгруппы на всю группу $U(p,q)$.

Продолжение 1-коцикла β на группу $U(p,q)$ задается следующей формулой: $\beta(pk) = \beta(p)$ для любых $p \in P$ и $k \in K$. В частности, $\beta(k) = 0$ для любого $k \in K$.

6.5. Свойства построенных продолжений.

(1) Операторы представления группы $U(p,q)$ в подпространстве H_0, вообще говоря, не ограничены и не продолжаются до представления группы $U(p,q)$ на всем пространстве H. Однако если операторы подгруппы K унитарны на подмножестве B, а операторы исходного представления подгруппы P также унитарны, то такое продолжение на все пространство H существует и задает унитарное представление группы $U(p,q)$.

Замечание. Поскольку простые группы Ли ранга > 1 не обладают особыми унитарными представлениями, такой случай возможен только для группы $U(1,q)$.

(2) Известно, что группа $U(p,q)$ порождена элементами подгруппы P и инволюцией w. Поэтому для описания продолжения представления подгруппы P на всю группу $U(p,q)$ достаточно знать формулу только для оператора элемента w:

$$T(w)\beta(p) = \beta(p'),$$

где элемент $p' \in P$ определяется из равенства $wp = p'k$, $k \in K$. Из этого равенства следует соотношение $wpp^*w = (p')^*p'$, однозначно определяющее элемент p' по элементу p.

(3) При описании продолжения никаких условий на исходный 1-коцикл β не накладывается. Однако если исходное представление является особым, то его продолжение на группу $U(p,q)$ может это свойство особости не сохранить.

Известно, что при $p > 1$ группа $U(p,q)$ не обладает особыми унитарными представлениями. Поэтому если исходное представление подгруппы P унитарно и невырождено, то построенное его продолжение на всю группу $U(p,q)$ не является унитарным.

(4) Унитарное точное представление подгруппы P может не являться особым. Однако эта группа обладает вырожденными особыми представлениями. В самом деле, известно, что унитарное представление группы P_2 нижнетреугольных унимодулярных матриц второго порядка является особым. Между тем, эта группа является фактор-группой разрешимой группы P, а потому особое представление группы P_2 продолжается до вырожденного представления группы P.

Мы завершили первую часть нашего построения – построили неунитарное особое представление группы $U(p,q)$ в предгильбертовом пространстве. Далее мы переходим к построению соответствующего представления группы токов.

§7. Представления группы токов P^X

7.1. Общие замечания о представлениях группы токов. Группой токов G^X, где G – произвольная локально компактная группа, а X – стандартное пространство с вероятностной мерой m, называется группа измеримых отображений $X \to G$, снабженная поточечным умножением. Существует давно обнаруженная связь между нетривиальными 1-когомологиями группы G в неприводимых унитарных представлениях и неприводимыми представлениями соответствующих групп токов G^X (см. [1–3,6] и др.). Именно, с каждым особым неприводимым унитарным представлением группы G связано неприводимое унитарное представление группы G^X в фоковском пространстве.

Известно, что 1-когомологии всех простых групп Ли ранга > 1 во всех неприводимых представлениях тривиальны, а потому не существует неприводимых унитарных представлений групп токов в фоковских пространствах. В этом разделе на примере группы $U(p,q)$ будет построено, за счет отказа от условия унитарности, неунитарное представление группы токов $U(p,q)^X$.

Мы начинаем с конструкции неунитарного представления группы токов P^X, а затем продолжаем его до неунитарного представления группы $U(p,q)^X$. В качестве исходного берется произвольное неунитарное представление группы P. Повторим, что вопрос о том, существует ли особое унитарное неприводимое представление этой группы, пока открыт.

Поскольку группа P является полупрямым произведением групп S и N, для построения ее группы токов наиболее удобна квазипуассоновская модель, введенная в [19] и примененная там для случая групп Ли ранга 1. Эту конструкцию нетрудно затем перенести на классическую фоковскую модель представлений групп токов. Начнем с двух общих определений.

7.1.1. *Квазипуассоновская модель фоковского пространства и счетное произведение пунктированных гильбертовых пространств.* Согласно определению квазипуассоновская мера есть бесконечная σ-конечная мера, заданная тройкой (Y, μ, u), где Y – стандартное борелевское пространство, μ – мера на Y и u – положительная функция на Y, такая, что

$$\int\limits_Y e^{-u(y)}\,d\mu(y) = \infty.$$

Это есть мера на пространстве $\mathcal{E}(Y)$ счетных или конечных последовательностей в Y (пространстве конфигураций), заданная следующим характеристическим функционалом:

$$\int\limits_{\mathcal{E}(Y)} \exp\big(-\sum_{y\in\omega} f(y)\big)\,d\sigma(\omega) = \exp\bigg(\int\limits_Y (e^{-f(y)} - e^{-u(y)})d\mu(y)\bigg). \tag{15}$$

Отметим, что при $u \equiv 0$ это определение совпадает с определением классической пуассоновской меры, ассоциированной с парой (Y, μ). Квазипуассоновское пространство, ассоциированное с этой мерой, есть по определению гильбертово пространство $L^2(\mathcal{E}(Y), \sigma)$.

Счетным тензорным произведением гильбертовых пространств H_i с фиксированными в них единичными векторами h_i называется пополнение индуктивного предела конечных тензорных произведений $\otimes_{i=1}^n H_i$ относительно вложений $\otimes_{i=1}^n H_i \to \otimes_{i=1}^{n+1} H_i$.

Если последовательность векторов $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ сходится в определенном так пространстве, то ее предел условимся записывать в виде бесконечного произведения $\otimes_{i=1}^\infty a_i$. Определенные так векторы образуют тотальное подмножество в бесконечном тензорном произведении.

Эту часть построения следует считать общепринятой в теории бесконечных тензорных произведений.

7.2. Квазипуассоновское пространство и неунитарные представления группы токов P^X. Пусть U – особое неунитарное представление группы Ивасавы P, ассоциированное с парой (T, μ), где T – баргмановское представление группы N в пространстве K, а μ – почти инвариантная мера на S. Пусть $b(g)$ – нетривиальный 1-коцикл этого представления, заданный согласно теореме 10 равенством

$$b(g) = T(g)f - f, \quad \text{где} \quad f(s) = e^{-(us)}1.$$

Опишем квазипуассоновское пространство, в котором будет реализовано представление группы токов P^X, ассоциированное с этим особым представлением группы P. Рассмотрим тройку (Y,μ,u), где $Y=S$, а μ и u – соответственно почти инвариантная мера на S и положительная функция на S, входящие в определение исходного представления группы Ивасавы P.

Обозначим через σ квазипуассоновскую меру на $\mathcal{E}(Y)$, ассоциированную с этой тройкой.

Свяжем далее с каждой конфигурацией $\omega\in\mathcal{E}(Y)$ счетное тензорное произведение

$$K_\omega^\otimes=\otimes_{s,x\in\omega}K_s,$$

где $K_s=K$ – баргмановское пространство.

Определим квазипуассоновское пространство, связанное с мерой σ, равенством

$$\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K^\otimes)=L^2(\mathcal{E}(Y),\sigma,K^\otimes),$$

т.е. как пространство сечений расслоения над $\mathcal{E}(Y)$ со слоями $K_\omega^\otimes$ с нормой

$$\|(f)\|^2=\int\limits_{\mathcal{E}(Y)}\|f(\omega)\|^2_{K_\omega^\otimes}\,d\sigma(\omega). \tag{16}$$

7.3. Формулы для операторов представлений группы P^X. Определим представление $\widetilde{U}$ группы P^X, ассоциированное с представлением U. Поскольку $P^X=S^X\leftthreetimes N^X$, достаточно описать отдельно действия

Начнем со случая группы N^X.

Действие операторов T группы N в баргмановском пространстве K естественно порождает действие операторов группы N^X на каждой компоненте $K_w^\otimes$, $\omega\in\mathcal{E}(Y)$; именно, на тотальном подмножестве векторов вида $\otimes_{(s,x)\in\omega}f_{s,x}$ операторы представления группы N^X действуют как мультипликаторы.

Очевидно, что эти операторы унитарны на каждом тензорном произведении $K_\omega^\otimes$ и порождают унитарные представления группы N^X на всем гильбертовом пространстве $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K^\otimes)$. Таким образом определено представление $\widetilde{U}$.

Наложим на S^X, μ и u следующее дополнительное условие:

$$\exp\left(\int\limits_{SX}(e^{-u(ss_0)(x)}-e^{-u(s)})\,d\mu(s)d\mu(x)\right)<\infty. \tag{17}$$

Определим операторы подгруппы S^X в гильбертовом пространстве $\mathrm{QPS}(S(Y),\sigma,K)$ как операторы сдвига:

$$\widetilde{U}(s_0(\,\cdot\,))f(\omega)=f(\omega s_0)(\,\cdot\,). \tag{18}$$

Теорема 14. *Для каждого элемента $\widetilde{s}=s_0(\,\cdot\,)\in S^X$ квазипуассоновская мера σ на $\mathcal{E}(S\times X)$ удовлетворяет оценке*

$$d\sigma(\omega\widetilde{s})<c(\widetilde{s})\,d\sigma(\omega),$$

где $c(\cdot)$ – некоторая ограниченная функция на S^*.

Доказательство. Из формулы для характеристического функционала меры σ следует, что

$$\int\limits_{\mathcal{E}(S\times X)}\exp\biggl(-\sum_{(s,x)\in\omega}f(s,x)\biggr)\,d\sigma(\omega\widetilde{s})
=\exp\biggl(\int\limits_{S\times X}(e^{-f(ss_0^{-1})}-e^{-u(s)})\,d\mu(x)dm(x)\biggr).$$

Правая часть этого равенства представима в виде произведения

$$\exp\biggl(\int\limits_{S\times X}(e^{-f(ss_0^{-1})}-e^{-u(s)})\,d\mu(x)dm(x)\biggr)=J_1J_2,$$

где

$$J_1=\exp\biggl(\int\limits_{S\times X}(e^{-f(s)}-e^{-u(s)})\,d\mu(ss_0x)dm(x)\biggr),$$

$$J_2=\exp\biggl(\int\limits_{S\times X}(e^{-u(ss_0^{-1})}-e^{-u(s)})\,d\mu(x)dm(x)\biggr).$$

Из условия (ii) и формулы для характеристического функционала меры σ следует, что

$$J+1\leqslant c(\widetilde{s})\int\limits_{\mathcal{E}(S\times X)}\exp\biggl(-\sum_{(s,x)\in\omega}f(s,x)\biggr)\,d\sigma(\omega).$$

Из условия (i) следует, что интеграл J_2 сходится. Таким образом, мы получаем оценку

$$\int\limits_{\mathcal{E}(S\times X)} \exp\Big(-\sum_{(s,x)\in\omega} f(s,x)\Big) d\sigma(\omega\widetilde{s}) \leqslant c \int\limits_{\mathcal{E}(S\times X)} \exp\Big(-\sum_{(s,x)\in\omega} f(s,x)\Big)\, d\sigma(\omega),$$

где c – некоторая константа.

Отсюда следует, что $d\sigma(\omega\widetilde{s}) < c\, d\sigma(\omega)$.

Назовем это свойство меры σ свойством *почти проективной эквивалентности относительно преобразованной группы* S^X. Отметим, что в случае, когда ν – инвариантная мера, справедливо равенство $d\sigma(\omega\widetilde{s}) = c(\widetilde{s})c\, d\sigma(\omega)$, где $c(\widetilde{s})$ – характер на S^X. $\square$

Определение 7. *Определим представление группы* S^X *в квазипуассоновском пространстве* $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$ *равенством*

$$(U(\widetilde{s})f)(\omega) = f(\omega\widetilde{s}), \quad \widetilde{s}\in S^X.$$

Из теоремы, приведенной выше, следует, что операторы представления U группы S^X ограничены.

Нетрудно убедиться, что определенные так операторы представления группы S^X порождают вместе с операторами группы N^X представление ограниченными операторами всей группы $P^X = S^X \leftthreetimes N^X$ в квазипуассоновском пространстве $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$.

7.4. Формулы для операторов представления группы $U(p,q)^X$.

Приведем единую формулу для операторов представления группы $U(p,q)^X$ на некотором тотальном подмножестве в $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$.

Обозначим через K^Y, где $Y = S\times X$, множество таких отображений $v:\ S\times X\to K$, что

(i) $f_v(\omega)\equiv\bigoplus_{(s,x)\in\omega} v(s,x)\in K_\omega^\oplus$ для почти каждой конфигурации $\omega\in\mathcal{E}(Y)$;

(ii) $\int\limits_{\mathcal{E}(Y)} \|f+v(\omega)\|^2\, d\sigma(\omega) < \infty$.

Таким образом, определено отображение $K^Y \to \mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$ вида

$$v\mapsto f_v(\omega) = \bigoplus_{(s,x)\in\omega} v(s,x).$$

Определенное так множество функций $f+v(\omega)$ тотально в пространстве $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$, а потому для описания представления U группы $U(p,q)^X$ достаточно описать действие операторов представления только на функции из этого множества.

Исходное представление $\widetilde{T}$ группы $U(p,q)$ в пространстве $\mathcal{K}$ индуцирует поточечное представление группы токов $U(p,q)^X$ в пространстве $\widetilde{K}^Y$ всех сечений $v(s,x)$ расслоения над $S\times X$ со слоем K, операторы которого условимся обозначать той же буквой $\widetilde{T}$, т.е.

$$(\widetilde{T}(g(\,\cdot\,))v)(s,x)=\widetilde{T}(g+x)y(s,x),$$

где оператор справа есть оператор представления группы G, действующий на v как на функцию от s.

Теорема 15. *Операторы $\widetilde{T}$ группы $U(p,q)^X$ сохраняют множество K^Y; операторы $U(\widetilde{g})$ представления группы $U(p,q)^X$ в квазипуассоновском пространстве $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$ задаются на подмножестве функций $f_v(\omega)$ следующей формулой:*

$$(U(\widetilde{g})f_v)(\omega)=f_{\widetilde{T}(\widetilde{g})}(\omega). \tag{19}$$

Обозначим через A операторы аффинного представления группы $U(p,q)^X$ в пространстве F_ν^X, ассоциированного с линейным представлением T и его 1-коциклом b:

$$A(g)v=T(g)v+b(g).$$

7.5. Условия неприводимости представления U группы токов $U(p,q)^X$.

Теорема 16. *Если представление T подгруппы N неприводимо, а сопряженные с ним представления T_s попарно неэквивалентны, то определенное выше представление $\widetilde{U}$ группы $P^X=S^X\leftthreetimes N^X$ в квазипуассоновском пространстве $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$ неприводимо.*

Доказательство. Из неприводимости представления T подгруппы N следует, что для почти каждой конфигурации $\omega\in\mathcal{E}(Y)$ представление U_ω группы N^X в пространстве $K_\omega^\oplus$ неприводимо.

Из попарной неэквивалентности представлений T_s следует, что представления U_ω группы N^X в пространствах $K_\omega^\oplus$ попарно неэквивалентны. Поэтому любой ограниченный оператор A на $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y),\sigma,K)$, перестановочный с операторами подгруппы N^X, есть оператор умножения на функцию $f(\omega)$. Если оператор A перестановочен также с операторами подгруппы S^X, то функция $f(\omega)$ постоянна на орбитах этой подгруппы в $\mathcal{E}(Y)$. Отсюда и из эргодичности квазипуассоновской меры σ относительно преобразований группы S^X следует, что $f(\omega) = \mathrm{const}$. □

§8. Конструкция продолжения неунитарного представления группы Ивасавы P^X до представления группы токов $U(p,q)^X$

8.1. Постановка задачи. Мы приступаем к последнему этапу нашего построения – конструкции продолжения представления с группы P^X на всю группу токов $U(p,q)^X$.

Для этого заменим исходное квазипуассоновское пространство $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y), \sigma, K^{\otimes})$ его инвариантным предгильбертовым пространством, линейно порожденным фиксированным вектором и его групповыми сдвигами. Такой переход разумен, поскольку, в силу неприводимости группы P^X, любое такое подпространство всюду плотно в исходном пространстве представления. Будет описано продолжение представления группы P^X в этом подпространстве на всю группу $U(p,q)^X$.

Фиксируем следующий вектор:

$$Q(\omega) = \otimes_{(s,x)\in\omega} f(s,x), \quad \text{где} \quad f(s,x) = e^{-\frac{1}{2}|s|^2} 1_S \in K_S. \tag{20}$$

Из формулы для характеристического функционала квазипуассоновской меры σ следует, что этот вектор принадлежит пространству $\mathrm{QPS}(\mathcal{E}(Y), \sigma, K^{\otimes})$ и имеет норму 1.

Обозначим через $b(\widetilde{g}) = b(g(\,\cdot\,))$ тривиальный 1-коцикл в пространстве L, порожденный вектором Q, т.е.

$$\widetilde{b(g)} = U(\widetilde{g})Q - Q.$$

Условимся обозначать через $L = L(\mathcal{E}(Y), \sigma, K^{\otimes})$ предгильбертово пространство, линейно порожденное векторами $b(g(\cdot))$.

Конструкция искомого продолжения дословно повторяет конструкцию аналогичного продолжения представления группы Ивасавы до представления группы $U(p,q)$. А именно, пусть K – максимальная компактная подгруппа в $U(p,q)$. Рассмотрим разложение

$$U(p,q)^X = P^X K^X.$$

Подобно случаю группы $U(p,q)$, определим действие элементов группы K^X на множестве векторов $b(\widetilde{p})$, $\widetilde{p} \in P^X$, как подстановку

$$U(\widetilde{k})b(\widetilde{p}) = b(\widetilde{p}'), \quad \widetilde{p}' \in P^X,$$

где элемент $\widetilde{p}'$ определяется из соотношения $\widetilde{k}\widetilde{p} = \widetilde{p}'\widetilde{k}'$, $\widetilde{k}' \in K^X$. Определенные так операторы, отвечающие элементам группы K^X, удовлетворяют групповому условию, а по линейности они продолжаются до операторов на всем пространстве L.

Нетрудно убедиться, что совместно с операторами представления исходной группы P^X эти операторы порождают представление всей группы $U(p,q)^X$.

Заметим, что в полученном представлении операторы центра группы $U(p,q)$ являются единичными операторами.

8.2. Описание оператора инволюции w. Группа токов $U(p,q)^X$ алгебраически порождается множеством элементов группы P^X и единственным элементом компактной группы K – элементом w; поэтому для продолжения представления группы P^X в пространстве L до представления группы $U(p,q)^X$ достаточно описать действие одного-единственного оператора $U(w)$. Из определения следует, что действие этого оператора задается формулой, аналогичной формуле для действия инволюции в представлении T группы $U(p,q)$.

Вывод

Таким образом, наше построение закончено: получено корректное (неунитарное) операторно неприводимое представление группы измеримых токов со значениями в группе $U(p,q)$ при произвольных натуральных p,q, где $q \geqslant p$, в квазипуассоновском предгильбертовом пространстве, причем операторы, отвечающие подгруппе токов группы Ивасавы, действуют ограниченными (всюду определенными) операторами, а инволюция определена, вообще говоря, лишь на всюду плотном подпространстве.

Дальнейшее изучение свойств этого и подобных ему представлений – дело будущего. Можно лишь ожидать, что это изучение приведет к значительному расширению средств и возможностей теории представлений.

Литература

1. H. Araki, *Factorizable representation of current algebra. Non commutative extension of the Lévy–Kinchin formula and cohomology of a solvable group with values in a Hilbert space.* — Publ. Res. Inst. Math. Sci. **5** (1969/1970), 361–422.
2. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Представления группы $SL(2,R)$, где R – кольцо функций.* — Успехи мат. наук **28**, вып. 5 (1973), 83–128.
3. А. М. Вершик, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, *Неприводимые представления группы G^X и когомологии.* — Функц. анал. и его прил. **8**, вып. 2 (1974), 67–69.
4. I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current groups.* — In: *Representations of Lie Groups and Lie Algebras*, A. A. Kirillov (ed.), Akad. Kiado, Budapest, 1985, pp. 121–179.
5. А. М. Вершик, С. И. Карпушев, *Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции.* — Мат. сб. **119**, вып. 4 (1982), 521–533.
6. R. S. Ismagilov, *Representations of Infinite-Dimensional Groups*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
7. K. R. Partasarathy, K. Schmidt, *Factorizable representations of current groups and the Araki–Woods embedding theorem.* — Acta Math. **128** (1972), 53–41.
8. A. Guichardet, *Sur le cohomology des groupes topologiques.* — Bull. Sci. Math. **98** (1974), 201–208.
9. P. Delorm, *1-cohomologie de représentations des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations.* — Bull. Soc. Math. France **105** (1977), 281–336.
10. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, D. Testard, A. Vershik, *Factorial representations of path groups.* — J. Funct. Anal. **51**, No. 1 (1983), 115–131.
11. А. М. Вершик, *Существует ли мера Лебега в бесконечномерном пространстве?* — Труды МИАН **259** (2007), 256–281.
12. A. Vershik, *Invariant measures for the continual Cartan subgroup.* — J. Funct. Anal. **255**, No. 9 (2008), 2661–2682.
13. M. I. Graev, A. M. Vershik, *The basic representation of the current group $O(n,1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure.* — Indag. Math. **16**, No. 3/4 (2005), 499–529.
14. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Представления группы токов группы $SO(n,1)$.* — Функц. анал. и его прил. **39**, вып. 2 (2005), 1–12.
15. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Специальные представления групп $SO(n,1)$ и $SU(n,1)$.* — Успехи мат. наук **61**, вып. 5 (2006), 3–88.
16. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные представления групп токов.* — Функц. анал. и его прил. **42**, вып. 1 (2008), 22–32.
17. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупрямых произведениях.* — Функц. анал. и его прил. **42**, вып. 4 (2008), 279–289.
18. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Интегральные модели унитарных представлений групп токов со значениями в полупростых группах Ли.* — Успехи мат. наук **64**, вып. 2(686) (2009), 5–72.

19. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Пуассонова модель фоковского пространства и представления групп токов.* — Алгебра и анализ **23**, вып. 3 (2011), 63–136.
20. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Особые представления групп $U(\infty,1)$ и $O(\infty,1)$ и связанные с ними представления групп токов $U(\infty,1)^X$ и $O(\infty,1)^X$ в квазипуассоновом пространстве.* — Функц. анал. и его прил. **46**, вып. 1 (2012), 1–10.
21. M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representation of the infinite-dimensional groups of rank one.* — Moscow Math. J. **12**, No. 3 (2012), 117–129.
22. M. I. Graev, A. M. Vershik, *Special representations of nilpotent Lie groups and the associated Poisson representations of current groups.* — Moscow Math. J. **13**, No. 2 (2013), 345–360.
23. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Когомологии в неунитарных представлениях полупростых групп Ли (группа $U(2,2)$).* — Функц. анал. и его прил. **48**, вып. 3 (2014), 1–13.
24. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Когомологии подгруппы Ивасавы групп $U(p,p)$ в неунитарных представлениях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **436** (2015), 112–121.
25. А. М. Вершик, М. И. Граев, *Особые представления подгруппы Ивасавы полупростой группы Ли.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **448** (2016), 96–106.

Vershik A. M., Graev M. I. Nonunitary representations of the groups of $U(p,q)$-currents for $q \geqslant p > 1$.

The purpose of this paper is to give a construction of representations of the group of currents for semisimple groups of rank greater than one. Such groups have no unitary representations in the Fock space, since the semisimple groups of this form have no nontrivial cohomology in faithful irreducible representations. Thus we first construct cohomology of the semisimple groups in nonunitary representations. The principal method is to reduce all constructions to Iwasawa subgroups (solvable subgroups of the semisimple groups), with subsequent extension to the original group. The resulting representation is realized in the so-called quasi-Poisson Hilbert space associated with natural measures on infinite-dimensional spaces.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия;
Институт проблем передачи
информации им. А. А. Харкевича РАН,
Москва, Россия
E-mail: avershik@gmail.com

Поступило 24 ноября 2017 г.