Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

А. А. Федотов

О МИНИМАЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ОДНОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ПОТЕНЦИАЛОМ $v(z) = e^{-2\pi iz}$

§1. Введение

В этой работе мы начинаем систематическое исследование решений модельного разностного уравнения

$$\psi(z+h) + \psi(z-h) + e^{-2\pi iz}\psi(z) = 2\cos(2\pi p)\psi(z) \qquad (1.1)$$

на комплексной плоскости переменной z. Здесь $h \in (0,1)$ и $p \in \mathbb{C}$ – параметры. В терминах преобразования Лапласа от нелинейной комбинации функций, родственных функциям Малюженца, нам удается построить минимальное целое решение – решение, обладающее минимальным возможным ростом при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$, и решения аналитические в верхней (нижней) полуплоскости и имеющие простое асимптотическое поведение при $\operatorname{Im} z \to \infty$ (соотв., $\operatorname{Im} z \to -\infty$). Мы исследуем свойства построенных решений. Неожиданным замечательным результатом является то, что минимальное целое решение удовлетворяет еще одному разностному уравнению

$$\psi(z+1) + \psi(z-1) + e^{-2\pi iz/h}\psi(z) = 2\cos(2\pi p/h)\psi(z), \quad z \in \mathbb{C}. \qquad (1.2)$$

Одномерные разностные уравнения с периодическими коэффициентами возникают в разных областях физики и в частности в теории дифракции и в физике твердого тела, см., например, [1] и [13]. Их богатые спектральные свойства привлекают и математиков и физиков.

Уравнение (1.1) интересно как разностное уравнение Шредингера с простейшим комплексным периодическим потенциалом. Кроме того, оно естественно возникает при построении минимальных целых решений разностных уравнений Шредингера

$$\psi(z+h) + \psi(z-h) + \lambda v(z)\,\psi(z) = E\psi \qquad (1.3)$$

Ключевые слова: разностные уравнения на комплексной плоскости, минимальные целые решения, уравнение монодромии.

Работа была выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00668-а.

с потенциалом v, являющимся нетривиальным тригонометрическим полиномом вещественным на вещественной оси, в случае малой константы связи λ и/или большого по абсолютной величине спектрального параметра E, см. [10, 3] и раздел 3.8.

Для разностных уравнений с периодическими коэффициентами решения с простым поведением на бесконечности и минимальные целые решения впервые были введены в рассмотрение в работе [4]. Ее результаты применимы для уравнений вида (1.3) только в случаях, когда $|v(z)| \to \infty$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$. В работе [8] авторы построили минимальные мероморфные решения Мэрилендского уравнения на оси – уравнения Шредингера с потенциалом $v(z) = \operatorname{ctg}(\pi z)$ (потенциал стремится к постоянным пределам при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$). В работе [9] этот результат был обобщен на случай потенциала, имеющего два полюса на периоде.

В работе [8] было установлено, что минимальное мероморфное решение Мэрилендского уравнения удовлетворяет еще и уравнению

$$\psi(z+1) + \psi(z-1) + \lambda_1 \operatorname{ctg}(\pi z/h)\psi(z) = E_1\psi(z)$$

с новыми параметрами λ_1 и E_1. До этого результат такого типа был установлен только для уравнения (1.3) с $v(z) = -2\,e^{i\pi h/2}\sin(\pi z)$ (т.е. для уравнение Харпера с нулевым спектральным параметром и константой связи $-e^{i\pi h/2}$), см. работу [6].

Отметим, что тот факт, что уравнение (1.1) имеет решение, удовлетворяющее еще и уравнению (1.2), означает, что для его решений имеются *перенормировочные* формулы, выражающие его решения в точках $\theta + hk$, где θ – вещественный параметр, а k пробегает $\mathbb{Z}$, через решения того же уравнения с новыми параметрами h_1 и p_1 вместо h и p в точках вида $\theta_1 + h_1 k_1$ с меньшими по модулю значениями целочисленной переменной k_1, см., [8]. Родственные перенормировочные формулы хорошо известны в теории Гауссовых экспоненциальных сумм, см.,например, [7].

Сначала в параграфе 2 мы сформулируем определение минимального целого решения для уравнения (1.1) и проверим, что оно удовлетворяет еще и уравнению (1.2). Минимальное решение и решения с простым поведением на бесконечности построены в параграфе 3 с помощью преобразования Лапласа от уже упоминавшихся специальных функций.

Благодаря четности косинуса мы можем и будем считать, что $\operatorname{Im} p \geqslant 0$.

§2. Минимальные целые решения

Функции $z \to \psi(z)$ и $z \to e^{2\pi iz/h}\psi(z)$ одновременно являются решениями уравнения (1.3), и из существования одного его целого решения следует, что существуют целые решения, сколь угодно быстро растущие при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$. Минимальные целые решения обладают минимальным ростом при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$. Для их определения нам потребуются несколько вспомогательных объектов.

2.1. Пространства решений. Перечислим некоторые известные элементарные свойства множества решений разностных уравнений вида (1.3). При этом, мы будем считать лишь, что v - произвольная заданная функция.

Пусть ψ и $\widetilde{\psi}$ – два решения (1.3). Легко видеть, что их *Вронскиан*

$$w(\psi(z), \widetilde{\psi}(z)) = \psi(z)\widetilde{\psi}(z-h) - \psi(z-h)\widetilde{\psi}(z) \tag{2.1}$$

является h-периодической функцией z.

Если Вронскиан не имеет нулей, то любое другое решение ϕ может быть представлено в виде

$$\phi(z) = a(z)\psi(z) + b(z)\widetilde{\psi}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

где a и b – h-периодические функции,

$$a(z) = \frac{w(\phi(z), \widetilde{\psi}(z))}{w(\psi(z), \widetilde{\psi}(z))}, \quad b(z) = \frac{w(\psi(z), \phi(z))}{w(\psi(z), \widetilde{\psi}(z))}. \tag{2.3}$$

2.2. Решения с простейшим поведением при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$**.** Минимальные решения уравнения (1.1) определяются в терминах решений, имеющих “простейшее” поведение при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$. Справедлива

Теорема 2.1. *При достаточно большом $Y_0 > 0$ у уравнения (1.1) существуют решения $u_\pm$, аналитические при $\operatorname{Im} z \geqslant Y_0$ и имеющие асимптотику*

$$u_\pm(z) = e^{\pm\frac{\pi i(z-1/2\pm h/2)^2}{h} + o(1)} \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im} z \to +\infty. \tag{2.4}$$

Она равномерна по $\operatorname{Re} z$ при $|\operatorname{Re} z| \leqslant X$, где $X > 0$ – любая наперед заданная константа. Решения $u_\pm$ являются Блоховскими в смысле *работы* [2], *т.е.* $u_\pm(z+1) = \alpha_\pm(z)u_\pm(z)$ *с* h*-периодическим множителями* $\alpha_\pm$.

Эта теорема является прямым следствием из более общего утверждения – Теоремы 1.1a из работы [4]. Мы предложим явную конструкцию для решений $u_\pm$ в разделе 3.

Теорема 2.2. *Предположим, что* $\operatorname{Im} p > 0$. *Существует такое* $Y_0 > 0$, *что при* $\operatorname{Im} z \leqslant -Y_0$ *у уравнения (1.1) существуют аналитические решения* $d_\pm$, *имеющие асимптотику*

$$d_\pm(z) = e^{\pm\frac{2\pi i p z}{h} + o(1)} \quad \textit{при} \quad \operatorname{Im} z \to -\infty. \tag{2.5}$$

Она равномерна по $\operatorname{Re} z$ *при* $|\operatorname{Re} z| \leqslant X$, *где* $X > 0$ *– наперед заданное число. Решения* $d_\pm$ *являются блоховскими в смысле работы* [2], *т.е.* $d_\pm(z+1) = \beta_\pm(z)d_\pm(z)$ *с* h*-периодическим множителями* $\beta_\pm$.

Эта теорема доказывается как Теорема 2 из работы [8]. Мы предложим явную конструкцию для решения $d_\pm$ в разделе 3.

Из (2.4) следует, что равномерно по $\operatorname{Re} z$

$$w(u_+, u_-) = -1 + o(1) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \to +\infty. \tag{2.6}$$

Поэтому, при достаточно большом Y решения $u_\pm$ образуют базис в пространстве решений аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z > Y$. Аналогично, равномерно по $\operatorname{Re} z$

$$w(d_+, d_-) = 2i\sin(2\pi p) + o(1) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \to -\infty, \tag{2.7}$$

и $d_\pm$ образуют базис в пространстве решений аналитических в полуплоскости $\operatorname{Im} z < -Y$ при достаточно большом Y.

Из асимптотик решений $u_\pm$ и $d_\pm$ вытекает, что для h-периодических функций $\alpha_\pm$ и $\beta_\pm$ справедливы равномерные по $\operatorname{Re} z$ асимптотические представления:

$$\alpha_\pm(z) = -e^{\pm 2\pi i z/h + o(1)}, \quad \operatorname{Im} z \to +\infty, \tag{2.8}$$

$$\beta_\pm(z) = e^{\pm 2\pi i p/h + o(1)}, \quad \operatorname{Im} z \to -\infty. \tag{2.9}$$

2.3. Минимальные целые решения. Здесь мы будем считать, что $\operatorname{Im} p > 0$. Пусть ψ – целое решение (1.1). Фиксируем достаточно большое $Y > 0$. Решение ψ допускает представления:

$$\psi(z) = A(z)\,u_+(z) + B(z)\,u_-(z), \quad \operatorname{Im} z > Y, \tag{2.10}$$

$$\psi(z) = C(z)\,d_+(z) + D(z)\,d_-(z), \quad \operatorname{Im} z < -Y, \tag{2.11}$$

с некоторыми h-периодическими коэффициентами A, B, C и D аналитическими в соответствующих полуплоскостях.

Целое решение ψ назовем минимальным, если коэффициенты A, B, C и D ограничены, а один из коэффициентов A и B стремится к нулю при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

Ниже для определенности мы обсуждаем только ψ_A – минимальное решение, для которого A стремится к нулю. Для минимального решения, для которого B стремится к нулю, анализ и результаты аналогичны.

Для решения ψ_A существуют конечные пределы

$$a_1 = \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} (e^{-2\pi i z/h} A(z)), \quad b_0 = \lim_{\operatorname{Im} z \to +\infty} B(z),$$
$$c_0 = \lim_{\operatorname{Im} z \to -\infty} C(z), \quad d_0 = \lim_{\operatorname{Im} z \to -\infty} D(z).$$

Мы будем называть их асимптотическими коэффициентами решения ψ_A.

В разделе 3.7 будет доказана теорема существования:

Теорема 2.3. *У уравнения (1.1) существует минимальное целое решение ψ_A, которое является целой функцией параметра p. Его асимптотические коэффициенты отличны от нуля при* $\operatorname{Im} p > 0$.

Замечание 2.1. Асимптотические коэффициенты ψ_A явно вычислены в последнем разделе работы. Они описываются формулами

$$a_1(p) = -e^{-\frac{2\pi i p^2}{h} - \frac{i\pi}{3h} - \frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi h}{3}}, \quad b_0(p) = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad c_0(p) = g(p), \quad d_0 = g(-p),$$
$$g(p) = e^{\frac{i\pi(p-1/2-h/2)^2}{h} - \frac{i\pi}{3h} - \frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi h}{3}} \sigma_{\pi h}(2\pi(2p - 1/2 - h/2)),$$

где σ_s – замечательная специальная функция, описанная в разделе 3.1. Как и эта функция, асимптотические коэффициенты c_0 и d_0 имеют нули и полюса на вещественной оси p. Последнее не противоречит тому, что ψ – целая функция p, так как при вещественных p решения $d_\pm$ не определены.

Здесь мы проверим теорему единственности:

Теорема 2.4. *Пусть асимптотические коэффициенты минимального целого решения ψ_A не равны нулю. Тогда, решение ψ_A определено однозначно с точностью до постоянного множителя.*

Эта теорема объясняет термин “минимальность”. Действительно, пусть ϕ – еще одно минимальное решение, для которого $A(+i\infty) =$

0. Тогда, согласно теореме, $\phi = \mathrm{Const}\psi_A$, и ясно, что если один из асимптотических коэффициентов ϕ равен нулю, то и Const, и ϕ равны нулю.

Для доказательства теоремы используется

Лемма 2.1.

$$w(\psi_A(z+1), \psi_A(z)) = -a_1 b_0 = -4c_0 d_0 \, \sin(2\pi p) \, \sin(2\pi p/h). \qquad (2.12)$$

Доказательство. Обозначим Вронскиан из леммы через $w(z)$. Очевидно, w – целая h-периодическая функция. Изучим асимптотики w при $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$. Напомним, что $u_\pm$ – блоховские решения, $u_\pm(z+1) = \alpha_\pm(z) u_\pm(z)$, а функции $\alpha_\pm$ h-периодичны. Из представления (2.10) вытекает, что

$$\psi_A(z+1) = A(z+1)\alpha_+(z)u_+(z) + B(z+1)\alpha_-(z)u_-(z).$$

Используя это представление, представление (2.10) и h-периодичность $\alpha_\pm$, A и B, убеждаемся, что

$$w(z) = w(u_+(z), u_-(z))(A(z+1)B(z)\,\alpha_+(z) - B(z+1)A(z)\,\alpha_-(z)).$$

Теперь из (2.6), определения асимптотических коэффициентов и (2.8) вытекает, что при $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$ $w(z)$ стремится к $-a_1 b_0$.

Аналогично проверяется, что при $\mathrm{Im}\, z \to -\infty$

$$\begin{aligned} w(z) &= w(d_+(z), d_-(z))(C(z+1)D(z)\,\beta_+(z) - D(z+1)C(z)\,\beta_-(z)) \\ &= -4c_0 d_0 \, \sin(2\pi p) \, \sin(2\pi p/h) + o(1). \end{aligned}$$

Так как исследуемый Вронскиан является целой периодической функцией z, то из его асимптотик при $\mathrm{Im}\, z \to \pm\infty$ вытекает, что он не зависит от z, и что выполнены оба равенства, объявленные в лемме. $\square$

Перейдем к доказательству Теоремы 2.4.

Доказательство. Предположим, что асимптотические коэффициенты решения ψ_A отличны от нуля. Пусть ϕ – еще одно минимальное решение, для которого $A(+i\infty) = 0$. Из доказанной леммы следует, что решения $z \to \psi(z)$ и $z \to \psi(z+1)$ образуют базис в пространстве решений уравнения (1.1). Поэтому ϕ допускает представление (2.2) с $\widetilde{\psi}(z) = \psi(z+1)$. Напомним, что коэффициенты в этом представлении описываются формулами (2.3). С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве Леммы 2.1, устанавливается, что Вронскиан $w(\phi(z),\widetilde{\psi}(z))$ не зависит от z, а $w(\psi(z),\phi(z))$ равен нулю. Отсюда и следует утверждение теоремы. □

Замечание 2.2. Поскольку, коэффициенты уравнения (1.1) 1-периодичны, то вместе с минимальными решениями, определенными выше, минимальными решениями можно называть и функции, получаемые из "старых" минимальных решений добавлением к их аргументам целого числа.

2.4. Второе разностное уравнение для минимального решения. Центральное свойство минимального решения ψ_A описывает

Теорема 2.5. *Если асимптотические коэффициенты минимального целого решения ψ_A отличны от нуля, то оно удовлетворяет уравнению* (1.2).

Поскольку у минимального решения, описанного в Теореме 2.3, асимптотические коэффициенты отличны от нуля при $\operatorname{Im} p > 0$, и поскольку это решение является целым по p, то оно удовлетворяет уравнению (1.2) для всех p.

Доказательство. Из Леммы 2.1 следует, что ψ и $\widetilde{\psi} = \psi(\,\cdot\,+1)$ образуют базис в пространстве решений уравнения (1.1). Функция $\phi = \psi(\,\cdot\,-1)$ тоже является решением этого уравнения, а значит, допускает представление (2.2) с периодическими коэффициентами, описываемыми (2.3). Так как Вронскиан $w(\psi(z+1),\psi(z))$ не зависит от z, см. Лемму 2.1, то коэффициент b в этом представлении тождественно равен -1, и для доказательства теоремы достаточно вычислить коэффициент a,

$$a(z) = \frac{w(\psi(z-1),\psi(z+1))}{w(\psi(z),\psi(z+1))}. \tag{2.13}$$

Знаменатель в этой формуле описывается Леммой 2.1. Обсудим Вронскиан в числителе. Обозначим его через w_1. Очевидно, w_1 является целой h-периодической функцией z. Рассуждая как при доказательстве Леммы 2.1, проверяем , что

$$w_1(z) = -a_1 b_0 e^{-2\pi i z/h}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \to +\infty,$$
$$w_1(z) = 4c_0 d_0 \sin(2\pi p)\sin(4\pi p/h) + o(1) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \to -\infty.$$

Из выписанных асимптотик для $w(\psi(z-1),\psi(z+1))$ и формул для $w(\psi(z+1),\psi(z))$ из Леммы 2.1 следует что

$$a(z)=\begin{cases}-e^{-2\pi iz/h}(1+o(1)), & \operatorname{Im} z\to+\infty,\\ 2\cos(2\pi p/h)+o(1), & \operatorname{Im} z\to-\infty.\end{cases}$$

Поскольку a является h-периодической целой функцией z, отсюда следует, что $a(z)=2\cos(2\pi p/h)-e^{-2\pi iz/h}$. Это завершает доказательство теоремы. □

§3. Построение решений уравнения (1.1)

В этом параграфе мы построим минимальные целые решения и решения, имеющие простейшее асимптотическое поведение вдали от вещественной оси.

3.1. σ-функция. Начнем с краткого описания специальной функции, используемой в наших конструкциях. Аналогичная функция была введена и систематически использовалась в теории дифракции [1]. Позже она возникала и исследовалась в других областях, см., напр., [5, 12] и [4]. Ниже мы используем последнюю работу.

3.1.1. Пусть $s\in(0,\pi)$. Спецфункция σ_s – решение разностного уравнения

$$\sigma_s(z+s)=(1+e^{-iz})\,\sigma_s(z-s), \tag{3.1}$$

аналитическое в полосе $S=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|\operatorname{Re} z|<\pi+s\}$, не имеющее в ней нулей и допускающее в S равномерные по $\operatorname{Re} z$ асимптотические представления

$$\sigma(z)=1+o(1),\quad \operatorname{Im} z\to-\infty, \tag{3.2}$$

$$\sigma(z)=e^{-\frac{iz^2}{4s}+\frac{i\pi^2}{12s}+\frac{is}{12}}(1+o(1)),\quad \operatorname{Im} z\to\infty. \tag{3.3}$$

Перечисленные свойства σ_s определяют ее однозначно.

3.1.2. Функция σ_s продолжается до мероморфной. Ее полюса оказываются расположенными в точках:

$$z=-(\pi+s+2\pi k+2sm),\quad k,m\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{3.4}$$

причем полюс $z=-\pi-s$ является простым. Отметим, что

$$\operatorname*{res}_{z=-\pi-s}\sigma_s(z)=\sqrt{\frac{s}{\pi}}\,e^{-\frac{i\pi^2}{12s}-\frac{is}{12}-\frac{i\pi}{4}}. \tag{3.5}$$

3.1.3. Функция σ_s удовлетворяет соотношению

$$\sigma_s(z) = e^{-\frac{iz^2}{4s}+\frac{i\pi^2}{12s}+\frac{is}{12}}\,\overline{\sigma_s(\overline{z})} \tag{3.6}$$

и еще одному уравнению

$$\sigma_s(z+\pi) = (1+e^{-i\pi z/s})\,\sigma_s(z-\pi). \tag{3.7}$$

3.1.4. Пусть δ и x – положительные числа. В нижней полуплоскости и вдоль вещественной оси вне δ-окрестности лучей $]-\infty,-\pi-s]$ и $[-\pi-s+x,\infty[$ справедлива оценка (сравните с (3.2) !)

$$\sigma(z) = e^{O(e^{-|\mathrm{Im}\, z|}(1+|z|))}, \qquad \mathrm{Im}\, z \leqslant 0. \tag{3.8}$$

В работе [11] в случае, когда s достаточно достаточно мало ($s<\pi/2$), для z, находящихся вне δ-окрестности лучей $]-\infty,-\pi]$ и $[\pi,\infty[$, доказана аналогичная оценка с поправочным членом $O(e^{-|\mathrm{Im}\, z|}(1+|\mathrm{Re}\, z|))$. Нацеленность работы [11] состояла в асимптотически точном описании свойств σ_s при малых s. Указанная нами оценка для $0<s<\pi$ тоже напрямую вытекает из приведенного в [11] доказательства.

Аналогичная (3.8) оценка для z в верхней полуплоскости вне δ-окрестности лучей $]-\infty,-\pi-s]$ и $[-\pi-s+x,\infty[$,

$$\sigma(z) = e^{-\frac{iz^2}{4s}+\frac{i\pi^2}{12s}+\frac{is}{12}+O(e^{-|\mathrm{Im}\, z|}(1+|z|))}, \quad \mathrm{Im}\, z \geqslant 0, \tag{3.9}$$

получается из (3.8) с помощью (3.6).

3.1.5. Фиксируем $\delta>0$ и $x>\delta$. В δ-окрестности луча $[-\pi-s+x,\infty[$

$$|\sigma_s(z)| \leqslant Ce^{C\,\mathrm{Re}\, z}, \tag{3.10}$$

где C обозначает положительную постоянную, которая зависит от δ и h.

Для доказательства оценки (3.10) нужно выразить $\sigma_s(z)$ через $\sigma_z(z')$ с ограниченной $\mathrm{Re}\, z'$ с помощью уравнения (3.1). Мы опустим элементарные детали.

3.2. Формальная конструкция решений. Положим

$$\psi(z) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int\limits_{\gamma} e^{\frac{2\pi i z k}{h}}\, v(k)\, dk, \tag{3.11}$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ – контур, который мы выберем позже. Будем считать, что v – функция аналитическая в достаточно большой окрестности γ, а интеграл в (3.11) хорошо сходится. Подставляя (3.11) в уравнение (1.1), мы видим, что ψ удовлетворяет этому уравнению, если

$$v(k+h) = 2(\cos(2\pi p) - \cos(2\pi k))\, v(k). \tag{3.12}$$

Чтобы построить решение (3.12), заметим, что

$$2(\cos(2\pi p) - \cos(2\pi k)) = -e^{2\pi i k}\,(1 - e^{-2\pi i(k-p)})\,(1 - e^{-2\pi i(k+p)}).$$

Поэтому можно выбрать

$$v(k) = e^{\frac{i\pi k^2}{h} - \frac{i\pi k}{h} - \pi i k}\, \sigma_{\pi h}(2\pi(k-p-\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{2}))\, \sigma_{\pi h}(2\pi(k+p-\tfrac{1}{2}-\tfrac{h}{2})). \tag{3.13}$$

Всюду ниже мы будем обозначать через C положительные постоянные, не зависящие от k и z, а запись $f = O(g)$ будет означать, что $|f| \leqslant C|g|$.

3.3. Свойства функции v.

3.3.1. *Полюса.* Из (3.13) и списка (3.4) всех полюсов σ_s следует, что полюса v расположены точках

$$k = \pm p - lh - m, \quad l, m = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{3.14}$$

3.3.2. *Оценки при* $|\mathrm{Im}\, k| > \mathrm{Im}\, p$. Фиксируем $\delta > 0$ и $K > 0$.

Пусть k находится в полуплоскости $\mathrm{Im}\,(k+p) \leqslant 0$ вне δ-окрестности лучей $R_-^d = -p+]-\infty, 0]$ и $R_+^d = -p + [K, \infty[$ соотвественно. Тогда из (3.8) следует, что

$$e^{\frac{2\pi i z k}{h}} v(k) = e^{-\frac{i\pi(z-1/2-h/2)^2}{h}}\, e^{\frac{i\pi(k+z-1/2-h/2)^2}{h} + O(e^{-2\pi|\mathrm{Im}\, k|}(1+|k|))}. \tag{3.15}$$

Пусть k находится в полуплоскости $\mathrm{Im}\,(k-p) \geqslant 0$ вне δ-окрестности лучей $R_-^u = p+]-\infty, 0]$ и $R_+^u = p + [K, \infty[$ соответственно. Используя (3.9), мы приходим к оценке

$$\begin{gathered} e^{\frac{2\pi i z k}{h}} v(k) = v_+ e^{\frac{i\pi(z+1/2+h/2)^2}{h}}\, e^{-\frac{\pi i(k-z-1/2-h/2)^2}{h} + O(e^{-2\pi|\mathrm{Im}\, k|}(1+|k|))}, \\ v_+ = -e^{-\frac{2\pi i p^2}{h} - \frac{i\pi}{3h} - \frac{i\pi h}{3}}. \end{gathered} \tag{3.16}$$

3.3.3. *Поведение "около" вещественной оси.* Фиксируем $\delta > 0$ и $K > 0$. Пусть $\operatorname{Im} p > \delta$.

Пусть k находится в полосе $|\operatorname{Im} k| \leqslant \operatorname{Im} p$ вне δ-окрестности лучей $R_\pm^d$ и $R_\pm^u$. Из формул (3.8) и (3.9) вытекает представление

$$e^{\frac{2\pi i z k}{h}} v(k) = v_0 e^{\frac{2\pi i k(z-p)}{h} + O(1+|k|)},\qquad v_0 = e^{-\frac{i\pi(p-1/2-h/2)^2}{h} + \frac{i\pi}{12h} + \frac{i\pi h}{12}}. \tag{3.17}$$

3.3.4. *Поведение вдоль лучей* $\pm p +]0,\infty[$. Пусть $\delta > 0$ и $K > \delta$. Пусть $\operatorname{Im} p > \delta$. Предположим, что k находится в δ-окрестности луча R_+^d. Используя (3.8) и (3.10), мы проверяем, что

$$\left| e^{\frac{2\pi i z k}{h}} v(k) \right| \leqslant C \left| e^{-\frac{i\pi(z-1/2-h/2)^2}{h}}\, e^{\frac{i\pi(k+z-1/2-h/2)^2}{h}} \right| e^{C \operatorname{Re} k}. \tag{3.18}$$

Если k находится в δ-окрестности луча R_+^u, то с помощью (3.10) и (3.9) проверяется, что

$$\left| e^{\frac{2\pi i z k}{h}} v(k) \right| \leqslant C \left| e^{\frac{2\pi i k z}{h}} \right| e^{C \operatorname{Re} k}. \tag{3.19}$$

3.4. Построение решений.

3.4.1. *Построение минимального целого решения.* Пусть $\gamma_0 \subset \mathbb{C}$ – гладкая кривая которая идет из бесконечности снизу верх вдоль прямой $e^{i\pi/4}\mathbb{R}$, затем обходит полюса v справа, и наконец уходит на бесконечность наверх вдоль прямой $e^{3i\pi/4}\mathbb{R}$. Справедлива

Лемма 3.1. *Пусть в формуле* (3.11) $\gamma = \gamma_0$. *Тогда интеграл в этой формуле сходится, и она определяет целое решение, обозначим его через* ψ_0, *уравнения* (1.1). *Решение* ψ_0 *является целой четной функцией параметра* p.

Доказательство. Утверждения о сходимости интеграла и аналитичности ψ_0 легко устанавливается с помощью оценок (3.15) и (3.16). Четность ψ_0 по p очевидна из (3.13). □

В параграфе 3.7 мы проверим, что ψ является минимальным целым решением уравнения (1.1).

Замечание 3.1. С помощью уравнения (3.7) можно напрямую убедиться, что функция ψ удовлетворяет второму разностному уравнению (1.2).

3.4.2. *Решения аналитические в верхней полуплоскости.* Фиксируем $\delta > 0$. Будем считать, что $\operatorname{Im} p > \delta$. Пусть $\gamma_-^u \subset \mathbb{C}$ – гладкая кривая, которая приходит из бесконечности снизу верх вдоль прямой $e^{i\pi/4}\,\mathbb{R}$ и, обойдя полюса v справа, уходит на бесконечность направо вдоль прямой $\operatorname{Im} k = -\operatorname{Im} p + \delta$.

Пусть $\gamma_+^u \subset \mathbb{C}$ – гладкая кривая, которая приходит из бесконечности справа налево вдоль прямой $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} p - \delta$ и, обходя полюса v справа, уходит на бесконечность наверх вдоль прямой $e^{3i\pi/4}\,\mathbb{R}$. Имеет место

Лемма 3.2. *Фиксируем* $\delta > 0$. *Будем считать, что* $\operatorname{Im} p > \delta$. *Если* Y_0 *достаточно велико, а* $\operatorname{Im} z > Y_0$, *то при* $\gamma = \gamma_\pm^u$ *интеграл в формуле* (3.11) *абсолютно сходится, а формула определяет два решения уравнения* (1.1), *обозначим их через* $\widetilde{u}_\pm$, *аналитические по* z.

Абсолютная сходимость интеграла и аналитичность решений проверяются с помощью оценок (3.15), (3.16) и (3.17). Мы опустим элементарные детали.

В разделе 3.6 мы проверим, что решения $\widetilde{u}_\pm$ отличаются от решений $u_\pm$ из Теоремы 2.1 лишь множителями.

3.4.3. *Решения аналитические в нижней полуплоскости.* Фиксируем $\delta > 0$. Будем считать, что $\operatorname{Im} p > \delta$. Напомним, что полюса v расположены на лучах $l_\pm(p) = \pm p -]-\infty, 0]$.

Пусть $\gamma_+^d \subset \mathbb{C}$ – гладкая кривая, которая идет из бесконечности слева направо вдоль прямой $\operatorname{Im} k = \operatorname{Im} p - \delta$, затем обходит луч l_+ справа и уходит на бесконечность наверх вдоль прямой $e^{3\pi i/4}\,\mathbb{R}$.

Пусть $\gamma_-^d \subset \mathbb{C}$ – гладкая кривая, которая идет из бесконечности снизу вверх вдоль прямой $e^{i\pi/4}\,\mathbb{R}$, затем обходит луч l_- справа и уходит на бесконечность налево вдоль прямой $\operatorname{Im} k = -\operatorname{Im} p + \delta$. Имеет место

Лемма 3.3. *Фиксируем* $\delta > 0$. *Будем считать, что* $\operatorname{Im} p > \delta$. *Если* Y_0 *достаточно велико, а* $\operatorname{Im} z < -Y_0$, *то при* $\gamma = \gamma_\pm^d$ *интеграл в формуле* (3.11) *абсолютно сходится, а формула определяет два решения уравнения* (1.1), *обозначим их через* $\widetilde{d}_\pm$, *аналитические по* z.

Эта лемма легко доказывается с помощью оценок (3.15), (3.16) и (3.17). В разделе 3.5 мы проверим, что решения $\widetilde{d}_\pm$ отличаются от решений $d_\pm$ из Теоремы 2.2 лишь h-периодическими множителями.

3.4.4. *Соотношения между решениями.* Будем считать, что $\operatorname{Im} p > 0$. Тогда все построенные решения ψ, $\widetilde{d}_\pm$ и $\widetilde{u}_\pm$ существуют. Из конструкции решений вытекают следующие соотношения между ними. Если Y достаточно велико, а $\operatorname{Im} z > Y$, то одновременно определены ψ и $\widetilde{u}_\pm$, и

$$\psi(z) = \widetilde{u}_+(z) + \widetilde{u}_-(z), \qquad \operatorname{Im} z > Y. \tag{3.20}$$

Если Y достаточно велико, а $\operatorname{Im} z < -Y$, то одновременно определены ψ и $\widetilde{d}_\pm$, и

$$\psi(z) = \widetilde{d}_+(z) + \widetilde{d}_-(z), \qquad \operatorname{Im} z < -Y. \tag{3.21}$$

3.5. Решения с простейшим поведением при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. Здесь мы обсуждаем решения $\widetilde{d}_+$ и d_+. Начнем с доказательства леммы.

Лемма 3.4. *Фиксируем $X, \delta > 0$. Пусть $\operatorname{Im} p > \delta$. Справедливы асимптотические представления:*

$$\begin{gathered} \widetilde{d}_\pm(z) = g(\pm p)\, e^{\pm 2\pi i p z/h}\,(1 + o(1)), \quad \operatorname{Im} z \to -\infty, \\ g(p) = e^{\frac{i\pi(p-1/2-h/2)^2}{h} - \frac{i\pi}{3h} - \frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi h}{3}} \sigma_{\pi h}(2\pi(2p - 1/2 - h/2)). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Эти представления равномерны по $\operatorname{Re} z$ при $|\operatorname{Re} z| \leqslant X$.

Доказательство. Мы выведем только представление для $\widetilde{d}_-$. Представление для $\widetilde{d}_+$ получается аналогично. Будем считать, что $\operatorname{Im} p > \delta$, $|\operatorname{Re} z| \leqslant X$ и $-\operatorname{Im} z$ достаточно велика.

Обозначим через $\gamma(k, \delta)$ кривую, которая идет параллельно вещественной оси слева направо из бесконечности до точки $k - i\delta$, потом из этой точки до точки $k + i\delta$ параллельно мнимой оси и, наконец, уходит из точки $k + i\delta$ налево параллельно вещественной оси на бесконечность.

Оценка (3.15) позволяет продеформировать кривую γ_- к кривой $\gamma(-p + \delta, \delta)$. Пусть $q \in]0, 1[$. Применяя после деформации теорему о вычетах, получим

$$\widetilde{d}_-(z) = \frac{2\pi i}{\sqrt{h}} \operatorname*{res}_{k=-p} v(k)\, e^{-2\pi i p z/h} + \frac{1}{\sqrt{h}} \int\limits_{\gamma(-p-qh,\delta)} e^{2\pi i k z/h} v(k)\, dk. \tag{3.23}$$

С учетом (3.13) и (3.5) первое слагаемое в правой части равно $g(-p)\, e^{-2\pi i p z/h}$. Для завершения доказательства нам остается оценить второе слагаемое.

Сначала предположим, что k находится на нижней части контура, т.е. $k=-p-i\delta-qh+x,\ x\leqslant 0$. С помощью (3.15) мы получаем оценки

$$\begin{aligned}|e^{\frac{2\pi izk}{h}}v(k)| &= |e^{\frac{i\pi}{h}(k^2+2k(z-1/2-h/2))+O(1+|k|)}| \\ &\leqslant C|e^{\frac{i\pi}{h}(-2x(p+i\delta+qh)-2(p+i\delta+qh)z+2xz)+O(1+|x|)}| \\ &\leqslant C|e^{-\frac{2\pi ipz}{h}-2\pi iqz}\,e^{\frac{2\pi x(\operatorname{Im}(p-z)+\delta)}{h}+O(1+|x|)}|,\end{aligned} \tag{3.24}$$

где на последнем шаге мы воспользовались ограниченностью $\operatorname{Re} z$.

Аналогично, на левой части контура, т.е. при $k=-p-qh+it$, $-\delta\leqslant t\leqslant\delta$,

$$\begin{aligned}|e^{\frac{2\pi izk}{h}}v(k)| &\leqslant C\,|e^{\frac{i\pi}{h}(k^2+2k(z-1/2-h/2))}| \\ &\leqslant C|e^{\frac{i\pi}{h}(-2(p+qh)z+2itz)}| \\ &\leqslant C|e^{-\frac{2\pi ipz}{h}-2q\pi iz}|.\end{aligned} \tag{3.25}$$

Наконец, предположим, что k находится на верхней части контура, т.е. $k=-p+i\delta-qh+x,\ x\leqslant 0$. С помощью (3.17) мы убеждаемся, что

$$\begin{aligned}|e^{\frac{2\pi izk}{h}}v(k)| &= |v_0e^{\frac{2\pi ik(z-p)}{h}+O(1+|k|)}| \\ &\leqslant C|e^{-\frac{2\pi ipz}{h}-2\pi iqz}\,e^{\frac{2\pi x(\operatorname{Im}(p-z)+\delta)}{h}+O(1+|x|)}|.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Из оценок (3.24)–(3.26) следует, что $\widetilde{d}_-$ допускает представление (3.22) равномерно по $\operatorname{Re} z$ при $|\operatorname{Re} z|\leqslant X$. □

Обсудим связь между решениями $\widetilde{d}_\pm$ и $d_\pm$.

Лемма 3.5. *Пусть* $\operatorname{Im} p>0$. *При достаточно большом* Y *и* $\operatorname{Im} z<-Y$,

$$\widetilde{d}_+(z)=C(z)d_+(z),\qquad \widetilde{d}_-(z)=D(z)d_-(z), \tag{3.27}$$

где C *и* D *– аналитические* h*-периодические функции такие, что*

$$C(z)=g(p)+o(1),\quad D(z)=g(-p)+o(1),\qquad \operatorname{Im} z\to-\infty. \tag{3.28}$$

Доказательство. Докажем лемму для решений $\widetilde{d}_+$. Для $\widetilde{d}_-$ доказательство аналогично. Пусть $\operatorname{Im} p>0$. Согласно результатам раздела 2.1, при достаточно большом Y и $-\operatorname{Im} z>Y$

$$\widetilde{d}_+(z)=C(z)d_+(z)+\widehat{C}(z)d_-(z),$$

$$C(z)=\frac{w(\widetilde{d}_+(z),d_-(z))}{w(d_+(z),d_-(z))},\quad \widehat{C}(z)=\frac{w(d_+(z),\widetilde{d}_+(z))}{w(d_+(z),d_-(z))},$$

где C и $\widehat{C}$ – h-периодические функции.

Фиксируем $X > 0$. Используя асимптотики $\widetilde{d}_+(z)$ и $d_-(z)$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$, см. (3.22) и (2.5), получаем

$$C(z) = g(p) + o(1), \qquad \operatorname{Im} z \to -\infty.$$

Эта асимптотика равномерна по $\operatorname{Re} z$, так как $z \mapsto C(z)$ – h-периодическая функция.

Для завершения доказательства осталось проверить, что $\widehat{C} \equiv 0$.

Покажем, что $\widetilde{d}_+(z) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. При построении решения $\widetilde{d}_+$ мы проверяли, что интеграл в формуле

$$\widetilde{d}_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \int\limits_{\gamma_+} e^{\frac{2\pi i z k}{h}}\, v(k)\, dk$$

сходится абсолютно при $\operatorname{Im} p > 0$ и достаточно больших значениях $-\operatorname{Im} z$. Очевидно,

$$|e^{\frac{2\pi i z k}{h}}| = e^{\frac{-2\pi \operatorname{Im} z \operatorname{Re} k}{h}}\, e^{\frac{-2\pi \operatorname{Re} z \operatorname{Im} k}{h}}.$$

На контуре γ_+ $\operatorname{Im} k > 0$. Поэтому второй сомножитель убывает при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Отсюда следует убывание $\widetilde{d}_+(z)$ при $\operatorname{Re} z \to +\infty$.

То, что и $d_+(z)$ убывает при $\operatorname{Re} z \to +\infty$ (и достаточно большой $\operatorname{Im} z$) легко устанавливается с помощью соотношения

$$d_+(z+1) = \beta_+(z) d_+(z)$$

с h-периодической функцией β_+ (блоховость d_+), допускающей представление (2.9).

Из этих наблюдений следует, что Вронскиан $w(d_+(z), \widetilde{d}_+(z))$ – периодическая функция с периодом h – стремится к нулю при $\operatorname{Re} z \to +\infty$, а значит, является тождественным нулем. Отсюда вытекает утверждение леммы. $\square$

3.6. Решения с простейшим поведением при $\operatorname{Im} z \to +\infty$**.** Здесь мы обсудим решения $\widetilde{u}_\pm$ и их связь с решениями $u_\pm$. Начнем с описания асимптотик $\widetilde{u}_\pm$ при $\operatorname{Im} z \to +\infty$.

Предложение 3.1. *Пусть δ, P, $X > 0$. Предположим, что* $\operatorname{Im} p > \delta$, $|\operatorname{Re} p| \leqslant P$ *и* $|\operatorname{Re} z| \leqslant X$. *При* $\operatorname{Im} z \to +\infty$ *справедливы равномерные* *асимптотические представления:*

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_+ &= v_+(p)\, e^{\frac{i\pi}{h}(z+1/2+h/2)^2+\frac{3\pi i}{4}}(1+o(1)), \\ \widetilde{u}_- &= e^{-\frac{i\pi}{h}\,(z-1/2-h/2)^2+\frac{i\pi}{4}}(1+o(1)). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Доказательство. Опишем вывод представления для $\widetilde{u}_-$. Он основан на идеях метода перевала. Для второго решения анализ проводится аналогично. Ниже мы считаем выполненными условия леммы с δ, P и X, а мнимую часть z – достаточно большой.

Напомним, что решение $\widetilde{u}_-$ определяется формулой (3.11) с контуром $\gamma=\gamma_-$. Согласно (3.15) поведение подынтегрального выражения при $\mathrm{Im}\,(k+p)<0$ определяется экспонентой

$$E_-(k)=e^{\frac{i\pi}{h}(k-k_-(z))^2}, \quad \text{где} \quad k_-(z)=-z+\tfrac{1}{2}+\tfrac{h}{2}. \tag{3.30}$$

Вдоль прямой $k_-(z)+e^{\pi i/4}]-\infty,\infty[$ экспонента $E_-(k)$ убывает с ростом $|k-k_-(z)|$ быстрее всего.

Пусть $\xi\in\mathbb{C}$ и $\mathrm{Im}\,\xi>\mathrm{Im}\,k_-(z)=-\mathrm{Im}\,z$. Тогда при $t\in\mathbb{R}$

$$|E_-(\xi+t)|=|E_-(\xi)|e^{-2\pi t\mathrm{Im}\,(\xi-k_-(z))/h}=|E_-(\xi)|e^{-2\pi t\mathrm{Im}\,(\xi+z)/h} \tag{3.31}$$

экспоненциально убывает с ростом t.

Пусть ξ – такая точка прямой $k_-(z)+e^{\pi i/4}]-\infty,\infty[$, что $\mathrm{Im}\,\xi=\mathrm{Im}\,k_-(z)/2=-\mathrm{Im}\,z/2$. Для доказательства Предложения 3.1 мы продеформируем контур интегрирования в определении $\widetilde{u}_-$ к кривой, состоящей из двух участков:

$$\gamma_1=e^{\pi i/4}]-\infty,\xi[\quad \text{и} \quad \gamma_2=\xi+[0,\infty[.$$

Сходимость интегралов от $e^{\frac{2\pi izk}{h}}v\,(k)$ по $\gamma_{1,2}$ и возможность деформации вытекают из формул (3.30) и (3.31) и оценок (3.15) и (3.18).

Изучим вклады этих участков в решение $\widetilde{u}_-$. С помощью (3.30), (3.31) и (3.15) легко устанавливается, что при $\mathrm{Im}\,z\to+\infty$

$$\int\limits_{\gamma_1} e^{\frac{2\pi ikz}{h}}v(k)\,dk=e^{-\frac{i\pi(z-1/2-h/2)^2}{h}}\int\limits_{\gamma_1}E_-(k)(1+o(1))\,dk,$$

$$\int\limits_{\gamma_2} e^{\frac{2\pi ikz}{h}}v(k)\,dk=e^{-\frac{i\pi(z-1/2-h/2)^2}{h}}|E_-(\xi)|\int\limits_0^\infty O\left(e^{-\pi t\mathrm{Im}\,z/h+O(t)}\right)\,dt.$$

В первой из этих формул поправка $o(1)$ оценена равномерно по $k\in\gamma_1$. Эти оценки ведут к асимптотике для $\widetilde{u}_-$ из (3.29). Мы опустим элементарные вычисления. $\square$

Теперь обсудим связи между $\widetilde{u}_{\pm}$ и $u_{\pm}$. Справедлива

Лемма 3.6. *Пусть* $\operatorname{Im} p > 0$. *При достаточно большом* Y *и* $\operatorname{Im} z > Y$,

$$\widetilde{u}_{+}(z) = e^{\frac{2\pi i z}{h}} A_1(z) u_{+}(z), \qquad \widetilde{u}_{-}(z) = B(z) u_{-}(z), \tag{3.32}$$

где A_1 *и* B *– аналитические и* h*-периодические функции, допускающие представления*

$$A_1(z) = v_{+}(p) e^{-\frac{i\pi}{4} + o(1)}, \quad B(z) = e^{\frac{i\pi}{4} + o(1)}, \qquad \operatorname{Im} z \to -\infty. \tag{3.33}$$

Доказательство этого утверждения полностью параллельно доказательству Леммы 3.5, и мы его опустим.

3.7. Свойства решения ψ**.** Здесь мы наконец проверим, что ψ – минимальное целое решение (1.1). Ниже считается, что $\operatorname{Im} p > 0$.

При достаточно большом Y и $\operatorname{Im} z > Y$ одновременно применимы формулы (3.20) и (3.32), и можно написать

$$\psi(z) = e^{\frac{2\pi i z}{h}} A_1(z) u_{+}(z) + B(z) u_{-}(z), \tag{3.34}$$

где A_1 и B – h-периодические коэффициенты, описанные в Лемме 3.6
.

С другой стороны, при достаточно большом Y и $\operatorname{Im} z < -Y$ одновременно применимы формулы (3.21) и (3.27), и можно написать

$$\psi(z) = C(z) d_{+}(z) + D(z) d_{-}(z), \tag{3.35}$$

где C и D – h-периодические функции, описанные в Лемме 3.5.

Поскольку коэффициенты A_1 и B ограничены при $\operatorname{Im} z \to +\infty$, а C и D ограничены при $\operatorname{Im} z \to -\infty$, то из выписанных представлений следует, что ψ – минимальное решение ψ_A, см. раздел 2.3. А из (3.33) и (3.28) следует, что асимптотические коэффициенты решения ψ_A даются формулами

$$a_1(p) = v_{+}(p) e^{-\frac{i\pi}{4}}, \quad b_0(p) = e^{\frac{i\pi}{4}}, \quad c_0(p) = g(p), \quad d_0 = g(-p), \tag{3.36}$$

где функции v_{+} и g определены формулами в (3.16) и (3.22) соответственно. Это обосновывает Замечание 2.1.

Из формул (3.36) следует, что асимптотические коэффициенты решения ψ_A не обращаются в нуль при $\operatorname{Im} p > 0$. Это завершает доказательство Теоремы 2.3.

3.8. Историческое замечание. Исследование решения ψ_A было инспирировано работами [3] и [9]. Кострукция этого решения и его асимптотические свойства при $|\mathrm{Im}\, z| \to \infty$ впервые потребовались В. С. Буслаеву и мне для работы [3]. Связь ψ_A с решениями $u_\pm$ и $d_\pm$, его минимальность и вытекающие из нее свойства ранее не обсуждались.

Литература

1. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции.* Санкт-Петербургский государственный Университет, 2004.
2. В. С. Буслаев, А. А. Федотов *Блоховские решения разностных уравнений.* — Алгебра и Анализ **7**, No. 4 (1995), 74–122.
3. V. Buslaev, A. Fedotov, *Spectral properties of the monodromy matrix for Harper equation.* — In: Journées Équations aux dérivées partielles, 1–11, 1996.
4. V. Buslaev, A. Fedotov, *On the difference equations with periodic coefficients.* — Advances in Theor. and Math. Physics **5**, No. 6 (2001), 1105–1168.
5. L. Faddeev, R. Kashaev and A. Volkov, *Strongly coupled quantum discrete Liouville theory.I Algebraic approach and duality.* — Commun. Math. Phys. **219**, (2001), 199–219.
6. A. Fedotov, F. Klopp, *Pointwise Existence of the Lyapunov Exponent for a Quasiperiodic Equation.* — In: Mathematical results in quantum mechanics. Eds: Ingrid Beltita, Gheorghe Nenciu & Radu Purice. World Sci. Pub., 55–66, 2008.
7. A. Fedotov, F. Klopp, *An exact renormalization formula for Gaussian exponential sums and applications.* — Amer. J. Math. **134**, No. 3 (2012), 711–748.
8. A. Fedotov, F. Sandomirskiy, *An exact renormalization formula for the Maryland model.* — Commun. Math. Phys. **334**, No. 2 (2015), 1083–1099.
9. А. А. Федотов, *Монодромизация и разностные уравнения с мероморфными периодическими коэффициентами.* — Функ. анализ и его прилож. **52**, No. 1, 2018.
10. А. А. Федотов, *Матрица монодромии для уравнения Почти-Матье с малой константой связи.* — Представлено в журнал *Функциональный анализ и его приложения* в 2017 г.
11. А. А. Федотов, *Квазиклассические асимптотики функций Малюжинца.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **451** (2016), 178–187.
12. S. Ruijsenaars, *On Barnes multiple zeta and gamma functions.* — Adv. Math. **156** (2000), 107–132.
13. M. Wilkinson, *Critical properties of electron eigenstates in incommensurate systems.* — Phys. D **21** (1986), 341–354.

Fedotov A. A. On minimal entire solutions of the one-dimensional difference Schrödinger equation with the potential $v(z) = e^{-2\pi i z}$.

Let $z \in \mathbb{C}$ be the complex variable, and let $h \in (0,1)$ and $p \in \mathbb{C}$ be parameters. For the equation

$$\psi(z+h)+\psi(z-h)+e^{-2\pi i z}\psi(z)=2\cos(2\pi p)\psi(z),$$

we study its entire solutions that have the minimal possible growth both as $\operatorname{Im} z \to +\infty$ and as $\operatorname{Im} z \to -\infty$. In particular, we showed that they satisfy one more difference equation :

$$\psi(z+1)+\psi(z-1)+e^{-2\pi i z/h}\psi(z)=2\cos(2\pi p/h)\psi(z).$$

Ст.-Петербургский
государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия
E-mail: a.fedotov@spbu.ru

Поступило 13 ноября 2017 г.