Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

О. В. Сарафанов

АСИМПТОТИКА РЕЗОНАНСНОГО ТУННЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ ВЫСОКОЙ ЭНЕРГИИ В ДВУМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ВОЛНОВОДАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

§1. Введение

В последнее время активно ведется исследование резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения [1–5] в связи с приложениями в наноэлектронике [6–8]. Полученные результаты подытожены в монографии [9], там же описаны схемы некоторых устройств, основанных на эффекте резонансного туннелирования. В [9] была выведена асимптотика многоканального резонансного туннелирования в случае простого собственного числа резонатора. В продолжение этой тематики, настоящая работа посвящена асимптотическому исследованию многоканального резонансного туннелирования, когда собственное число резонатора вырожденное. Такая ситуация может возникать при достаточно высоких энергиях.

Рассматривается волновод на плоскости, представляющий собой полосу с двумя одинаковыми сужениями малого диаметра ε. Предполагается, что при $\varepsilon \to 0$ окрестность каждого сужения трансформируется в окрестность вершины двойного угла. При этом волновод распадается на три части – одну ограниченную, которая играет роль резонатора, и две неограниченных. Волновая функция электрона удовлетворяет задаче Дирихле для уравнения Гельмгольца, спектральный параметр меняется в окрестности некоторого вырожденного собственного числа резонатора. Считаем, что область изменения спектрального параметра не содержит порогов, другими словами, число каналов рассеяния остается постоянным. Цель работы – описать асимптотику коэффициента прохождения при указанных значениях спектрального параметра.

Ключевые слова: квантовый волновод, переменное сечение, уравнение Гельмгольца, резонансное туннелирование, асимптотическое описание.

Работа поддержана грантом РНФ 17-11-01126.

Как известно [9], в окрестности простого собственного числа резонатора график коэффициента прохождения имеет острый пик при некотором “резонансном” значении энергии, которое при стремлении диаметра сужений к нулю приближается к собственному числу резонатора. В случае вырожденного собственного числа главный член асимптотики коэффициента прохождения имеет два пика с таким же поведением. При уточнении асимптотики можно выявить еще несколько пиков малой высоты, количество всех возможных пиков совпадает с кратностью собственного числа резонатора. В данной работе мы подобным уточнением не занимаемся. Мы выводим главный член асимптотики, находим положение резонансных пиков, их высоту и ширину на половине высоты. Для этого строится асимптотика волновой функции, исследование которой дает требуемые асимптотические формулы для коэффициента прохождения. Асимптотика коэффициента прохождения имеет вид

$$T(k^2,\varepsilon) = \frac{P\varepsilon^{4\pi/\omega}(k^2-k_e^2)^2}{[(k^2-k_1^2)^2+Q_1\varepsilon^{4\pi/\omega}]\,[(k^2-k_2^2)^2+Q_2\varepsilon^{4\omega}]}(1+O(\varepsilon^\tau)),$$

где k^2 – спектральный параметр, k_e^2 – собственное число резонатора,

$$k_j^2 = k_e^2 - \Lambda_j\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega+\tau}), \quad j=1,2;$$

постоянные ω, P, Q_j и Λ_j положительны, они зависят только от геометрии волновода и подлежат вычислению; τ – некоторое положительное число. Отметим, что при $k=k_e$ старший член асимптотики обращается в ноль, то есть происходит резонансное отражение, чего не наблюдалось в случае, когда собственное число резонатора простое.

В §2 содержится постановка задачи. В §3 введены предельные задачи и описаны специальные решения этих задач, необходимые для построения асимптотики. Вывод асимптотических формул проведен в §4.

§2. Постановка задачи

Чтобы описать волновод, введём вспомогательные области G и Ω. Область G – это полоса ширины L,

$$G = \Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\big|\; x\in\mathbb{R}; y\in\Big(-L/2, L/2\Big)\Big\}.$$

Теперь определим Ω. Обозначим через K двойной угол раствора ω с вершиной в начале координат O. Будем считать, что K симметричен относительно координатных осей и содержит ось x (за исключением точки O). Пусть Ω содержит K вместе с некоторой окрестностью его вершины и совпадает с ним вне круга достаточно большого радиуса. Граница $\partial\Omega$ предполагается гладкой.

Опишем область $G(\varepsilon)$, занимаемую волноводом. Обозначим через $\Omega(\varepsilon)$ область, полученную из Ω сжатием в ε^{-1} раз,

$$\Omega(\varepsilon) = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\varepsilon^{-1}x, \varepsilon^{-1}y) \in \Omega\Big\}.$$

Пусть O_1, O_2 – точки полосы G, расположенные на оси t, и пусть K_j и $\Omega_j(\varepsilon)$ получаются из K и $\Omega(\varepsilon)$ сдвигом начала координат в точку O_j. Положим

$$G(\varepsilon) = G \cap \Omega_1(\varepsilon) \cap \Omega_2(\varepsilon).$$

В области $G(\varepsilon)$ рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)u(x, y; \varepsilon) = 0, &\quad (x, y) \in G(\varepsilon); \\ u(x, y; \varepsilon) = 0, &\quad (x, y) \in \partial G(\varepsilon). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть волновое число k^2 удовлетворяет условию $(M\pi/L)^2 < k^2 < ((M+1)\pi/L)^2$. Тогда в каждом выходе на бесконечность волновода $G(\varepsilon)$ может распространяться M волн $U_m(x, y) = e^{i\nu_m x}\Psi_m(y)$, идущих слева направо, и M волн $U_{M+m}(x, y) = e^{-i\nu_m x}\Psi_m(y)$, идущих справа налево, где

$$\nu_m = \sqrt{k^2 - (m\pi/L)^2},\ \Psi_m(y) = (L\nu_m)^{-1/2}\cos\big(m\pi y/L\big),\ m = 1, \dots, M.$$

Известно [10], что базис в пространстве ограниченных решений задачи (2.1) составляют функции u_p, $p = 1, \dots, 2M$, удовлетворяющие условиям излучения

$$u_m(y, t) = \begin{cases} U_m(y, t) + \sum\limits_{q=1}^{M} S_{mq}\, U_q(y, t) + O(e^{\delta t}), & t \to -\infty, \\ \sum\limits_{q=1}^{M} S_{m, M+q}\, U_{M+q}(y, t) + O(e^{-\delta t}), & t \to +\infty; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u_{M+m}(y, t) = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{M} S_{M+m, q}\, U_q(y, t) + O(e^{\delta t}), & t \to -\infty, \\ U_{M+m}(y, t) + \sum\limits_{q=1}^{M} S_{M+m, M+q} U_{M+q}(y, t) + O(e^{-\delta t}), & t \to +\infty, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$m = 1, \dots, M$$

Матрица рассеяния $S = \|S_{pq}\|_{p,q=1,\dots,2M}$ симметрична и унитарна. Величина

$$R_m = \sum_{q=1}^{M} |S_{mq}|^2, \qquad m = 1, \dots, M,$$

называется коэффициентом отражения для волны U_m, приходящей в $G(\varepsilon)$ из $-\infty$, а коэффициент прохождения для этой волны определяется равенством

$$T_m = \sum_{q=1}^{M} |S_{m,\, M+q}|^2. \tag{2.4}$$

Из унитарности матрицы рассеяния следует, что $T_m + R_m = 1$. Аналогичные определения можно ввести для волны U_{M+m}, приходящей из $+\infty$.

Цель статьи – получить асимптотику "резонансных", значений $k_r = k_r(\varepsilon)$ параметра k, при которых коэффициент прохождения принимает максимальное значение. Кроме того, мы изучаем поведение $T_m(k;\varepsilon)$ вблизи $k = k_r$ при $\varepsilon \to 0$.

§3. Предельные задачи

3.1. Предельные задачи первого рода. В этом и следующем пунктах мы введём "предельные" краевые задачи в областях, не зависящих от параметра ε. Специальные решения этих задач используются для построения асимптотики волновой функции. Существование и свойства упомянутых специальных решений доказаны в [9, глава 5], см. также [3]; здесь мы приводим требуемые сведения без доказательства. Исключение составляет предельная задача в "резонаторе", для которой проводится дополнительное исследование.

При $\varepsilon \to 0$ область $G(\varepsilon)$ распадается на две неограниченные области G_1, G_2 и ограниченный резонатор G_0. Задачи вида

$$\begin{aligned} (-\Delta - k^2)v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in G_j;\\ v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \partial G_j; \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $j = 0, 1, 2$, называются предельными задачами первого рода.

В области G_1 введём решения V_m, $m = 1, \dots, M$, и $\mathbf{v}_1$, для которых справедливы разложения

$$V_m(x,y) = \begin{cases} U_m(x,y) + \sum\limits_{q=1}^{M} S^0_{mq} U_{M+q}(x,y) + O(e^{\delta x}), & x \to -\infty; \\ s_{1m} \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1)\Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), & r_1 \to 0; \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{v}_1(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{q=1}^{M} A_{1q} U_{M+q}(x,y) + O(e^{\delta x}), & x \to -\infty; \\ \big(\tilde{N}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1) + a_1 \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_1)\big)\Phi(\pi - \varphi_1) + O(r_1^{2\pi/\omega}), & r_1 \to 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Здесь (r_1, φ_1) – полярные координаты с центром в O_1, φ_1 отсчитывается от положительного направления оси x;

$$\Phi(\varphi) = \pi^{-1/2} \cos(\pi\varphi/\omega);$$

$\tilde{J}_\mu$ и $\tilde{N}_\mu$ – функции Бесселя и Неймана, нормированные так, чтобы

$$\tilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu), \quad \tilde{N}_\mu(kr) = r^{-\mu} + o(r^{-\mu});$$

δ – достаточно малое положительное число. Аналогичным образом в области G_2 введём функции V_{M+m}, $m = 1, \dots, M$, и $\mathbf{v}_2$, такие, что

$$V_{M+m}(x,y) = \begin{cases} U_{M+m}(x,y) + \sum\limits_{q=0}^{M} S^0_{M+m,M+q} U_q(x,y) + O(e^{-\delta x}), & x \to +\infty; \\ s_{2m} \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2)\Phi(\varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), & r_2 \to 0; \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{v}_2(x,y) = \begin{cases} \sum\limits_{q=0}^{M} A_{2q} U_q(x,y) + O(e^{-\delta x}), & x \to +\infty; \\ \big(\tilde{N}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2) + a_2 \tilde{J}_{\frac{\pi}{\omega}}(kr_2)\big)\Phi(\varphi_2) + O(r_2^{2\pi/\omega}), & r_2 \to 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где (r_2, φ_2) – полярные координаты с центром в O_2; $\tilde{J}_\mu, \tilde{N}_\mu, \Phi, \delta$ – те же, что в (3.2)–(3.3). Матрицы

$$S^0_1 = \|S^0_{mq}\|^M_{m,q=1}, \qquad S^0_2 = \|S^0_{M+m,M+q}\|^M_{m,q=1}$$

суть матрицы рассеяния в областях G_1 и G_2, соответственно. Введем матрицы s_1, s_2 размера $M \times 1$ и матрицы A_1, A_2 размера $1 \times M$,

$$s_1 = \|s_{m1}\|^M_{m=1}, \quad s_2 = \|s_{M+m,2}\|^M_{m=1},$$
$$A_1 = \|A_{1m}\|^M_{m=1}, \quad A_2 = \|A_{2,M+m}\|^M_{m=1}.$$

Справедливы соотношения ([9, Лемма 10.2.1])

$$A_j A_j^* = 2\operatorname{Im} a_j, \quad A_j = i s_j^* S_j^0. \tag{3.6}$$

Наконец, из соображений симметрии имеем

$$a_1 = a_2. \tag{3.7}$$

Обратимся к задаче в резонаторе. Пусть k_e^2 – собственное число оператора $-\triangle$ в области G_0 и $v_{e,1}, \dots, v_{e,\varkappa}$ – ортонормированный базис в собственном подпространстве, отвечающем числу k_e^2. Справедливы разложения

$$v_{e,l}(x) = \begin{cases} b_{1l}\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \to 0; \\ b_{2l}\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\Phi(\pi-\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \to 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

Положим

$$\psi_1(r,\varphi) = \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr)\Phi(\varphi), \qquad \psi_2(r,\varphi) = \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr)\Phi(\pi-\varphi).$$

Для k^2 из некоторой проколотой окрестности числа k_e^2, отделенной от других собственных чисел резонатора, введем решения $\mathbf{v}_{0j}$, $j = 1, 2$, однородной задачи (3.1) в G_0,

$$\mathbf{v}_{0j}(x) = \Theta(r_j)\psi(r_j,\varphi_j) + \widetilde{v}_{0j}(x), \tag{3.9}$$

где $t \mapsto \Theta(t)$ – срезка, равная единице при $t \le t_0$ и нулю при $t \ge 2t_0$, здесь $t_0 > 0$ – достаточно малое фиксированное число; $\widetilde{v}_{0j}$ – ограниченное решение задачи

$$(-\Delta - k^2)v = [\triangle, \Theta]\psi_j \quad \text{в } G_0, \qquad v = 0 \quad \text{на } \partial G_0.$$

Справедливы следующие разложения:

$$\mathbf{v}_{01}(x,y) \sim \begin{cases} \big(\widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + c_{11}\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\big)\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \to 0, \\ c_{12}(k)\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\Phi(\pi-\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \to 0, \end{cases} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{v}_{02}(x,y) \sim \begin{cases} c_{21}(k)\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \to 0, \\ \big(\widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + c_{22}(k)\widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\big)\Phi(\pi-\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \to 0. \end{cases} \tag{3.11}$$

Согласно лемме 5.3.3 [2] верно равенство $c_{12} = c_{21}$. Из следующей леммы и разложений (3.8) следует, что

$$c_{pq}(k) = -(k^2 - k_e^2)^{-1}\sum_{l=1}^{\varkappa} b_{pl}b_{ql} + \widehat{c}_{pq}(k), \tag{3.12}$$

где $\widehat{c}_{pq}$ аналитичны по k^2 в некоторой окрестности числа k_e^2.

Лемма 3.1. *В любой окрестности $V \subset \mathbb{C}$ числа k_e^2, не содержащей собственных чисел задачи* (3.1) *в G_0, отличных от k_e^2, имеют место соотношения*

$$\mathbf{v}_{0j}(x) = -(k^2 - k_e^2)^{-1} \sum_{l=1}^{\varkappa} b_{jl} v_{e,l}(x) + \widehat{v}_{0j}(x),$$

где постоянные b_{jl} определены разложениями (3.8), *а функции $\widehat{v}_{0j}$ аналитически зависят от $k^2 \in V$.*

Доказательство. Сначала проверим, что $(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_0} = -b_{jl}/(k^2 - k_e^2)$. Имеем

$$(\Delta \mathbf{v}_{0j} + k^2 \mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}, \Delta v_{e,l} + k^2 v_{e,l})_{G_\delta} = -(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta}$$

в области G_δ, полученной из G_0 отбрасыванием кругов радиуса δ с центрами в O_1 и O_2. Применяя формулу Грина и подставляя на $\partial G_\delta \setminus \partial G_0$ асимптотику (3.8) вместо $v_{e,l}$ и (3.9) вместо $\mathbf{v}_{0j}$, получаем

$$-(k^2 - k_e^2)(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_\delta} = (\partial_n \mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{\partial G_\delta} - (\mathbf{v}_{0j}, \partial_n v_{e,l})_{\partial G_\delta} = b_{jl} + o(1).$$

Остается лишь устремить δ к нулю.

Далее, имеем

$$\widetilde{v}_{0j}(x) = (k^2 - k_e^2)^{-1} \sum_{q=1}^{\varkappa} B_{jq}(k^2) v_{e,q}(x) + \widehat{v}_j(x), \tag{3.13}$$

где $B_{jl}(k^2)$ не зависят от x, а $\widehat{v}_j$ аналитичны по k^2 вблизи $k^2 = k_e^2$. Умножая (3.9) на $v_{e,l}$ и учитывая равенство (3.13), доказанную выше формулу для $(\mathbf{v}_{0j}, v_{e,l})_{G_0}$ и ортонормированность собственных функций $v_{e,q}$, получаем $B_{jl}(k^2) = -b_{jl} + (k^2 - k_e^2)\widetilde{B}_{jl}(k^2)$, где функция $\widetilde{B}_{jl}$ аналитическая. Вместе с (3.9) и (3.13) это равенство приводит к требуемому утверждению. □

3.2. Предельные задачи второго рода. Предельной задачей второго рода называется задача

$$\begin{aligned} \Delta w(\xi, \eta) &= F(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in \Omega; \\ w(\xi, \eta) &= 0, \qquad\quad\; (\xi, \eta) \in \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.14}$$

где (ξ, η) – декартовы координаты с началом в O. Согласно [2] (Предложение 5.2.3), однородная задача (3.14) (при $F = 0$) имеет решения

w^l и w^r, которые однозначно определяются асимптотическими разложениями при $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \to \infty$,

$$w^l = \begin{cases} \left(\rho^{\pi/\omega} + \alpha\rho^{-\pi/\omega}\right)\Phi(\pi - \varphi) + O(\rho^{-3\pi/\omega}), & \xi < 0; \\ \beta\rho^{-\pi/\omega}\Phi(\varphi) + O(\rho^{-3\pi/\omega}), & \xi > 0; \end{cases} \tag{3.15}$$

$$w^r = \begin{cases} \beta\rho^{-\pi/\omega}\Phi(\varphi) + O(\rho^{-3\pi/\omega}), & \xi < 0; \\ \left(\rho^{\pi/\omega} + \alpha\rho^{-\pi/\omega}\right)\Phi(\pi - \varphi) + O(\rho^{-3\pi/\omega}), & \xi > 0, \end{cases} \tag{3.16}$$

где α и β – вещественные константы, зависящие только от геометрии Ω; (ρ, φ) – полярные координаты с центром в O.

Пусть Θ – та же функция, что и в (3.9), и пусть

$$\zeta^+(\xi, \eta) = \begin{cases} \Theta(\rho), & \xi \geq 0; \\ 1, & \xi < 0; \end{cases} \qquad \zeta^-(\xi, \eta) = \begin{cases} 1, & \xi > 0; \\ \Theta(\rho), & \xi \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу (3.14) с правой частью

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = &- [\Delta, \zeta^-] \left(a^-\varepsilon^{-\pi/\omega}\rho^{-\pi/\omega} + a^+\varepsilon^{\pi/\omega}\rho^{\pi/\omega}\right)\Phi(\pi - \varphi) \\ &- [\Delta, \zeta^+] \left(b^-\varepsilon^{-\pi/\omega}\rho^{-\pi/\omega} + b^+\varepsilon^{\pi/\omega}\rho^{\pi/\omega}\right)\Phi(\varphi), \end{aligned} \tag{3.17}$$

где $a^\pm$ и $b^\pm$ – некоторые постоянные. Решение w этой задачи, вообще говоря, ведет себя на бесконечности как $O(\rho^{-\pi/\omega})$. Нам нужно, чтобы убывание было более быстрым; это возможно, если $a^\pm$ и $b^\pm$ подчинены дополнительным условиям ([9], Лемма 5.4.1)

$$(a^-, b^-) = (a^+, b^+)\,\Lambda_0\varepsilon^{2\pi/\omega}, \qquad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Тогда $w = O(\rho^{-3\pi/\omega})$ при $\rho \to +\infty$.

§4. Асимптотические формулы

4.1. Асимптотика волновых функций. Рассмотрим волновую функцию u_m в $G(\varepsilon)$, подчиненную условиям излучения

$$u_m(x, y; k, \varepsilon) \sim \begin{cases} U_m(x, y; k) + \sum\limits_{q=1}^{M} S_{mq}(k, \varepsilon)\, U_q(x, y; k), & x \to -\infty, \\ \sum\limits_{q=1}^{M} S_{m, M+q}(k, \varepsilon)\, U_{M+q}(x, y; k), & x \to +\infty. \end{cases}$$

В областях G_j, $j=0,1,2$, приближением для u_m служат такие решения v_j задач (3.1), что

$$v_1 = V_m + C_{m1}\mathbf{v}_1, \quad v_0 = C_{m2}\mathbf{v}_{01} + C_{m3}\mathbf{v}_{02}, \quad v_2 = C_{m4}\mathbf{v}_2, \tag{4.1}$$

где V_m, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{v}_{0j}$ определены в пункте 3.1. Постоянные C_{mj} зависят от ε и k. В силу (3.2)–(3.5) при $r_j \to 0$ и (3.10)–(3.11) имеем

$$v_1(x,y) = \big(a_1^- \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + a_1^+ \widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\big)\Phi(\pi-\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), \quad r_1 \to 0;$$

$$v_0(x,y) = \begin{cases} \big(b_1^- \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_1) + b_1^+ \widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_1)\big)\Phi(\varphi_1) + O(r_1^{3\pi/\omega}), & r_1 \to 0; \\ \big(b_2^- \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + b_2^+ \widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\big)\Phi(\pi-\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), & r_2 \to 0; \end{cases}$$

$$v_2(x,y) = \big(a_2^- \widetilde{N}_{\pi/\omega}(kr_2) + a_2^+ \widetilde{J}_{\pi/\omega}(kr_2)\big)\Phi(\varphi_2) + O(r_2^{3\pi/\omega}), \quad r_2 \to 0;$$

где

$$a_1^- = C_{m1},\ a_1^+ = s_{m1} + C_{m1}a_1,\ b_1^- = C_{m2},\ b_1^+ = C_{m2}c_{11} + C_{m3}c_{21}, \tag{4.2}$$

$$a_2^- = C_{m4},\ a_2^+ = C_{m4}\,a_2,\ b_2^- = C_{m3},\ b_2^+ = C_{m2}c_{12} + C_{m3}c_{22}. \tag{4.3}$$

Введем срезки

$$\chi_{1,\varepsilon}(x,y) = (1-\Theta(r_1/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_1}(x,y), \quad \chi_{2,\varepsilon}(x,y) = (1-\Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_2}(x,y),$$
$$\chi_{0,\varepsilon}(x,y) = (1-\Theta(r_1/\varepsilon)-\Theta(r_2/\varepsilon))\mathbf{1}_{G_0}(x,y),$$

где Θ – та же функция, что и в (3.9), $\mathbf{1}_{G_j}$ – характеристическая функция множества G_j. При подстановке в задачу (2.1) сумма

$$\chi_{1,\varepsilon}(x,y)v_1(x,y;\varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x,y)v_0(x,y;\varepsilon) + \chi_{2,\varepsilon}(x,y)v_2(x,y;\varepsilon) \tag{4.4}$$

дает невязку

$$\begin{aligned} &-[\Delta,\chi_{1,\varepsilon}]v_1(x,y;\varepsilon) - [\Delta,\chi_{0,\varepsilon}]v_0(x,y;\varepsilon) - [\Delta,\chi_{2,\varepsilon}]v_2(x,y;\varepsilon) \\ &= [\Delta,\zeta^-(r_1/\varepsilon)]v_1(x;\varepsilon) + [\Delta,\zeta^+(r_1/\varepsilon)]v_0(x;\varepsilon) \\ &\quad + [\Delta,\zeta^-(r_2/\varepsilon)]v_0(x;\varepsilon) + [\Delta,\zeta^+(r_2/\varepsilon)]v_2(x;\varepsilon); \end{aligned}$$

срезки $\zeta^\pm$ определены в пункте 3.1. Невязка отлична от нуля лишь в малой окрестности сужений, где функции v_j можно заменить их асимптотикой. Пользуясь формулами

$$\widetilde{N}_\mu(kr) = r^{-\mu} + o(r^{-\mu}), \qquad \widetilde{J}_\mu(kr) = r^\mu + o(r^\mu)$$

при $r \to 0$, выделим главную часть невязки и преобразуем ее, подставив $\rho_j = r_j/\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2[\Delta, \zeta^-(\rho_1)] \left(a_1^- \varepsilon_1^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + a_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega}\right) \Phi(\pi - \varphi_1)\\
+&\varepsilon^2[\Delta, \zeta^+(\rho_1)] \left(b_1^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_1^{-\pi/\omega} + b_1^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_1^{\pi/\omega}\right) \Phi(\varphi_1)\\
+&\varepsilon^2[\Delta, \zeta^-(\rho_2)] \left(a_2^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + a_2^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega}\right) \Phi(\pi - \varphi_2)\\
+&\varepsilon^2[\Delta, \zeta^+(\rho_2)] \left(b_2^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho_2^{-\pi/\omega} + b_2^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho_2^{\pi/\omega}\right) \Phi(\varphi_2);
\end{aligned}$$

здесь постоянные $a_j^\pm$, $b_j^\pm$ определены равенствами (4.2)–(4.3). Примем функции

$$\begin{aligned}
F_j(\xi, \eta) =&[\Delta, \zeta^-(\rho)] \left(a_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho^{-\pi/\omega} + a_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho^{\pi/\omega}\right) \Phi(\pi - \varphi)\\
&+[\Delta, \zeta^+(\rho)] \left(b_j^- \varepsilon^{-\pi/\omega} \rho^{-\pi/\omega} + b_j^+ \varepsilon^{\pi/\omega} \rho^{\pi/\omega}\right) \Phi(\varphi), \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

$j = 1, 2$, в качестве правой части задачи (3.14). Потребуем, чтобы $a_j^\pm$, $b_j^\pm$ подчинялись условиям вида (3.18),

$$(a_j^-, b_j^-) = (a_j^+, b_j^+)\, \Lambda_0 \varepsilon^{2\pi/\omega}, \qquad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \qquad (4.6)$$

и обозначим соответствующие решения задачи (3.14) через w_j. Компенсируем выписанные выше старшие члены невязки, добавляя

$$\varepsilon^2 \Theta(r_1) w_1(\varepsilon^{-1} x_1, \varepsilon^{-1} y_1; \varepsilon) + \varepsilon^2 \Theta(r_2) w_2(\varepsilon^{-1} x_2, \varepsilon^{-1} y_2; \varepsilon)$$

к сумме (4.4).

Таким образом, первое приближение для волновой функции u_m имеет вид

$$\begin{aligned}
\widetilde{u}_m(x, y; \varepsilon) = &\chi_{1,\varepsilon}(x, y) v_1(x, y; \varepsilon) + \chi_{0,\varepsilon}(x, y) v_0(x, y; \varepsilon)\\
&+\chi_{2,\varepsilon}(x, y) v_2(x, y; \varepsilon) \varepsilon^2 \Theta(r_1) w_1(\varepsilon^{-1} x, \varepsilon^{-1} y; \varepsilon) \qquad (4.7)\\
&+\varepsilon^2 \Theta(r_2) w_2(\varepsilon^{-1} x, \varepsilon^{-1} y; \varepsilon),
\end{aligned}$$

где v_j – решения однородных предельных задач первого рода (3.1), заданные (4.1), а w_j – решения предельных задач второго рода (3.14) с правой частью (4.5). Чтобы найти постоянные C_{ml}, входящие в (4.1), выпишем условия (4.6) с учетом (4.2)–(4.3):

$$(C_{m1}, C_{m2}) = (s_{m1} + C_{m1}a_1, C_{m2}c_{11} + C_{m3}c_{21})\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}, \tag{4.8}$$

$$(C_{m3}, C_{m4}) = (C_{m2}c_{12} + C_{m3}c_{22}, C_{m4}a_2)\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}. \tag{4.9}$$

В следующем пункте мы выведем отсюда формулы для C_{ml}.

Аналогично строится асимптотика волновой функции u_{M+m}, удовлетворяющей условиям

$$u_{M+m}(x,y;k,\varepsilon)\sim\begin{cases}\sum\limits_{p=1}^{M} S_{M+m,p}(k,\varepsilon)U_p^-(x,y;k), & x\to-\infty,\\ U_{M+m}^+(x,y;k)+\sum\limits_{p=1}^{M} S_{M+m,M+p}(k,\varepsilon)\,U_{M+p}^-(x,y;k), & x\to+\infty.\end{cases}$$

Старший член асимптотики имеет вид (4.7), где

$$\begin{gathered} v_1 = C_{M+m,1}\mathbf{v}_1, \quad v_0 = C_{M+m,2}\mathbf{v}_{01} + C_{M+m,3}\mathbf{v}_{02},\\ v_2 = V_{M+m} + C_{M+m,4}\mathbf{v}_2, \end{gathered} \tag{4.10}$$

постоянные $C_{M+m,l}$ связаны соотношениями

$$(C_{M+m,1}, C_{M+m,2}) = (C_{M+m,1}a_1, C_{M+m,2}c_{11} + C_{M+m,3}c_{21})\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}, \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}(C_{M+m,3}, C_{M+m,4}) = (C_{M+m,2}c_{12} + C_{M+m,3}c_{22}, s_{M+m,2}\\ + C_{M+m,4}a_2)\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}.\end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2. Формулы для постоянных C_{ml}. В этом пункте мы выводим формулы для постоянных $C_{m1},\dots,C_{m4}$ и тем самым завершаем построение старшего члена асимптотики волновых функций. Введем матрицы $\Lambda = \operatorname{diag}\{\Lambda_0, \Lambda_0\}$ и

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_{11} & c_{12} & 0\\ 0 & c_{21} & c_{22} & 0\\ 0 & 0 & 0 & a_2\end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Тогда соотношения (4.8)–(4.9) можно записать в виде

$$(C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4})=(s_{m1}, 0, 0, 0)\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega} + (C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14})a\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega},$$

откуда

$$(C_{m1}, C_{m2}, C_{m3}, C_{m4})(I - a\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}) = (s_{m1}, 0, 0, 0)\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}. \tag{4.14}$$

В силу (3.12)

$$a(k) = -(k^2 - k_e^2)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \|\mathbf{b}_1\|^2 & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \rangle & 0 \\ 0 & \langle \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1 \rangle & \|\mathbf{b}_2\|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \widehat{a}(k), \tag{4.15}$$

где $\mathbf{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{j\varkappa})$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^\varkappa$, а матрица $\widehat{a}$ аналитическая вблизи $k = k_e$ и определяется равенством (4.13) с заменой c_{pq} на $\widehat{c}_{pq}$. Пусть ψ – угол между векторами $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ в $\mathbb{C}^\varkappa$. Положим

$$\widetilde{\mathbf{b}}_1 = (0, \|\mathbf{b}_1\|, \|\mathbf{b}_2\| \cos\psi, 0), \qquad \widetilde{\mathbf{b}}_2 = (0, 0, \|\mathbf{b}_2\| \sin\psi, 0) \tag{4.16}$$

и перепишем $a(k)$ в более удобном виде:

$$a(k) = -\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 + \widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_2}{k^2 - k_e^2} + \widehat{a}(k).$$

Лемма 4.1. *При достаточно малом ε справедливо равенство*

$$\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - a\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1} = D - \frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q},$$

где

$$D = \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - \widehat{a}\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}, \qquad G = D\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 D + D\widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} H &= D\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 D \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle + D\widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_2 D \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\ &\quad - D\widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 D \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle - D\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_2 D \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle, \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} p &= \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle, \\ q &= \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} I - a\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} &= I - \widehat{a}\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} + \widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_2 \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}}{k^2 - k_e^2} \\ &= \Big(I + \frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^* \widetilde{\mathbf{b}}_1 D + \widetilde{\mathbf{b}}_2^* \widetilde{\mathbf{b}}_2 D}{k^2 - k_e^2} \Big) (I - \widehat{a}\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega}), \end{aligned}$$

где $D = \Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega} (I - \widehat{a}\,\Lambda \varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}$; обратная матрица здесь, очевидно, существует при достаточно малом ε. Прямая проверка показывает, что

$$\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{c}}_1}{k^2-k_e^2}\Big)^{-1}=I-\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{c}}_1}{k^2-k_e^2+\langle\mathbf{c}_1,\mathbf{b}_1\rangle}\qquad(4.20)$$

при $\widetilde{\mathbf{c}}_1=\widetilde{\mathbf{b}}_1D$. Следовательно,

$$I-a\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}=\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_2^*\widetilde{\mathbf{b}}_2E}{k^2-k_e^2}\Big)\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{b}}_1D}{k^2-k_e^2}\Big)(I-\widehat{a}\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}),$$

где

$$E=D\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{b}}_1D}{k^2-k_e^2}\Big)^{-1}=D-\frac{D\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{b}}_1D}{k^2-k_e^2+\langle\widetilde{\mathbf{b}}_1D,\widetilde{\mathbf{b}}_1\rangle}.\qquad(4.21)$$

Еще раз применяя (4.20) с заменой $\widetilde{\mathbf{b}}_1$ на $\widetilde{\mathbf{b}}_2$ и $\widetilde{\mathbf{c}}_1$ – на $\widetilde{\mathbf{b}}_2E$, получаем

$$\begin{aligned}&\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}(I-a\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}\\&=\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega}(I-\widehat{a}\,\Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega})^{-1}\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_1^*\widetilde{\mathbf{b}}_1D}{k^2-k_e^2}\Big)^{-1}\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_2^*\widetilde{\mathbf{b}}_2E}{k^2-k_e^2}\Big)^{-1}\\&=E\Big(I+\frac{\widetilde{\mathbf{b}}_2^*\widetilde{\mathbf{b}}_2E}{k^2-k_e^2}\Big)^{-1}=E-\frac{E\widetilde{\mathbf{b}}_2^*\widetilde{\mathbf{b}}_2E}{k^2-k_e^2+\langle\widetilde{\mathbf{b}}_2E,\widetilde{\mathbf{b}}_2\rangle}.\end{aligned}$$

Осталось подставить сюда (4.21); элементарные выкладки опускаем. □

Таким образом, (4.14) принимает вид

$$(C_{m1},C_{m2},C_{m3},C_{m4})=(s_{m1},0,0,0)\Big(D-\frac{G(k^2-k_e^2)+H}{(k^2-k_e^2)^2+p(k^2-k_e^2)+q}\Big).$$

Тем же путем соотношения (4.11)–(4.12) приводят к формулам

$$\begin{aligned}&(C_{M+m,1},C_{M+m,2},C_{M+m,3},C_{M+m,4})\\&=(0,0,0,s_{M+m,2})\Big(D-\frac{G(k^2-k_e^2)+H}{(k^2-k_e^2)^2+p(k^2-k_e^2)+q}\Big).\end{aligned}$$

4.3. Асимптотика матрицы рассеяния. Чтобы получить приближение $\widetilde{S}_{ij}$ для элементов матрицы рассеяния $S=(S_{ij})_{i,j=1}^{2M}$, рассмотрим асимптотику на бесконечности функции (4.7). Обозначим через $\widetilde{S}_{kl}$, $k,l=1,2$, матрицы размера $M\times M$, такие, что

$$\widetilde{S}=\begin{pmatrix}\widetilde{S}_{11}&\widetilde{S}_{12}\\\widetilde{S}_{21}&\widetilde{S}_{22}\end{pmatrix}.$$

В силу (4.1), (3.2)–(3.3) и (3.5)

$$v_1(x,y)=U_m^+(x,y)+\sum_{p=1}^{M}(S_{mp}^0+C_{m1}(\varepsilon)A_{1p})U_p^-(x,y)+O(\exp(\delta x)),\, x\to-\infty,$$

$$v_2(x,y)=C_{m4}(\varepsilon)\sum_{p=1}^{M}A_{2,M+p}U_{M_1+p}^-(x,y)+O(\exp(-\delta x)),\quad x\to+\infty,$$

значит

$$(\widetilde{S}_{11},\widetilde{S}_{12})=(S_1^0+\mathbf{C}_1A_1,\mathbf{C}_4A_2),\tag{4.22}$$

где

$$\mathbf{C}_j=(C_{1j},\dots,C_{Mj})^T,\ A_1=(A_{11},\dots,A_{1M}),\ A_2=(A_{2,M+1},\dots,A_{2,2M}),$$

матрица S_1^0 введена в пункте 3.1. Аналогично, из (4.10) и (3.3)–(3.5) находим

$$(\widetilde{S}_{21},\widetilde{S}_{22})=(\mathbf{C}_1A_1,S_2^0+\mathbf{C}_4A_2).\tag{4.23}$$

Положим

$$S^0=\operatorname{diag}(S_1^0,S_2^0),\quad A=\begin{pmatrix}A_1 & 0_{1\times M}\\ 0_{1\times M} & 0_{1\times M}\\ 0_{1\times M} & 0_{1\times M}\\ 0_{1\times M} & A_2\end{pmatrix},\tag{4.24}$$

$$s=\begin{pmatrix}s_1 & 0_{M\times1} & 0_{M\times1} & 0_{M\times1}\\ 0_{M\times1} & 0_{M\times1} & 0_{M\times1} & s_2\end{pmatrix},$$

тогда из (3.6) следует равенство $A=is^*S^0$. Объединяя (4.22)–(4.23), подставляя формулы для постоянных C_{ml} из предыдущего пункта и учитывая, что $A=is^*S^0$, получаем

$$\widetilde{S}=S^0+(\mathbf{C}_1,\mathbf{C}_2,\mathbf{C}_3,\mathbf{C}_4)A=S^0+is\Big(D-\frac{G(k^2-k_e^2)+H}{(k^2-k_e^2)^2+p(k^2-k_e^2)+q}\Big)s^*S^0.$$

Можно проверить, что матрица $\widetilde{S}$ унитарна, но нам это не понадобится.

4.4. Асимптотика полюсов матрицы рассеяния. Корни k_1^2 и k_2^2 уравнения $(k^2-k_e^2)^2+p(k^2-k_e^2)+q=0$ (см. лемму 4.1) служат приближением для полюсов матрицы рассеяния. Нас интересует асимптотика вещественных и мнимых частей чисел k_1^2 и k_2^2. Разрешим это уравнение относительно $k^2-k_e^2$,

$$k^2-k_e^2=-\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{p^2-4q},$$

и выпишем главный член асимптотики правой части. Так как

$$D = \Lambda\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \tag{4.25}$$

то, учитывая (4.16), находим

$$p = \langle\widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1\rangle + \langle\widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2\rangle = \alpha(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2)\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} q &= \langle\widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1\rangle\langle\widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2\rangle - \langle\widetilde{\mathbf{b}}_1 D, \widetilde{\mathbf{b}}_2\rangle\langle\widetilde{\mathbf{b}}_2 D, \widetilde{\mathbf{b}}_1\rangle \\ &= \alpha^2\|\mathbf{b}_1\|^2\|\mathbf{b}_2\|^2(\sin^2\psi)\varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}). \end{aligned}$$

Значит,

$$k_{1,2}^2 = k_e^2 - \alpha\Lambda_{1,2}\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}), \tag{4.27}$$

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\mathcal{D}}, \tag{4.28}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= (\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2)^2 - 4\|\mathbf{b}_1\|^2\|\mathbf{b}_2\|^2(\sin^2\psi) \\ &= (\|\mathbf{b}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_2\|^2)^2 + 4\|\mathbf{b}_1\|^2\|\mathbf{b}_2\|^2(\cos^2\psi). \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ясно, что $\mathcal{D} \geqslant 0$ и $\operatorname{Re}(k_{1,2}^2 - k_e^2) \leqslant 0$.

Чтобы найти асимптотику мнимых частей $\operatorname{Im} k_{1,2}^2$, выразим их через $\operatorname{Re} k_{1,2}^2$ и через коэффициенты p и q. С этой целью перепишем рассматриваемое уравнение в виде

$$(k_r^2 - k_e^2 + ik_i^2)^2 + (p_r + ip_i)(k_r^2 - k_e^2 + ik_i^2) + (q_r + iq_i) = 0,$$

где $k_r^2 := \operatorname{Re} k_{1,2}^2$, $k_i^2 := \operatorname{Im} k_{1,2}^2$ и т. п. Выделяя слева мнимую часть, получим

$$2(k_r^2 - k_e^2)k_i^2 + p_r k_i^2 + p_i(k_r^2 - k_e^2) + q_i = 0,$$

откуда

$$k_i^2 = -\frac{p_i(k_r^2 - k_e^2) + q_i}{2(k_r^2 - k_e^2) + p_r} = -\frac{p_i}{2} + \frac{p_i p_r - 2q_i}{4(k_r^2 - k_e^2) + 2p_r}. \tag{4.30}$$

Вычислим старшие члены асимптотики $p_i := \operatorname{Im} p$ и $q_i := \operatorname{Im} q$. Так как $D = \Lambda + \Lambda\widehat{a}\Lambda + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$, то $\operatorname{Im} D = \Lambda(\operatorname{Im}\widehat{a})\Lambda + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$. Согласно (4.15) и (3.6)

$$\operatorname{Im}\widehat{a} = \operatorname{Im} a = \frac{1}{2}\operatorname{diag}(\|s_1\|^2, 0, 0, \|s_2\|^2),$$

где $\|s_1\|^2 = \sum\limits_{m=1}^{M} |s_{m1}|^2$ и в силу симметрии $\|s_2\|^2 = \|s_1\|^2$. Следовательно,

$$\mathrm{Im}D = \frac{1}{2}\|s_1\|^2 \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & 0 & 0 \\ \alpha\beta & \beta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha^2 \end{pmatrix} \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}),$$

поэтому

$$\begin{aligned} p_i &= \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle + \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\|\mathbf{b}_1\|^2 + \|\mathbf{b}_2\|^2)\beta^2 \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}), \\ q_i &= \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 \mathrm{Re}D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 \mathrm{Re}D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\ &+ \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 \mathrm{Re}D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle - \langle \widetilde{\mathbf{b}}_1 \mathrm{Re}D, \widetilde{\mathbf{b}}_2 \rangle \langle \widetilde{\mathbf{b}}_2 \mathrm{Im}D, \widetilde{\mathbf{b}}_1 \rangle \\ &= \alpha\beta^2 \|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 \|s_1\|^2 (\sin^2\psi) \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Отсюда получаем, что

$$p_i p_r - 2q_i = \frac{1}{2}\alpha\beta^2 \|s_1\|^2 \mathcal{D} \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}),$$

где $\mathcal{D}$ определено равенством (4.29). Из (4.26) и (4.27)–(4.28) следует, что

$$2(k_r^2 - k_e^2) + p_r = \mp\alpha\sqrt{\mathcal{D}}\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

Подставим в (4.30) последние два соотношения и формулу (4.31) и найдем асимптотику мнимой части полюсов k_1^2 и k_2^2 (напомним, что в (4.30) $k_i^2 := \mathrm{Im}\, k_{1,2}^2$):

$$\mathrm{Im}\, k_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}\beta^2 \Lambda_{1,2} \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega});$$

постоянные $\Lambda_{1,2}$ определены равенством (4.28).

4.5. Асимптотика резонансного туннелирования. Напомним, что

$$\widetilde{S} = S^0 + isDs^*S^0 - is\frac{G(k^2 - k_e^2) + H}{(k^2 - k_e^2)^2 + p(k^2 - k_e^2) + q} s^* S^0,$$

где D, G, H, p, q определены соотношениями (4.17)–(4.19), а S^0 и s – равенством (4.24). Учитывая (4.25) и (4.16), имеем

$$sDs^*S^0 = \begin{pmatrix} s_1 s_1^* S_1^0 & 0_{M\times M} \\ 0_{M\times M} & s_2 s_2^* S_2^0 \end{pmatrix} \alpha \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}),$$

$$sGs^*S^0 = \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}_1\|^2 s_1 s_1^* S_1^0 & \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle s_1 s_2^* S_2^0 \\ \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle s_2 s_1^* S_1^0 & \|\mathbf{b}_2\|^2 s_2 s_2^* S_2^0 \end{pmatrix} \beta^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}),$$

$$sHs^*S^0 = \begin{pmatrix} s_1 s_1^* S_1^0 & 0 \\ 0 & s_2 s_2^* S_2^0 \end{pmatrix} \alpha\beta^2 \|\mathbf{b}_1\|^2 \|\mathbf{b}_2\|^2 (\sin\psi)^2 \varepsilon^{6\pi/\omega} + O(\varepsilon^{8\pi/\omega}).$$

Таким образом, блок $\widetilde{S}_{12}$ можно представить в виде

$$\widetilde{S}_{12} = -i \frac{\beta^2 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle (k^2 - k_e^2)}{(k^2 - k_1^2)(k^2 - k_2^2)} s_1 s_2^* S_2^0 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}) \tag{4.32}$$

откуда получается требуемая асимптотика коэффициента прохождения:

$$T_m = \sum_{p=1}^{M} |\widetilde{S}_{m,M+p}|^2 = \frac{\beta^4 \langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle^2 (k^2 - k_e^2)^2}{|k^2 - k_1^2|^2 |k^2 - k_2^2|^2} |s_{m1}|^2 \|s_2\|^2 \varepsilon^{8\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

В силу симметрии столбцы s_1 и s_2 совпадают, поэтому $\widetilde{S}_{12} = \widetilde{S}_{21}$ и, следовательно, $T_{M+m} = T_m$.

Исследуя старший член асимптотики коэффициента T_m, нетрудно установить, что он имеет локальные максимумы при $k^2 = k^2_{res,1}$ и $k^2 = k^2_{res,2}$, причем

$$k^2_{res,j} = \operatorname{Re} k_j^2 + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}) = k_e^2 - \alpha \Lambda_j \varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}).$$

Высота резонансных пиков равна

$$\begin{aligned} H_j &= \frac{|s_{m1}|^2}{\|s_1\|^2} \frac{4\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle^2}{\mathcal{D}} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega}) \\ &= \frac{|s_{m1}|^2}{\|s_1\|^2} \left(1 + \frac{(\|\mathbf{b}_1\|^2 - \|\mathbf{b}_2\|^2)^2}{4\langle \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\rangle^2}\right)^{-1} + O(\varepsilon^{2\pi/\omega}), \end{aligned}$$

где $\mathcal{D}$ определено равенством (4.29). Ширина пика с номером j на половине его высоты вычисляется по формуле

$$\Upsilon_j = \operatorname{Im} k_j^2 + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}) = -\frac{1}{2} \beta^2 \Lambda_j \|s_1\|^2 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega}).$$

Между резонансными пиками в точке $k^2 = (k^2_{res,1} + k^2_{res,2})/2 + O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$ имеется локальный минимум, где $T_m = O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$.

В заключение отметим, что в частном случае при $\mathbf{b}_1 = \pm\mathbf{b}_2$ в равенстве из леммы 4.1 имеем $H = 0$ и $p = 0$. Поэтому вместо (4.32) получаем

$$\widetilde{S}_{12} = -i\frac{\beta^2\|\mathbf{b}_1\|^2}{k^2 - k_e^2 + p} s_1 s_2^* S_2^0 \varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega}),$$

то есть матрица рассеяния имеет один полюс, а график коэффициента прохождения – один пик. Резонансная энергия определяется равенством $k_{res}^2 = k_e^2 - \operatorname{Re} p = k_e^2 - 2\alpha\|\mathbf{b}_1\|^2\varepsilon^{2\pi/\omega} + O(\varepsilon^{4\pi/\omega})$ (учли (4.26)). Высота резонансного пика равна $|s_{m1}|^2/\|s_1\|^2$, а его ширина на половине высоты есть $2\operatorname{Im} p = 2\|\mathbf{b}_1\|^2\beta^2\|s_1\|^2\varepsilon^{4\pi/\omega} + O(\varepsilon^{6\pi/\omega})$ (см. (4.31)). Эти формулы применимы и в случае простого собственного числа резонатора, при этом они совпадают с формулами, полученными в [3] и [9].

Литература

1. L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, A. A. Pozharskii, *On electron transport in 3D quantum waveguides of variable cross-section.* — Nanotechnology **17** (2006), 19–23.
2. L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov, *Asymptotic theory of resonant tunneling in 3D quantum waveguides of variable cross-section.* — SIAM J. Appl. Math. **70**, No. 5 (2009), 1542–1566.
3. Л. М. Баскин, М. Кабардов, П. Нейттаанмяки, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *Асимптотика и численное исследование резонансного туннелирования в двумерных квантовых волноводах переменного сечения.* — Ж. вычисл. мат. и мат. физики, **53** No. 11 (2013), 1835–1855; Engl. transl.: Computational Math. and Math. Physics, **53**, no. 11 (2013), 1664–1683.
4. Л. М. Баскин, Б. А. Пламеневский, О. В. Сарафанов, *Асимптотическая теория резонансного туннелирования в трехмерных волноводах переменного сечения в присутствии магнитного поля.* — Пробл. матем. анал. **74** (2013), 27–44; Engl. transl.: J. of Math. Sciences **196**, No. 4 (2014), 469–489.
5. L. Baskin, M. Kabardov, P. Neittaanmäki, O. Sarafanov, *Asymptotic and numerical study of electron flow spin-polarization in 2D waveguides of variable cross-section in the presence of magnetic field*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **37**, no. 7 (2013), 1072–1092.
6. L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, *Semiconductor device and method to control the states of the semiconductor device and to manufacture the same.* Patent 121489, Finland, 2010.
7. L. M. Baskin, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, A. A. Pozharskii, *Arrangement in a waveguide branch for channeling an electron flow and corresponding method.* Patent 122219, Finland, 2011.
8. L. M. Baskin, M. M. Kabardov, P. Neittaanmäki, B. A. Plamenevskii, O. V. Sarafanov, Device for detecting magnetic fields, Patent 124670 B, Finland, 2013.

9. L. Baskin, P. Neittaanmäki, B. Plamenevskii, O. Sarafanov, *Resonant Tunneling: Quantum Waveguides of Variable Cross-Sections, Asymptotics, Numerics, and Applications.* Lecture Notes on Numerical Methods in Engineering and Sciences, Springer, 2015.
10. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* М. Наука, 1991.

Sarafanov O. V. Asymptotics of the resonant tunneling of high-energy electrons in two-dimensional quantum waveguides of variable cross-section.

The waveguide occupies a strip in $\mathbb{R}^2$ having two identical narrows of small diameter ε. An electron wave function satisfies the Helmholtz equation with the homogeneous Dirichlet boundary condition. The energy of electrons may be rather high, i.e. any (fixed) number of waves can propagate in the strip far from the narrows. As $\varepsilon \to 0$, a neighbourhood of a narrow is supposed to transform into a neighbourhood of the common vertex of two vertical angles. The part of the waveguide between the narrows as $\varepsilon = 0$ is called the resonator. An asymptotics of the transition coefficient is obtained in the waveguide as $\varepsilon \to 0$. Near a degenerate eigenvalue of the resonator, the leading term of the asymptotics has two sharp peaks. Position and shape of the resonant peaks are described.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетская набережная, д. 7-9
199034 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: o.sarafanov@spbu.ru

Поступило 2 ноября 2017 г.