Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

М. М. Попов, Н. М. Семченок

К РАСЧЕТАМ АМПЛИТУД РАССЕЯНИЯ В ЗАДАЧАХ ДИФФРАКЦИИ НА ВЫТЯНУТЫХ ТЕЛАХ ВРАЩЕНИЯ

В работе [1] были получены формулы для амплитуд рассеяния плоской волны на гладких вытянутых телах вращения (осесимметричный случай) в направлении предельных лучей и выполнены расчеты по ним. Данная заметка представляет собой дополнение к этой работе и содержит более детальное обсуждение пунктов, не получивших в ней, на наш взгляд, должного рассмотрения и, в частности, добавлены рисунки 1–4.

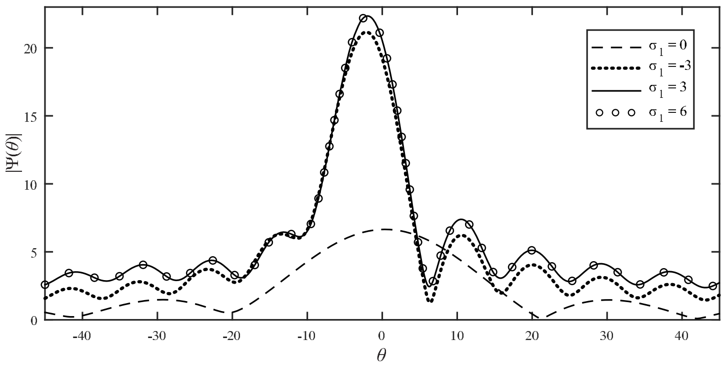

Рис. 1. Зависимость амплитуды рассеяния от значения σ_1 для случая погранслоя Фока с условиями Дирихле на границе рассеивателя.

Остановимся вкратце на основных идеях нашего подхода. Задачи дифракции рассматриваются в коротковолновом приближении, когда

Ключевые слова: коротковолновая дифракция, предельные лучи, амплитуды рассеяния.

Работа поддержана грантом РФФИ No. 17-01-00529_А.

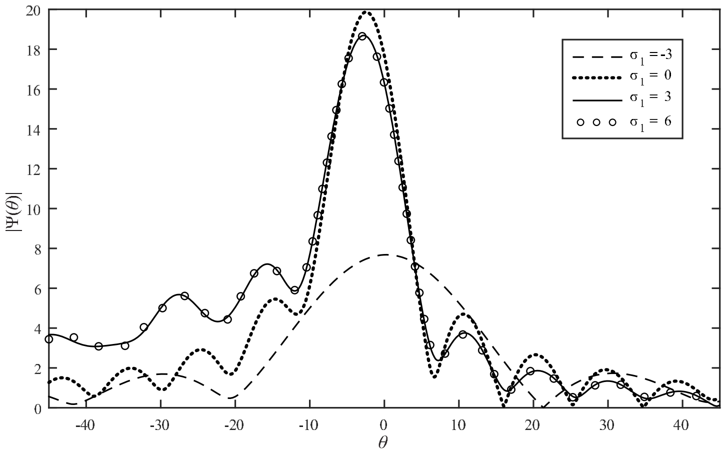

Рис. 2. Зависимость амплитуды рассеяния от значения σ_1 для случая погранслоя Фока с условиями Неймана на границе рассеивателя.

длина набегающей волны много меньше геометрических размеров рассеивателя. В этом случае оказывается, что формула Грина для волнового поля во внешности тела приводит к быстро осциллирующим интегралам, которые, очевидно, вносят существенный вклад в величину этого поля лишь в критических (стационарных) точках соответствующих фазовых функций. При этом в окрестности границы свет-тень, где волновое поле скользит вдоль границы рассеивателя, стационарные точки соответствуют предельным лучам, т.е. лучам, касающимся поверхности рассеивателя в точках границы свет-тень (экватора). Это обстоятельство позволяет получить формулы для амплитуд рассеяния в направлении предельных лучей в виде интегралов от тока по части границы рассеивателя в окрестности экватора, где возникает специфический пограничный слой. В этом погранслое происходит гладкий переход волнового поля от освещенной части тела к зоне тени. Таким образом мы приходим к задаче Фока [2] о нахождении тока волнового поля именно в этом погранслое (принцип локальности коротковолновой асимптотики).

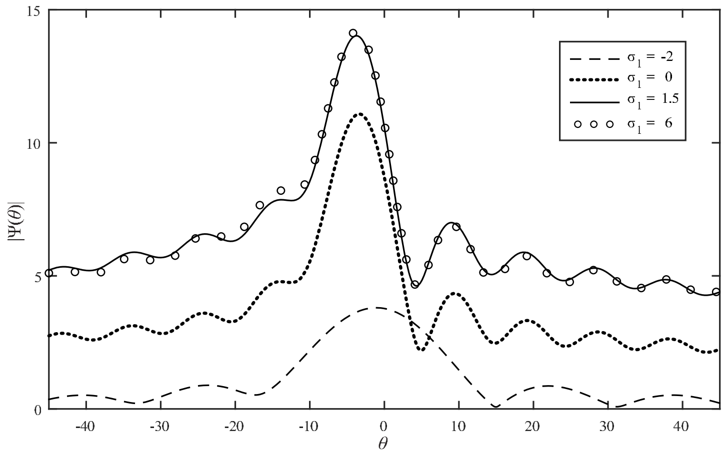

Рис. 3. Зависимость амплитуды рассеяния от значения σ_1 для случая сильно вытянутого тела с условиями Дирихле на границе рассеивателя.

Вычисление тока в окрестности экватора в наших работах осуществляется численными методами. Заметим прежде всего, что с математической точки зрения, возникающая в погранслое задача представляет собой задачу рассеяния для уравнений типа Шредингера, в которой набегающее волновое поле со стороны освещенной части рассеивателя задается своей лучевой асимптотикой, см., например, [3, 4].

В случае строго выпуклого тела вращения, когда кривизна его поверхности в направлении падающих лучей в точках экватора не обращается в нуль, мы приходим к погранслою и задаче В. А. Фока, которая решается точно методом разделения переменных. Это позволяет получить аналитические выражения для амплитуд рассеяния в виде не простых интегралов, содержащих функции Эйри и их производные. В дальнейшем предпологается исследовать эти интегралы с целью их упрощения.

В случае сильно вытянутого тела переменные в возникающих уравнениях не разделяются и остается лишь использовать численные методы решения.

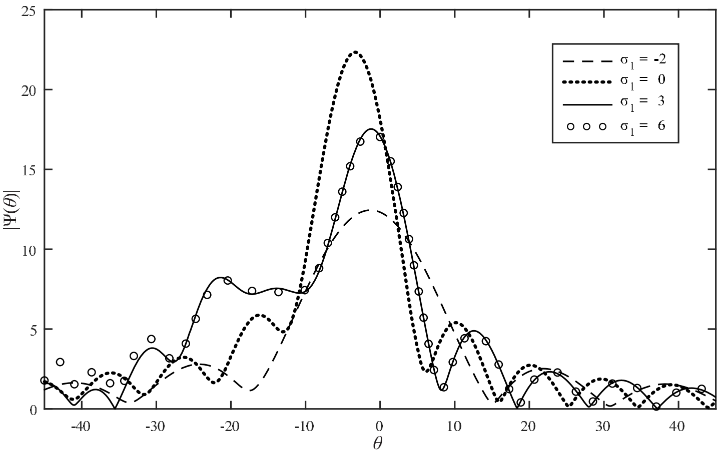

Рис. 4. Зависимость амплитуды рассеяния от значения σ_1 для случая сильно вытянутого тела с условиями Неймана на границе рассеивателя.

Во внутренних растянутых переменных σ, ν погранслоя (σ – безразмерная длина дуги, отсчитываемая от экватора в направлении лучей, и ν – безразмерная нормаль к поверхности рассеивателя) задача рассеяния ставится в полуплоскости $-\infty < \sigma < +\infty$, $\nu \geqslant 0$. При $\sigma \to -\infty$ поле набегающей и отраженной волны задается своей лучевой асимптотикой. При $\nu = 0$ ставятся краевые условия Дирихле или Неймана. Сложнее обстоит дело с условием при $\nu \to +\infty$, поскольку ни падающая ни отраженная волны не убывают, точнее не принадлежат $L_2(0,\infty)$, но остаются ограниченными.

Численными методами задача решается в прямоугольнике $-|\sigma_0| \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, $0 \leqslant \nu \leqslant \nu_*$, границы которого подбираются экспериментально. При $\sigma = \sigma_0$ ставится условие Коши, а σ_0 подбирается из условия согласования токов, даваемых лучевой асимптотикой и сеточным решение.

При $\nu = \nu_*$ вводится фиктивная граница, где полное поле обращается в нуль, что и приводит к появлению фиктивной же отраженной волны. При этом величина ν_* подбирается так, чтобы минимизировать вклад этой волны в ток на границе $\nu = 0$ на интервале $\sigma_0 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, см. подробнее работы [3, 4].

На Рис. 1–4 показано влияние границы прямоугольника $\sigma = \sigma_1$ на амплитуды рассеяния в зависимости от краевых условий при $\nu = 0$ для погранслоев Фока и с точками уплощения на экваторе в случае сильно вытянутых тел. Величина угла θ на них, так же как и в статье [1], откладывается в градусах по оси абсцисс. Интервал углов во всех вычислениях берется один и тот же, хотя, как отмечено в статье [1], понятие малости углов зависит от значений больших параметров, см. следующий пункт данной заметки. Расчеты на рисунках 1–4 проведены для одного и того же значения параметров M_0 и M. При условии Дирихле ток волнового поля быстрее убывает, чем при условии Неймана, но стабильность графиков для амплитуд достигается практически при одних и тех же значениях σ_1. Можно отметить также, что при условии Неймана волновое поле в области тени оказывается больше, чем при условии Дирихле.

Остановимся на вопросе о малости углов θ, при которых формулы для амплитуд рассеяния оказываются справедливыми, см. равенства (14) и (17) из [1].

Ограничения на углы θ выводятся из естественного для асимптотических разложений требования, что в главном члене асимптотики все слагаемые должны быть одного порядка и, в частности, оба слагаемых под знаком экспоненты в равенствах (14), (17) из [1], т.е. чтобы выполнялось требование $\theta M_0 = O(1)$ для погранслоя Фока, и для случая сильно вытянутого тела $\theta M^3 = O(1)$ при $M_0 \to \infty$ и $M \to \infty$ соответственно. Это вытекает из того, что безразмерные растянутые координаты σ и ν имеют порядок $O(1)$. Напомним, что сам символ $O(1)$ допускает существование некоторой, вообще говоря, неопределенной константы, но уже не зависящей от большого параметра. Если же эту константу взять равной единице, то для максимального угла $\theta_{\max}$, измеряемого, разумеется, в радианах, получаем $|\theta_{\max}| = M_0^{-1}$ для вытянутых тел и $|\theta_{\max}| = M^{-3}$ для сильно вытянутых тел.

Напомним, что на рисунках 1–4 и в статье [1] интервал углов θ брался в расчетах независимым от большого параметра погранслоя и углы θ измерялись в градусах. Приведем интервалы допустимых углов, измеряемых в градусах, для разных величин больших параметров M_0 и M, соответствующим рисункам 3, 4 и 7, 8 из [1]. В случае погранслоя Фока и $M_0 = 2.2$ и $M_0 = 2.9$ получаем соответственно $|\theta_{\max}| \approx 26^\circ$ и

$|\theta_{\max}| \approx 20°$. Таким образом, допустимые значения для углов на Рис.3 и Рис.4 описываются следующими неравенствами $-26° \leqslant \theta \leqslant 26°$ и $-20° \leqslant \theta \leqslant 20°$ соответственно.

Для сильно вытянутого тела (погранслой с точками распрямления на экваторе) для значений $M = 1.8$ и $M_0 = 3.0$ интервалы углов на Рис. 7 и Рис. 8 описываются неравенствами $-9.7° \leqslant \theta \leqslant 9.7°$ и $-2.1° \leqslant \theta \leqslant 2.1°$ соотыветственно.

Таким образом, допустимые углы θ зависят от большого параметра погранслоя и с его ростом убывают (суживаются), а максимум излученного поля приближается к предельному лучу $\theta = 0$, который является геометрической границей тени.

Литература

1. М. М. Попов, Н. М. Семченок, *Амплитуды рассеяния в окрестности предельных лучей в коротковолновой дифракции на вытянутых телах вращения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **461** (2017), с. 254–259.
2. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн.* — Изд-во “Советское радио”, Москва (1970), 517 с.
3. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, Н. М. Семченок, *О коротковолновой дифракции на вытянутом теле. Численные эксперименты.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 65–78.
4. М. М. Попов, Н. М. Семченок, Н. Я. Кирпичникова, *О коротковолновой дифракции на сильно вытянутом теле вращения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **451** (2016), 156–177.

Popov M. M., Semtchenok N. M. On the computations of scattering amplitudes in the problems of diffraction by elongated bodies of revolution.

This paper is complements to article “Scattering amplitudes in a vicinity of the limit rays in shortwave diffraction by elongated bodies of revolution”. It contains discussions of some points of the article which worth of more detail considerations, such as an influence of the integration limits on computation result of scattering amplitudes and estimation of the permissible values of the scattering angle intervals as functions of parameters of the problems.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
192288, Санкт-Петербург,
наб. р. Фонтанки, д. 27, Россия
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 9 ноября 2017 г.