

М. М. Попов, Н. М. Семченко

**АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ В ОКРЕСТНОСТИ  
ПРЕДЕЛЬНЫХ ЛУЧЕЙ В КОРОТКОВОЛНОВОЙ  
ДИФРАКЦИИ НА ВЫТЯНУТЫХ ТЕЛАХ  
ВРАЩЕНИЯ**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается в коротковолновом приближении задача дифракции плоской волны на гладких вытянутых телах вращения (осесимметрический случай). Вычисляются амплитуды рассеяния вперед в направлении предельных лучей и затем изучается как влияет степень вытянутости тела на характер этих амплитуд.

В рассматриваемой задаче главный вклад в рассеяние вперед дает окрестность границы свет–тень, где лучи падающей волны касаются поверхности тела, порождая волновое поле, скользящее вдоль поверхности рассеивателя. Такое волновое поле для строго выпуклого тела впервые изучалось в работах В. А. Фока [1] в сороковых годах прошлого века, что и привело к созданию принципа локальности асимптотики в задачах коротковолновой дифракции. В. А. Фоком изучалась специфическая область, охватывающая границу свет–тень (эта область в последующих работах стали называть погранслоем Фока), где волновое поле в главном члене асимптотики описывалось параболическим уравнением Леонтовича–Фока. Чтобы построить последующие члены асимптотического разложения приходится решать рекуррентную систему неоднородных параболических уравнений. Подробное изложение этой техники в двумерном случае изложено в монографии [2]. Решение задачи дифракции в погранслое Фока описывает гладкий переход от формул лучевого метода к дифракционному полю в окрестности предельного луча и в зоне тени, где возникают волны соскальзывания.

---

*Ключевые слова:* коротковолновая дифракция, параболическое уравнение Леонтовича–Фока, рассеяние на выпуклых телах, лучевой метод, пограничный слой.

Работа была поддержана грантом РФФИ №17-01-00529-А.

Отметим, что непосредственное применение лучевого метода в погранслое является не корректным по причине того, что сами лучевые формулы там приобретают сингулярность, и они приводит также к разрыву волнового поля на предельном луче. Заметим также, что приближение Кирхгофа в лучевом методе дает неверное описание для тока на поверхности рассеивателя в погранслое в окрестности границы свет-тень. Как выяснилось [3], если в случае условия Дирихле различие с током по Фоку невелико, то при условии Неймана это различие уже значительно.

В работе [4] 1977 года изучалась задача рассеяния на строго выпуклом теле в  $n$ -мерном случае. В этой работе была получена оценка амплитуды рассеяния в точности вперед, т.е. строго на предельном луче, в терминах площади поверхности рассеивателя, где лучи падающей волны образуют угол близкий к  $\pi/2$ . При этом авторы использовали приближение Кирхгофа для описания волнового поля в области скользящих лучей.

В отличие от статьи [4], мы рассматриваем упрощенный вариант задачи рассеяния, а именно, осесимметрическую задачу, когда достаточно исследовать волновое поле лишь в плоскости, содержащей ось вращения тела. Рассеиватель предполагается компактным и имеющим гладкую границу. Изучаются два случая: первый, когда рассеиватель строго выпуклый, и второй, когда он сильно вытянутый и его поверхность имеет на границе свет-тень точки уплощения в направлении оси вращения.

Используемая нами математическая техника значительно отличается от работы [4], и базируется на использовании формулы Грина для внешности тела вращения, а также на применении метода параболических уравнений Леонтовича-Фока для описания поля в области скользящих лучей. Тем самым мы не используем приближение Кирхгофа.

Напомним формулировку рассматриваемых задач, подробнее см. также статьи [3, 5].

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Поверхность рассеивателя образуется вращением вокруг оси  $z$ , гладкой, выпуклой кривой  $x = f(z)$ . Кривую в сечении поверхности тела плоскостью  $x, z$  обозначим  $\ell$  и введем в ее окрестности криволинейные координаты  $s$  и  $n$ , где  $s$  — длина дуги вдоль  $\ell$ , отсчитываемая от

экватора (т.е. границы свет-тень) в направлении оси  $z$ , а  $n$  – длина нормали к ней. Через  $Q(s)$  обозначим точки на поверхности рассеивателя, а точку наблюдения, в которой мы будем вычислять поле, назовем  $P_0$  (см. Рис. 1).

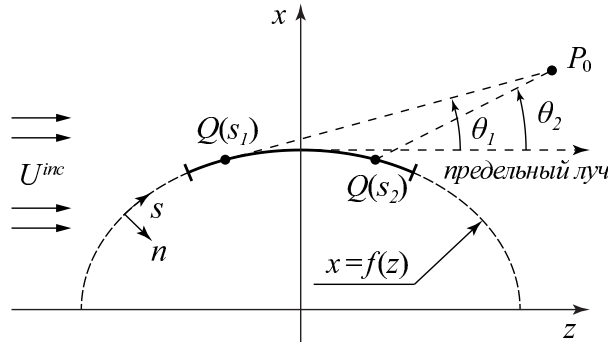


Рис. 1. Геометрия задачи.

Падающая плоская волна  $U^{\text{inc}}$  имеет вид  $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$ , где  $k$  волновое число. В коротковолновом приближении предполагается, что длина волны много меньше размеров тела. Рассеяное поле  $U^{\text{ref}}$  является решением однородного уравнения Гельмгольца  $(\Delta + k^2) U^{\text{ref}} = 0$ . Так как задача обладает осевой симметрией, отыскивается решение, не зависящее от азимутального угла  $\varphi$ . На поверхности рассеивателя задается краевое условие (Дирихле или Неймана) для полного поля  $U = U^{\text{inc}} + U^{\text{ref}}$ . Для осесимметричного решения условия излучения должны выполняться в каждом сечении плоскостью  $\varphi = \text{const}$ , и, следовательно, всё решение достаточно построить только в плоском сечении. Поэтому для расчетов волнового поля вдали от рассеивателя мы будем использовать двумерный вариант формулы Грина в плоскости  $x, z$ .

В случае краевого условия Дирихле токком называется производная по нормали от волнового поля  $\partial U / \partial n$  в точках  $Q(s)$  на поверхности тела. При этом формула Грина имеет вид

$$U(P_0) = - \int_{\Gamma} G(Q(s), P_0) \frac{\partial U(Q(s))}{\partial n} ds, \quad (1)$$

где  $G(Q(s), P_0)$  функция Грина осесимметричного уравнения Гельмгольца.

В случае краевого условия Неймана током является значение волнового поля  $U(Q(s))$  на поверхности тела и формула Грина принимает вид

$$U(P_0) = \int_{\ell} U(Q(s)) \frac{\partial G(Q(s), P_0)}{\partial n} ds. \quad (2)$$

Из приведенных выше формул с очевидностью следует, что вклад в значение волнового поля в любой точке наблюдения  $P_0$  вносят все точки границы рассеивателя. Однако, в случае коротковолнового приближения, т.е. при  $k \rightarrow \infty$ , функция Грина приобретает быстро осциллирующий множитель  $\exp\{ikR(Q(s), P_0)\}$ , где  $R(Q(s), P_0)$  расстояние между точкой наблюдения  $P_0$  и точкой  $Q(s)$  с координатами  $(x(s), z(s))$  на границе рассеивателя.

$$R(Q(s), P_0) = \sqrt{(x_0 - x(s))^2 + (z_0 - z(s))^2}.$$

В погранслое в окрестности границы свет-тень, где волновое поле скользит вдоль границы рассеивателя, так также содержит осциллирующий множитель  $\exp\{iks\}$ .

После выделения упомянутых выше быстро осциллирующих множителей, интегралы (1) и (2) приобретают типичную форму для применения метода стационарной фазы

$$\int_{\ell_{bl}} \exp\{ik(R(Q(s), P_0) + s)\} V(s) ds, \quad (3)$$

где  $V(s)$  уже является медленно меняющейся функцией  $s$ , а интегрирование ведется уже только по участку границы попадающему в погранслою  $\ell_{bl}$ .

Ясно, что такие интегралы дают существенный вклад лишь в стационарных точках. Можно убедиться, что стационарной точке интеграла (3) соответствует предельный луч, касающийся границы свет-тень при  $s = 0$ . Таким образом, коротковолновая асимптотика волнового поля в направлении предельных лучей зависит главным образом от поля в погранслое около границы свет-тень.

### §3. ФУНКЦИЯ ГРИНА ОСЕСИММЕТРИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

В цилиндрических координатах  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z$ , где  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , осесимметрическое уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$LU \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k^2 U = 0.$$

Поскольку мы ищем решение обладающее осевой симметрией, то достаточно строить решение лишь в полуплоскости, скажем,  $\varphi = 0$ . Поэтому вместо  $r$  можно использовать координату  $x$  и уравнение для функции Грина  $G$  в этом случае примет вид

$$LG = \frac{\delta(x - x_0)}{x} \delta(z - z_0), \quad x > 0, \quad -\infty < z < +\infty.$$

Решение будем строить методом разделения переменных. Положим

$$G = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda|z-z_0|} g(x, x_0; k, \lambda).$$

Тогда для  $g$  получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial g}{\partial x} + (k^2 - \lambda^2) g = \frac{\delta(x - x_0)}{x}. \quad (4)$$

Однородное уравнение (4) сводится к уравнению Бесселя нулевого индекса от аргумента  $\xi = v(\lambda)x$ , где  $v(\lambda) = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$ . Поэтому, как хорошо известно, функция Грина  $g$  строится из двух линейно независимых решений этого уравнения. При  $0 \leq x < x_0$  берем функцию Бесселя  $J_0(\xi)$ , не имеющую сингулярности на оси  $x = 0$ . При  $x > x_0$  выбираем функцию Ханкеля  $H_0^{(1)}(\xi)$ , чтобы удовлетворить условиям излучения.

В результате получаем следующее выражение для функции Грина  $G$  осесимметричного уравнения Гельмгольца при  $x < x_0$ :

$$G(x, x_0; z - z_0, k) = \frac{1}{4i} \int_{\Gamma} d\lambda e^{i\lambda|z-z_0|} J_0(v(\lambda)x) H_0^{(1)}(v(\lambda)x_0). \quad (5)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  в формуле (5) и разрезы изображены на Рис. 2. Регулярная ветвь функции  $v(\lambda) = \sqrt{k^2 - \lambda^2}$  на комплексной плоскости  $\lambda$  выбирается условием  $\arg v(\lambda) = 0$  при  $-k < \lambda < k$  с разрезами от точек ветвления.

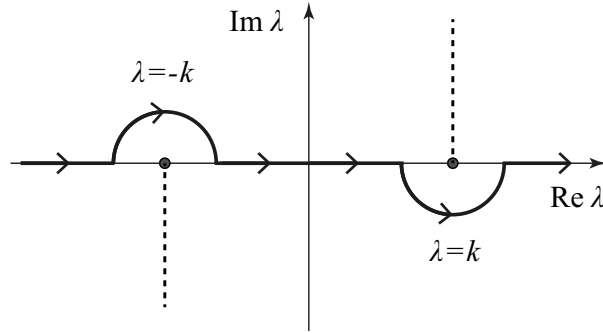


Рис. 2. Контур интегрирования.

Далее нам требуется построить асимптотику функции Грина  $G$  при  $k \rightarrow \infty$ . Большой параметр выделяется в интеграле (5) явно заменой  $\lambda = k\mu$ ,  $v(\lambda) = k\sqrt{1 - \mu^2}$ . При этом на лучах  $-\infty < \mu < -1$  и  $1 < \mu < +\infty$  аргумент  $\sqrt{1 - \mu^2}$  равен  $\pi/2$ , так что функции  $H_0^{(1)}$  и  $J_0$  имеют чисто мнимые аргументы  $v = ik \left| \sqrt{1 - \mu^2} \right|$ .

Напомним, что точка  $P_0$  с координатами  $(x_0, z_0)$  располагается в окрестности предельного луча вдалеке от рассеивателя, а точка  $Q(s)$  с координатами  $(x(s), z(s))$  расположена в погранслое в окрестности границы свет-тень на поверхности тела. Поскольку в коротковолновом приближении линейные размеры тела вращения велики по сравнению с длиной волны, аргумент функций  $J_0(vx(s))$  и  $H_0^{(1)}(vx_0)$  оказывается большим по модулю. Поэтому в интеграле (5) функции Бесселя и Ханкеля можно заменить их асимптотикой

$$\begin{aligned} J_0(vx) &= \sqrt{\frac{2}{\pi vx}} \left[ \cos\left(vx - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{vx}\right) \right], \\ H_0^{(1)}(vx_0) &= \sqrt{\frac{2}{\pi vx_0}} \exp\left\{i\left(vx_0 - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{vx_0}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Подстановка (6) в (5) приводит к интегралам, подходящим для применения метода стационарной фазы

$$\begin{aligned} G &\simeq \frac{-1}{4\pi\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} e^{ik\{\mu|z-z_0| + \sqrt{1 - \mu^2}(x+x_0)\}} \\ &+ \frac{-i}{4\pi\sqrt{x}\sqrt{x_0}} \int \frac{d\mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} e^{ik\{\mu|z-z_0| + \sqrt{1 - \mu^2}(x_0-x)\}} \end{aligned} \tag{7}$$

Так как рассматриваемая задача осесимметрична, то достаточно построить только асимптотику для второго слагаемого в формуле (7) в полуплоскости  $x > 0$ , которое мы обозначим  $G_+$ .

Стационарная точка  $\mu_*$  функции  $F = \mu|z - z_0| + \sqrt{1 - \mu^2}(x_0 - x)$  и значение второй производной  $F$  в этой точке приведены ниже

$$\mu_* = \frac{|z - z_0|}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2}}; \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \mu^2} \right|_{\mu_*} = - \frac{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{3/2}}{(x_0 - x)^2}.$$

Последующие стандартные вычисления по методу стационарной фазы приводят к следующему выражению для асимптотики функции Грина  $G_+$  (далее в статье мы будем опускать индекс  $+$  у функции Грина) в полуплоскости  $x > 0$  при  $k \rightarrow \infty$ :

$$G_+ = - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{kxx_0}} \frac{\exp \left\{ ik \sqrt{(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2} \right\}}{[(x_0 - x)^2 + (z_0 - z)^2]^{1/4}}. \quad (8)$$

#### §4. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ АМПЛИТУД РАССЕЙЯНИЯ

Далее нам потребуется разложить фазовую функцию  $\Phi = R(Q(s), P_0) + s$  по степеням  $s$  в погранслое Фока для вытянутого тела и для сильно вытянутого тела.

Начнем с вычисления производных по  $s$  от функции  $R(Q(s), P_0)$ . При этом оказывается удобным воспользоваться техникой дифференцирования вектор-функций скалярного аргумента. С этой целью введем дополнительные обозначения. Пусть  $\vec{t}(s)$  есть единичный вектор касательной к границе тела  $\ell$ , направленный в сторону возрастания  $s$ , а  $\vec{n}(s)$  – единичный вектор нормали, направленной внутрь рассеивателя (т.е. внешней по отношению к области применения формулы Грина). При этом, очевидно, что  $\vec{t}(0) = \vec{e}_z$  и  $\vec{n}(0) = -\vec{e}_x$ , где  $\vec{e}_x$  и  $\vec{e}_z$  орты используемой декартовой системы координат (см. Рис. 1). Тогда формулы Френе принимают вид

$$\frac{d}{ds} \vec{t}(s) = K(s) \vec{n}(s); \quad \frac{d}{ds} \vec{n}(s) = -K(s) \vec{t}(s),$$

где  $K(s) \geq 0$  – кривизна границы в точке  $s$ .

Введем два дополнительных вектора, направленных из точки  $Q(s)$  в точку наблюдения  $P_0$

$$\begin{aligned}\vec{R}(Q(s), P_0) &= (x_0 - x(s))\vec{e}_x + (z_0 - z(s))\vec{e}_z; \\ \vec{r}(Q(s), P_0) &= \frac{1}{R(Q(s), P_0)}\vec{R}(Q(s), P_0).\end{aligned}$$

Для их производных по  $s$  получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\vec{R}(Q(s), P_0) &= -\vec{t}(s); \\ \frac{d}{ds}\vec{r}(Q(s), P_0) &= \frac{(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s))\vec{r}(Q(s), P_0)}{R(Q(s), P_0)} - \frac{\vec{t}(s)}{R(Q(s), P_0)}.\end{aligned}\quad (9)$$

Приведем еще две вспомогательные формулы

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s)) &= \frac{(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s))^2 - 1}{R(Q(s), P_0)} \\ &\quad + K(s)(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{n}(s));\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{n}(s)) &= \frac{(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{n}(s))(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s))}{R(Q(s), P_0)} \\ &\quad - K(s)(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s)).\end{aligned}$$

Эти формулы позволяют последовательно вычислять производные высших порядков от функции  $R(Q(s), P_0)$ . Так, например,

$$\frac{d^2}{ds^2}R(Q(s), P_0) = \frac{1 - (\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{t}(s))^2}{R(Q(s), P_0)} - K(s)(\vec{r}(Q(s), P_0), \vec{n}(s)). \quad (10)$$

Все необходимые производные нам нужно вычислять в стационарной точке  $s = 0$ .

Угол между направлением на точку  $P_0$ , задаваемым вектором  $\vec{r}(Q(0), P_0)$  и направлением предельного луча, описываемым вектором  $\vec{t}(0)$ , будем обозначать  $\theta$ . Здесь и далее в статье  $\theta = \theta(s = 0)$  и этот угол отсчитывается от предельного луча в положительном направлении (см. Рис. 1). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}(\vec{r}(Q(0), P_0), \vec{t}(0)) &= \cos \theta, \\ (\vec{r}(Q(0), P_0), \vec{n}(0)) &= \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta.\end{aligned}$$



В последующих вычислениях мы будем рассматривать волновое поле в дальней зоне, т.е. в зоне Фраунгофера (когда  $R(Q(s), P_0) \rightarrow \infty$ ), поэтому слагаемыми в формулах для производных, которые содержат  $R(Q(s), P_0)$  в знаменателе, будем пренебрегать.

Вернемся теперь к стационарной точке фазовой функции  $\Phi = R(Q(s), P_0) + s$ . Принимая во внимание первое из равенств (9), получаем

$$\left. \frac{d\Phi}{ds} \right|_{s=0} = -(\vec{r}(Q(0), P_0), \vec{t}(0)) + 1 = -\cos\theta + 1 = 0, \quad (11)$$

т.е. стационарная точка фазовой функции соответствует точке наблюдения  $P_0$  лежащей на предельном луче  $x = f(0)$ , которому соответствует  $\theta = 0$ . Отметим, что при этом из (10) получаем, что  $\left. \frac{d^2\Phi}{ds^2} \right|_{s=0} = 0$ , т.е. эта стационарная точка оказывается вырожденной. Далее оказывается, что старший порядок производной, которую необходимо сохранить под знаком экспоненты при разложении фазы  $\Phi$  по степеням  $s$ , будет разным для вытянутого тела (погранслоя Фока) и сильно вытянутого тела (погранслоя с точкой уплощения на экваторе).

В дальнейшем мы будем рассматривать амплитуды рассеяния в малой окрестности предельных лучей при условии, что  $\cos\theta \simeq 1$ ,  $\sin\theta \simeq \theta$ .

В результате вычислений по описанной выше схеме приходим к следующей формуле для волнового поля

$$U \simeq \text{Const} \frac{\exp\{ikz_0\}}{\sqrt{z_0}} \Psi(\theta) \quad (12)$$

в которой  $\Psi(\theta)$  амплитуда рассеяния в направлении близком к предельному лучу. Постоянная  $\text{Const}$ , которую мы вычислим ниже, и  $\Psi(\theta)$  зависят от вида погранслоя в окрестности границы свет-тень и от краевых условий на поверхности тела вращения.

**4.1. Погранслоя Фока.** В этом случае достаточно вычислить третью производную по  $s$  от  $R(Q(s), P_0)$  при  $s = 0$ , так как уже она не обращается в нуль на предельном луче (в стационарной точке). Применяя описанную выше технику вычисления производных, приходим к следующему результату

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^3}{ds^3} R(Q(s), P_0) \right|_{s=0} &= 3 \frac{\cos\theta \sin^2\theta}{R^2(0, P_0)} + 3 \frac{\cos\theta \sin\theta}{R(0, P_0)} K(0) \\ &\quad - K'(0) \sin\theta + K^2(0) \cos\theta \simeq K^2(0), \end{aligned}$$

где учтено, что  $R(Q(0), P_0) \gg 1$ ,  $\sin \theta \simeq \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1$  и производная  $K'(0)$  обращается в нуль на границе свет-тень в погранслое Фока.

Таким образом, приходим к следующему разложению фазы в интегралах (1–3) при положении точки наблюдения  $P_0$  вблизи предельного луча в дальней зоне

$$\begin{aligned} ik \{R(Q(s), P_0) + s\} &\simeq ik \left\{ z_0 + \theta K(0) \frac{s^2}{2} + K^2(0) \frac{s^3}{6} \right\} \\ &= ik \left\{ z_0 + \frac{1}{k} \left( \theta M_0 \sigma^2 + \frac{\sigma^3}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $M_0 = (\frac{1}{2}kK^{-1}(0))^{1/3}$  — большой параметр Фока, а  $\sigma = M_0K(0)s$  — безразмерная длина дуги  $\ell$  в зоне Фока.

В случае краевого условия Неймана вклад в интеграл (3), точнее в медленно меняющуюся функцию  $V(s)$ , вносит нормальная производная от функции Грина.

В главном члене при  $k \gg 1$  получаем

$$\frac{\partial}{\partial n} G \simeq e^{ikR(Q(s), P_0)} ik \frac{\partial}{\partial n} R(Q(s), P_0).$$

Раскладывая нормальную производную от  $R(Q(s), P_0)$  по степеням  $s$  в зоне Фока и сохраняя лишь главный член, получаем

$$\frac{\partial}{\partial n} R(Q(s), P_0) \simeq -K(0)s = -\frac{\sigma}{M_0}.$$

Далее приведем формулы для амплитуд рассеяния  $\Psi^{(D)}(\theta)$  и  $\Psi^{(N)}(\theta)$  в случае краевых условий Дирихле и Неймана соответственно. Для этого введем дополнительные обозначения  $I^{(D)}(\sigma)$  и  $I^{(N)}(\sigma)$  для токов в зоне Фока, тогда

$$\begin{aligned} \Psi^{(D)}(\theta) &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \exp \left\{ i \left( \theta M_0 \sigma^2 + \frac{1}{3} \sigma^3 \right) \right\} I^{(D)}(\sigma) d\sigma; \\ \Psi^{(N)}(\theta) &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sigma \exp \left\{ i \left( \theta M_0 \sigma^2 + \frac{1}{3} \sigma^3 \right) \right\} I^{(N)}(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (14)$$

При этом постоянные множители  $C^{(D)}$  и  $C^{(N)}$  (соответствующие множителю Const в (12)) будут содержать поперечный радиус кривизны

$f(0)$  тела вращения на границе свет-тень

$$C^{(D)} = \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^2}{f(0)M_0}; \quad C^{(N)} = \frac{\exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^2}{f(0)M_0}. \quad (15)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Безразмерная длина дуги  $\sigma$  в зоне Фока по порядку величины оценивается как  $O(1)$  при волновом числе  $k \rightarrow \infty$  и все слагаемые в экспонентах (14) должны быть одного порядка. Отсюда возникает условие на угол  $\theta$ , а именно,  $\theta M_0 = O(1)$ .

**4.2. Погрансло́й с точкой уплощения.** В этом случае рассеиватель образован вращением вокруг оси  $z$  кривой  $x = f(0) - \varkappa z^4/4!$ ,  $\varkappa > 0$ . Граница свет-тень (экватор) теперь состоит из точек уплощения, в которых как кривизна  $K(s)$ , так и ее производная  $K'(s)$  обращаются в нуль. Напомним, что здесь, как и выше,  $s$  это длина дуги вдоль меридианов, отсчитываемая от точек касания предельных лучей, т.е. от экватора. Стационарной точкой интегралов (1)–(3) является точка  $s = 0$ , соответствующая предельному лучу, и эта точка оказывается сильно вырожденной. Опуская подробные вычисления, приведем разложение по степеням  $s$  для фазовой функции, аналогичное формуле (13),

$$\begin{aligned} ik \{R(Q(s), P_0) + s\} &\simeq ik \left\{ z_0 + \theta K''(0) \frac{s^4}{4!} + (K''(0))^2 \frac{s^7}{7 \cdot 8 \cdot 9} \right\} \\ &= ik \left\{ z_0 + \frac{1}{k} \left( \theta M^3 \frac{\sigma^4}{6} + \frac{\sigma^7}{7 \cdot 9} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В этом разложении  $K''(0) = \varkappa$ , безразмерная длина дуги  $\sigma = 0.5 (4\varkappa)^{2/7} k^{1/7} s$ , и большой параметр погранслоя  $M = k^{1/7} (4\varkappa)^{-1/21}$  (подобный большому параметру Фока). Напомним, что погрансло́й в случае сильно вытянутого тела характеризуется масштабами  $k^{1/7} s = O(1)$  и  $k^{4/7} n = O(1)$ , см. подробности в [3, 5].

Условие на малость угла  $\theta$  здесь имеет вид  $\theta M^3 = O(1)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

При краевом условии Неймана вклад в медленно меняющуюся функцию  $V(s)$  от нормальной производной функции Грина дает третья производная по  $s$  от  $\frac{\partial}{\partial n} R(Q(s), P_0)$ , а именно,

$$\left. \frac{d^3}{ds^3} \left( \frac{\partial}{\partial n} R(Q(s), P_0) \right) \right|_{s=0} \simeq -K''(0) \cos \theta \simeq -\varkappa. \quad (16)$$

Таким образом, при краевом условии Неймана появляется дополнительный множитель в формуле для волнового поля в окрестности предельного луча  $-ik\kappa s^3/3! = -ik\sigma^3/(3M^3)$ .

Мы сохраним здесь прежние обозначения для токов  $I^{(D)}(\sigma)$ ,  $I^{(N)}(\sigma)$  и для амплитуд рассеяния  $\Psi^{(D)}(\theta)$ ,  $\Psi^{(N)}(\theta)$ . При этом окончательные формулы примут вид:

$$\begin{aligned}\Psi^{(D)}(\theta) &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \exp \left\{ i \left( \theta M^3 \frac{\sigma^4}{6} + \frac{\sigma^7}{63} \right) \right\} I^{(D)}(\sigma) d\sigma; \\ \Psi^{(N)}(\theta) &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \sigma^3 \exp \left\{ i \left( \theta M^3 \frac{\sigma^4}{6} + \frac{\sigma^7}{63} \right) \right\} I^{(N)}(\sigma) d\sigma.\end{aligned}\tag{17}$$

А постоянный множитель Const в (12) будет равен

$$C^{(D)} = \frac{\exp\left(i\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^2}{f(0)M^3}; \quad C^{(N)} = \frac{\exp\left(i\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi}} \frac{k^2}{f(0)M^3},\tag{18}$$

для условий Дирихле и Неймана соответственно.

Обратим внимание, что нижний предел интегрирования в формулах (14), (17) для амплитуд рассеяния выбирается в освещенной части погранслоев из условия согласования токов волнового поля, описываемых лучевой асимптотикой и получаемых при численном решении по разностным схемам. Верхний предел находится в затененной части погранслоев, где ток оказывается так мал, что его вкладом в интеграл можно пренебречь. Этот предел находится экспериментально.

## §5. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТОКОВ

Чтобы вычислить амплитуды рассеяния (14) и (17) нам необходимо знать ток на границе рассеивателя. Подробно о вычислении токов  $I^{(D)}(\sigma)$  и  $I^{(N)}(\sigma)$  было рассказано в работах [3, 5], поэтому мы опускаем здесь детали вывода возникающих уравнений для двух первых членов ( $W_0$  и  $W_1$ ) асимптотики функции ослабления  $W(\sigma, \nu)$ , связанной с решением уравнения Гельмгольца равенством  $U = \exp(iks)W$ .

Обратим внимание на следующий факт. Как вытекает из результатов вычислений токов в указанных наших работах, токи действительно являются медленно меняющимися функциями  $s$  и не влияют на положение стационарной точки интегралов (1)–(3).

Напомним, что  $W_0$  соответствует двумерной задаче рассеяния на выпуклом контуре, а  $W_1$  содержит поправку на вытянутость трехмерного тела. Очевидно, что уравнения для  $W_0$  и  $W_1$  не зависят от краевых условий на поверхности тела вращения, поэтому мы будем далее опускать индексы  $(D)$  и  $(N)$  у  $W$ .

С физической точки зрения задача для системы дифференциальных уравнений на  $W_0$  и  $W_1$  представляет собой задачу рассеяния в полуплоскости  $-\infty < \sigma < +\infty$ ,  $0 \leq \nu < +\infty$ , когда падающее поле задано своей асимптотикой при  $\sigma \rightarrow -\infty$ .

Мы будем решать эту задачи численными методами, используя конечно-разностные схемы, подобранные так, чтобы обеспечить устойчивость при наличии в данных быстрых осцилляций. При этом условие согласования решений с лучевой асимптотикой заменяется условием Коши при некотором отрицательном, специально подобранном значении  $\sigma_0$ .

Для применимости конечно-разностных схем необходимо также вместо условия на  $+\infty$  по  $\nu$  задать условие и при некотором достаточно большом, но конечном,  $\nu_*$ , что приводит к появлению отражений от этой фиктивной границы. Поэтому величина  $\nu_*$  во всех случаях подбирается так, чтобы избежать влияние этих отражений на ток на границе рассеивателя.

**5.1. Погрансло́й Фока.** В этом случае  $W$  строится в следующем виде

$$W = W_0 + \frac{\Lambda_0}{2M_0^2} W_1, \quad (19)$$

где  $M_0$  большой параметр Фока, а второй параметр  $\Lambda_0 = \rho_0/f(0)$  есть отношение двух радиусов кривизны: продольного  $\rho_0 = K(0)^{-1}$  и поперечного  $f(0)$  вдоль экватора.

Система уравнений для  $W_0$  и  $W_1$  имеет вид

$$\left(i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu\right) W_0 = 0; \quad \left(i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu\right) W_1 = \left(i\sigma - \frac{\partial}{\partial \nu}\right) W_0, \quad (20)$$

где безразмерная длина дуги  $\sigma = M_0 s / \rho_0$  и нормаль  $\nu = 2M_0^2 n / \rho_0$  являются внутренними растянутыми координатами погранслоя.

Далее приведем краевые условиям для системы уравнений (20).

**Условие Дирихле.** Граничные условия при  $\nu = 0$ , очевидно, имеют вид

$$W_0^{(D)} \Big|_{\nu=0} = 0; \quad W_1^{(D)} \Big|_{\nu=0} = 0. \quad (21)$$

Граничное условие  $\nu = \infty$ , заменяется на условие при  $\nu_* \gg 1$ .

$$W_0^{(D)} \Big|_{\nu=\nu_*} = 0; \quad W_1^{(D)} \Big|_{\nu=\nu_*} = 0. \quad (22)$$

Условия Коши описываются равенствами

$$\begin{aligned} W_0^{(D)} \Big|_{\sigma=\sigma_0} &= e^{i\left(\nu\sigma_0 - \frac{\sigma_0^3}{3}\right)} - \sqrt{\frac{2\sigma_0^2 + \nu}{2\sigma_0^2 + 3\nu}} e^{-i\left(\nu\sigma_0 + \frac{\sigma_0^3}{3}\right)}; \\ W_1^{(D)} \Big|_{\sigma=\sigma_0} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Второе из условий Коши (23) следует из того факта, что падающая плоская волна не содержит параметр  $\Lambda_0$ .

Током на границе  $\nu = 0$  в рассматриваемом приближении называется производная по нормали от  $W$  в (19):

$$I^{(D)} = \left( \frac{\partial W_0^{(D)}}{\partial \nu} + \frac{\Lambda_0}{2M_0^2} \frac{\partial W_1^{(D)}}{\partial \nu} \right) \Big|_{\nu=0}. \quad (24)$$

**Условие Неймана.** Здесь мы укажем лишь на те изменения, которые нужно внести в приведенные выше формулы. Граничное условие при  $\nu = 0$  меняется очевидным образом.

$$\frac{\partial W_0^{(N)}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} = 0; \quad \frac{\partial W_1^{(N)}}{\partial \nu} \Big|_{\nu=0} = 0.$$

Условие при  $\nu_*$  в этом случае мы оставляем прежним (22), а в условии Коши для  $W_0^{(N)}$  при  $\sigma = \sigma_0$  нужно заменить знак перед радикалом на плюс, поскольку коэффициент отражения в лучевом методе для условия Неймана на границе равен +1.

Ток на границе описывается формулой

$$I^{(N)} = \left( W_0^{(N)} + \frac{\Lambda_0}{2M_0^2} W_1^{(N)} \right) \Big|_{\nu=0}. \quad (25)$$

**5.2. Погрансло́й с точкой уплощения.** Для функции ослабления также сохраним обозначение  $W(\sigma, \nu)$  и будем искать решение в виде

$$W = W_0 + \frac{\Lambda}{M^4} W_1, \quad (26)$$

где большие параметры, аналогичные параметрам Фока  $M_0$  и  $\Lambda_0$ , обозначим  $M = k^{1/7}(4\kappa)^{-1/21}$  и  $\Lambda = f(0)^{-1}(4\kappa)^{-1/3}$  соответственно.

Система уравнений для  $W_0$  и  $W_1$  в данном случае такова

$$\begin{aligned} \left( i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \sigma^2 \right) W_0 &= 0; \\ \left( i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \sigma^2 \right) W_1 &= \left( \frac{i\sigma^3}{3} - \frac{\partial}{\partial \nu} \right) W_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Граничные условия Дирихле и Неймана в случае погранслоя с точкой уплощения, очевидно, оказываются теми же самыми, что и соответствующие граничные условия для погранслоя Фока. Отличаются только условия согласования с лучевой асимптотикой при  $\sigma \rightarrow -\infty$ . Для условия Дирихле требование согласования с лучевой асимптотикой имеет вид

$$\begin{aligned} W_0^{(D)} \Big|_{\sigma=\sigma_0} &= e^{i\left(\frac{1}{3}\nu\sigma_0^3 - \frac{\sigma_0^7}{63}\right)} - \sqrt{\frac{2\sigma_0^4 + 9\nu}{2\sigma_0^4 + 27\nu}} e^{-i\left(\frac{1}{3}\nu\sigma_0^3 + \frac{\sigma_0^7}{63}\right)}; \\ W_1^{(D)} \Big|_{\sigma=\sigma_0} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

В случае условия Неймана нужно лишь заменить в (28) знак минус перед радикалом на плюс.

Ток (с учетом поправки на вытянутость рассеивателя) в погранслое на границе описывается равенствами

$$I^{(D)} = \left( \frac{\partial W_0^{(D)}}{\partial \nu} + \frac{\Lambda}{M^4} \frac{\partial W_1^{(D)}}{\partial \nu} \right) \Big|_{\nu=0}, \quad I^{(N)} = \left( W_0^{(N)} + \frac{\Lambda}{M^4} W_1^{(N)} \right) \Big|_{\nu=0}.$$

для случаев условий Дирихле и Неймана соответственно.

## §6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Для вычисления амплитуд рассеяния требуется фиксировать подходящим образом параметры, входящие в формулы (14) и (17).

В случае погранслоя Фока большими параметрами являются  $M_0 = (ka/2)^{1/3}$  и  $\Lambda_0 = (a/f(0))$ , где через  $a$  мы обозначаем радиус кривизны

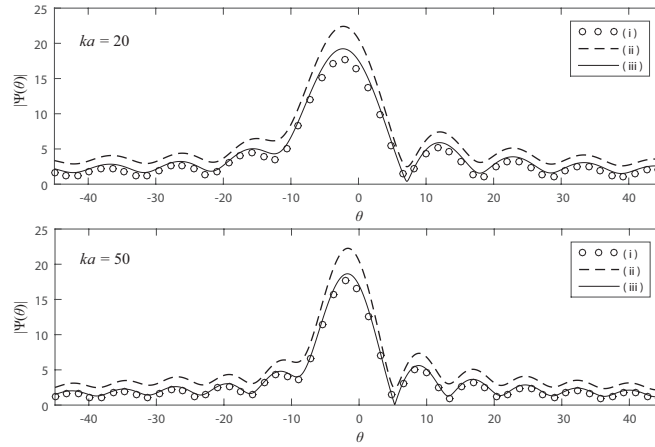


Рис. 3. Погранслои Фокса с условиями Дирихле на границе рассеивателя. Амплитуда рассеяния для значений параметра  $ka = 20, 50$  ( $M_0 = 2.2, 2.9$ , соответственно), вычисленная без поправочного члена (i), с поправкой при  $\epsilon = 0.1$  (ii), и с поправкой при  $\epsilon = 1.5$  (iii).

рассеивателя вдоль меридиан в точках границы свет-тень, т.е.  $a = \rho_0 = K(0)^{-1}$ .

Условие применимости погранслоя Фокса является требование  $\Lambda_0 / (2M_0^2) = o(M_0)$ , т.е. параметр  $\Lambda_0$  не должен компенсировать большой параметр Фокса  $M_0$ , см. по этому поводу работу [6]. Поэтому соотношение между ними в расчетах подбиралось из условия  $\Lambda_0 = M_0^{2-\epsilon}$  при значениях  $\epsilon > 0$ .

Значения  $M_0$  выбирались так, чтобы они согласовывались с результатами работы [7] о дифракции плоской волны на круге радиуса  $a$ , в которой было установлено хорошее совпадение асимптотики Фокса с точным решением во всём интервале изменения  $ka$ . Значение волнового поля, вычисленное по формулам Фокса, сравнивалось с точным решением этой задачи в окрестности границы свет-тень при значениях  $5 \leq ka \leq 100$  (или  $1.4 \leq M_0 \leq 3.7$ , в соответствии с формулой  $M_0 = (ka/2)^{1/3}$ ).

Полученные результаты для случая погранслоя Фокса представлены на рисунках 3–6. Углы на рисунках измеряются в градусах.



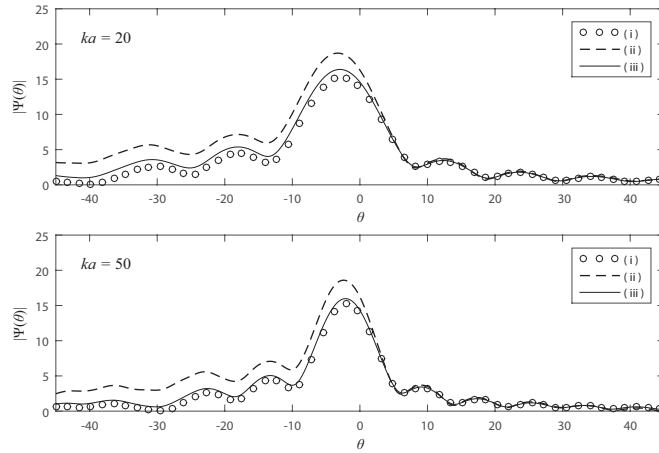


Рис. 4. Погранслои Фока с условиями Неймана на границе рассеивателя. Амплитуда рассеяния для значений параметра  $ka = 20, 50$  ( $M_0 = 2.2, 2.9$ , соответственно), вычисленная в каждом случае без поправочного члена (i), с поправкой при  $\epsilon = 0.1$  (ii), и с поправкой при  $\epsilon = 1.5$  (iii).

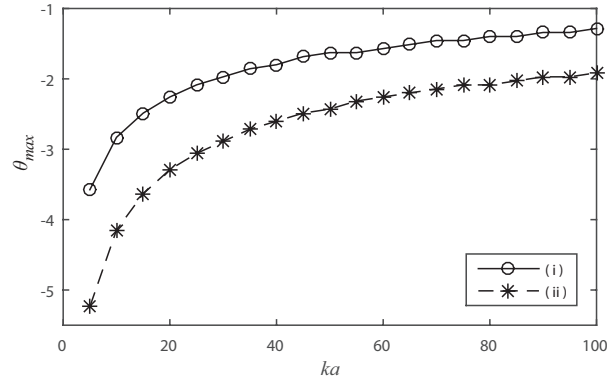


Рис. 5. Погранслои Фока. Величина смещения (в градусах) максимума модуля амплитуды рассеяния в теньную область (отрицательные углы  $\theta$ ) в зависимости от величины параметра  $ka$ ; в случае условий Дирихле (i) и Неймана (ii) соответственно.

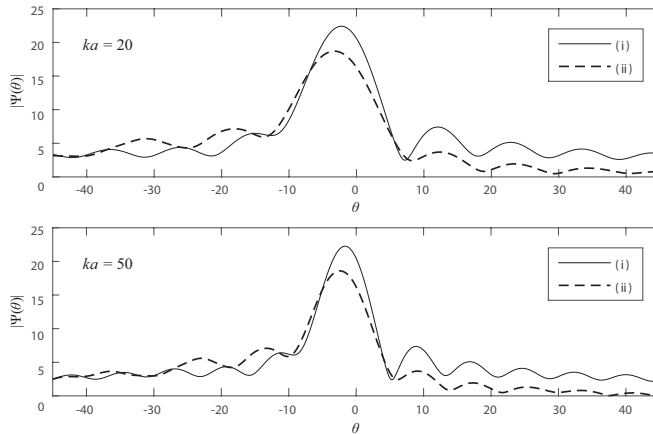


Рис. 6. Погранслои Фока. Сравнение модулей амплитуд рассеяния в случае условий Дирихле (i) и Неймана (ii) при различных значениях параметра  $ka$ .

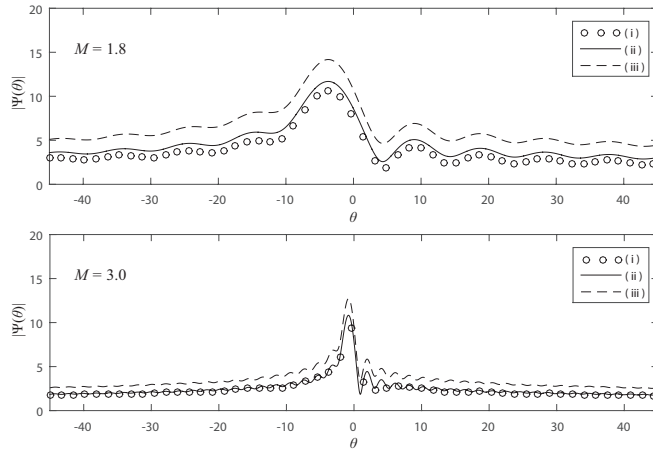


Рис. 7. Погранслои с точкой уплющения с условиями Дирихле на границе рассеивателя. Амплитуда рассеяния для значений параметра  $M = 1.8, 3.0$ , вычисленная без поправочного члена (i), с поправкой при  $\Lambda = M$  (ii), и с поправкой при  $\Lambda = M^3$  (iii).

Для сильно вытянутого тела вращения условие применимости формулы (26) для волнового поля имеет вид  $\Lambda/M^4 = o(M)$ . Значения большого параметра  $M$  в этом случае выбирались из того же интервала,

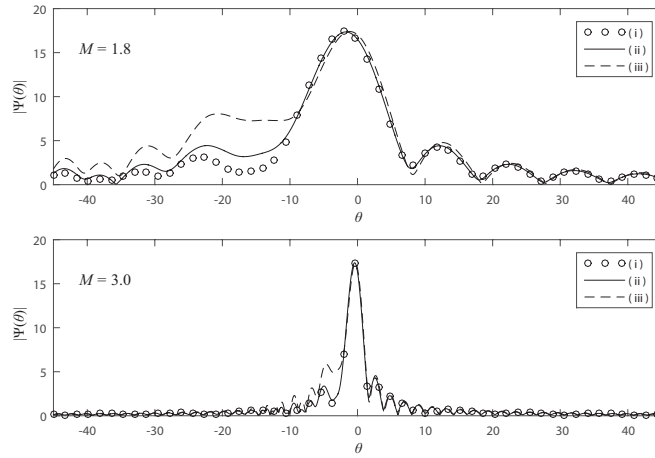


Рис. 8. Погрансло́й с точкой уплощения с условиями Неймана на границе рассеивателя. Амплитуда рассеяния для значений параметра  $M = 1.8, 3.0$ , вычисленная в каждом случае без поправочного члена (i), с поправкой при  $\Lambda = M$  (ii), и с поправкой при  $\Lambda = M^3$  (iii).

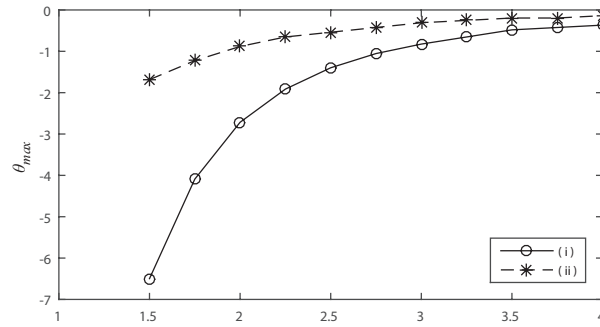


Рис. 9. Погрансло́й с точкой уплощения. Величина смещения (в градусах) максимума модуля амплитуды рассеяния в теньевую область (отрицательные углы  $\theta$ ) в зависимости от величины параметра  $M$ ; в случае условий Дирихле (i) и Неймана (ii) соответственно.

что и значения параметра  $M_0$ . Параметр  $\Lambda$ , характеризующий степень вытянутости рассеивателя, брался равным  $\Lambda = M, M^2, M^3$ .

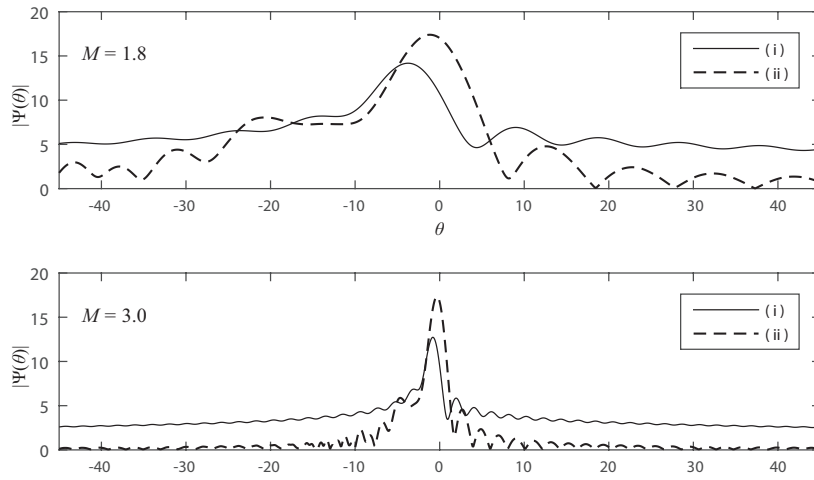


Рис. 10. Погранслоя с точкой уплощения. Сравнение модулей амплитуд рассеяния в случае условий Дирихле (i) и Неймана (ii) при различных значениях параметра  $M$ .

Результаты вычислений для случая погранслоя с точкой уплощения, т.е. для сильно вытянутого тела, показаны на рисунках (7–10).

Подчеркнем, что асимптотическое условие на малость угла  $\theta$  накладывает ограничение на интервал значений этого угла, где формулы для амплитуд рассеяния оказываются применимы. Этот интервал, очевидно, зависит от большого параметра погранслоев, но в приведенных расчетах он взят независимым от него.

## §7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты оказались близкими на качественном уровне и для случая погранслоя Фока (вытянутый рассеиватель) и для погранслоя с точками уплощения (сильно вытянутый рассеиватель). Выяснилось, что вытянутость тела вращения (т.е. величина параметра  $\epsilon$  или  $\Lambda$ , для случаев погранслоя Фока и погранслоя с точками уплощения соответственно) относительно слабо влияет на амплитуду рассеяния. Главный вклад в амплитуды вносит решение двумерной задачи дифракции на выпуклой гладкой кривой, получаемой в сечении рассеивателя плоскостью, содержащей ось вращения. Однако, нельзя

сказать, что для заметно вытянутого рассеивателя величина поправки на вытянутость является пренебрежимо малой. Поэтому в том случае, если требуется большая точность вычислений, поправку на вытянутость следует учитывать.

Было обнаружено, что основная энергия дифракционного поля излучается в направлении отрицательных  $\theta$ , т.е. ниже предельного луча в области тени (особенно этот эффект выражен в случае условий Неймана на границе рассеивателя). При этом максимум излучения смещен на несколько градусов в теневую область. С ростом волнового числа (т.е. с ростом параметра  $ka$  или  $M$ , для случаев погранслоя Фока и погранслоя с точками утолщения соответственно) ширина пика амплитуды рассеяния уменьшается, а сам пик приближается к предельному лучу. Подчеркнем, что эти результаты хорошо согласуются с выводами, полученными в работе [8], где изучалась физически похожая задача об излучении волны шепчущей галереи в окрестности точки перегиба границы.

Результаты наших работ показывают, что предложенный и развитый нами подход к задачам дифракции на вытянутых телах вращения является эффективным в приложениях и сохраняет физическую наглядность теории коротковолновой дифракции.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*, — Изд-во “Советское радио”, Москва (1970), 517 с.
2. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*, — Изд-во ЛГУ, Л. (1974).
3. Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов, Н. М. Семченко, *О коротковолновой дифракции на вытянутом теле. Численные эксперименты*, — Записки научных семинаров ПОМИ, **451** (2016), 65–78.
4. A. Majda, M. E. Taylor, *The asymptotic behaviour of the diffraction peak in classical scattering*, — *Computation on Pure and Applied Mathematics*, v. 30(5) (1977), pp. 639–669.
5. М. М. Попов, Н. М. Семченко, Н. Я. Кирпичникова, *О коротковолновой дифракции на сильно вытянутом теле вращения*, — Зап. науч. семин. ПОМИ, **451** (2016), 156–177.
6. М. М. Попов, Н. Я. Кирпичникова, *О проблемах применения параболического уравнения к дифракции на вытянутых телах*, — *Акустический журнал*, **60**, No.4 (2014), 365–372.
7. В. И. Иванов, *Вычисление поправок к асимптотике Фока для волнового поля вблизи круглого цилиндра и сферы*, — Зап. науч. семин. ЛОМИ, **104** (1981), 102–110.

8. М. М. Попов, В. Г. Красавин, *Диаграмма направленности излучения в задаче с точкой перегиба границы*, — Зап. науч. семин. ПОМИ, **140** (1984), 167–173.

Popov M. M., Semtchenok N. M. Scattering amplitudes in a neighborhood of the limit rays in shortwave diffraction problems of a plane wave by elongated bodies of revolution.

In the paper we consider diffraction problems of a plane wave by smooth, convex and elongated bodies of revolution in the framework of short wave approximation (axially symmetric cases), calculate the scattering amplitudes in the direction of limit rays and investigate the influence of prolateness of the scatterers on the amplitudes behaviour. Mathematical technique of our approach is based on the Green's formulas in exterior of the scatterers and numerical calculations of the wave field current in the boundary layers in a vicinity of the light-shadow zone. It emerged that the prolateness of the axially symmetric bodies relatively weakly affects the scattering amplitudes short wave asymptotics. The main contribution to the amplitudes is made by the solution of the 2D diffraction problem by a convex, smooth curve in the cross section of the scatterers by a plane containing the rotation axis.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН, С.-Петербург, Россия  
*E-mail*: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 20 июня 2017 г.