

М. А. Лялинов, С. В. Полянская

ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ В БЛИЗИ УЗКОГО ВЫПУКЛОГО
ИМПЕДАНСОГО КОНУСА ПОЛНОСТЬЮ
ОСВЕЩЕННОГО ПЛОСКОЙ ПАДАЮЩЕЙ ВОЛНОЙ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Падающая плоская волна распространяется из бесконечности и целиком освещает поверхность выпуклого конуса с импедансным краевым условием на его поверхности. Если конус узкий и гладкий (за исключением его вершины), то отраженные лучи дальнего рассеянного поля имеют почти те же самые направления как и лучи падающей волны, Рис. 1. Сферическая волна, рассеянная от вершины конуса и рассматриваемая в некоторой узкой окрестности конуса (т.е. во внутренности большего пунктирного конуса на Рис. 1) также связана с лучами, имеющими направления близкими к тем, что у падающих и отраженных лучей. Соответствующие фазовые функции этих волн близки друг к другу, что с физической точки зрения означает, что волны интерферируют. В результате, волновая картина в некоторой малой окрестности узкого конуса не может быть простой. По сравнению с известными результатами [4]; Глава 5, [3] ее изучение требует некоторой дополнительной работы для описания асимптотики дальнего поля.

Асимптотический анализ интегрального представления Зоммерфельда (см. [4]; Глава 5) для волнового поля в этом случае подразумевает исследование ситуации, когда особенности подынтегрального выражения близки к седловым точкам. С другой стороны, описание особенностей базируется на изучении преобразования Фурье от так называемой спектральной функции. Это преобразование вычисляется с использованием асимптотики решения задачи для уравнения Лапласа-Бельтрами-Гельмгольца на единичной сфере с малым отверстием, вырезанным узким конусом с вершиной, помещенной в центр сферы [4];

Ключевые слова: дифракция, узкий конус, импедансные условия, приповерхностный слой.

Работа поддержана грантом Российского Научного Фонда RSCF 17-11-01126.

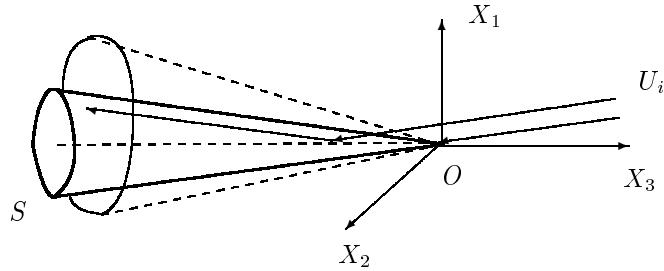


Рис. 1. Дифракция на узком целиком освещенном конусе S .

Глава 5. Размер отверстия имеет порядок $O(\beta)$, где $\beta \ll 1$ – малый параметр задачи, описывающий “узость” конуса.

Стоит прокомментировать предположения, которые подразумеваются при построении приближенного решения исследуемой задачи. Формальное асимптотическое решение задачи ищется при $\beta \ll 1$, т.е. для узкого импедансного конуса. Однако, мы заинтересованы в описании дальнего поля ($kr \gg 1$, kr – волновое расстояние от вершины) в некоторой окрестности (порядка $O(\beta^{1-\delta})$, для некоторого $\delta > 0$) конической поверхности. В данной работе мы сначала используем асимптотическое решение задачи дифракции при $\beta \ll 1$, затем изучаем его при $kr \gg 1$. Порядок этих двух последовательных асимптотических ‘пределов’ существен, а на соотношение малых параметров β и $(kr)^{-1}$ не накладывается пока никаких ограничений. Ситуация, когда либо эти параметры функционально связаны, либо порядок асимптотических пределов другой, в данной работе не обсуждается. Отметим, что выражения для дальнего рассеянного поля, полученные в Главе 5 из [4] при $kr \rightarrow \infty$ и $\beta \sim O(1)$, становятся формально неприменимыми при $\beta \rightarrow 0$.

Воспользуемся сферическими координатами (r, θ, φ) , связанными с декартовыми (Рис.1) соотношениями

$$X_1 = r \cos \varphi \sin \theta, \quad X_2 = r \sin \varphi \sin \theta, \quad X_3 = r \cos \theta.$$

Мы рассматриваем плоскую волну¹ которая падает из бесконечности по направлению $\omega_0 = (\theta_0, \varphi_0)$ (Рис. 1)

$$U_i(r, \theta, \varphi) = \exp\{-ikr \cos \theta_i(\omega, \omega_0)\}, \quad (1)$$

где $\omega = (\theta, \varphi)$ соответствует направлению наблюдения, и

$$\cos \theta_i(\omega, \omega_0) = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos[\varphi - \varphi_0], \quad \theta_i(\omega, \omega_0)$$

совпадает с геодезическим расстоянием между двумя точками ω и ω_0 , которое также обозначим $\theta(\omega, \omega_0) = \theta_i(\omega, \omega_0)$. Для кругового конуса уравнение его поверхности S имеет вид $\theta = \theta_1$, $r \geq 0$ и для узкого конуса мы имеем $\beta = 2(\pi - \theta_1) \ll 1$. Пусть σ кривая пересечения конической поверхности S и единичной сферы S^2 с центром в вершине конуса, $\sigma = S \cap S^2$. ‘Внешность’ σ это область Σ направлений наблюдения волнового поля. Эта область традиционно разделяется на ‘оазис’ Ω_0 и остальную часть $\Omega_1 = \Sigma \setminus \Omega_0$. Оазис соответствует всем направлениям наблюдения, где в дальнем рассеянном поле наблюдаеться только сферическая волна от вершины. Более детальное описание оазиса рассмотрено в [4]; Глава 5. С нашем случае тонкого (узкого) конуса оазис занимает почти все Σ за исключением асимптотически малой части $\Omega_1 = \Sigma \setminus \Omega_0$ на S^2 . Действительно, в случае кругового конуса и аксиально симметричного освещения оазис является областью на Σ , описываемой неравенством $\theta < \theta_1 - \beta/2$. В этом случае Ω_1 задается неравенством $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_1 - \beta/2$. В данной работе рассматривается произвольный тонкий выпуклый конус, и мы имеем дело с более широкой областью, чем Ω_1 , которая обозначается Ω_δ . Это асимптотически тонкая область.² Стоит также отметить, что, если тонкий конус полностью освещен падающей плоской волной, точка ω_0 принадлежит области Σ_i ($\Sigma_i \in \Sigma$) симметричной внешности $S^2 \setminus \Sigma$ относительно центра единичной сферы.

Следует, однако, упомянуть, что асимптотика дальнего поля в оазисе при полном освещении узкого импедансного выпуклого конуса была вычислена в [3]. В этом случае асимптотика дальнего поля задается

¹Предполагается гармоническая зависимость $e^{-i\hat{\omega}t}$ от времени, которая опущена в работе.

²Очевидно, что Ω_δ является кольцом на S^2 таким, что геодезическое расстояние от каждой точки Ω_δ до ‘выпуклой’ кривой σ , т.е. границы выпуклой области, меньше, чем $C\beta^{1-\delta}$ для малого $\delta > 0$ и некоторого $C > 0$.

выражением

$$U(r, \theta, \varphi) = D(\omega, \omega_0) \frac{\exp\{ikr\}}{-ikr} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right), \quad (2)$$

где дифракционный коэффициент был явно вычислен (при $\beta \ll 1$)

$$D(\omega, \omega_0) = -\frac{l_\beta}{4\pi} \frac{\eta(1 + O(\beta \log \beta))}{[\cos \theta(\omega, O) + \cos \theta(O, \omega_0)]^2}, \quad \omega \in \Omega_0,$$

$$\theta(\omega, O) + \theta(O, \omega_0) > \pi,$$

где η – поверхностный импеданс, l_β – длина σ и O – точка во внешности Σ . Формула для $D(\omega, \omega_0)$ становится ненеприменимой, если ω приближается к границе Ω_0 , т.е. $\theta(\omega, O) + \theta(O, \omega_0) \rightarrow \pi$. Аналогичные результаты известны также для идеальных узких конусов [5], т.е. с условиями Дирихле или Неймана на границе.³

В данной работе мы намерены получить выражение для дальнего рассеянного поля при $\omega \in \Omega_\delta$, т.е. в некоторой окрестности конической поверхности.

§2. ФОРМУЛИРОВКА И РЕДУКЦИЯ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ДЛЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Полное поле $\widehat{U}(r, \theta, \varphi) = U_i(r, \theta, \varphi) + U(r, \theta, \varphi)$ является суммой падающей волны $U_i(r, \theta, \varphi)$ (см. (1)) и рассеянной $U(r, \theta, \varphi)$. Рассеянное поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)U(r, \theta, \varphi) = 0, \quad \omega \in \Sigma, \quad r > 0 \quad (3)$$

и полное поле подчиняется импедансному краевому условию

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}} - ik\eta \right) \widehat{U}(r, \theta, \varphi) = 0, \quad \omega \in \sigma, \quad r > 0, \quad (4)$$

где \mathcal{N} нормаль к σ в касательной плоскости к S^2 , подразумевается, что выполнено условие Мейкснера в вершине, Раздел 5.1 в [1, 2, 4]. Волновое поле на бесконечности удовлетворяет условию излучения, в частности, в оазисе (т.е. при $\omega \in \Omega_0$) оно имеет вид (2). Вид асимптотики в узкой окрестности конической поверхности S , т.е. при $\omega \in \Omega_\delta$, является основной целью исследования в нашей работе.⁴

³Работа [6], по-видимому, нуждается в более детальном обосновании используемого подхода и результатов.

⁴Стоит отметить, что мы ищем асимптотику классического решения рассматриваемой задачи.

Детали вычислений в оставшейся части этого раздела традиционны и по частям могут быть найдены в [4, 7] и [3].⁵ Падающая плоская волна допускает представление так называемым интегралом Ватсона-Бесселя

$$U_i(r, \theta, \varphi) = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{C_0} \nu e^{-i\nu\pi/2} u_\nu^i(\omega, \omega_0) \frac{J_\nu(kr)}{\sqrt{-ikr}} d\nu, \quad (5)$$

где $u_\nu^i(\omega, \omega_0) = -\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos\theta_i(\omega, \omega_0))}{4\cos\pi\nu}$, $P_{\nu-1/2}(x)$ функция Лежандра. C_0 контур, охватывающий положительную часть вещественной оси, см. [4, 7]. Представление для рассеянного поля принимает похожий вид

$$U(r, \theta, \varphi) = 4i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{C_0} \nu e^{-i\nu\pi/2} u_\nu(\omega, \omega_0) \frac{J_\nu(kr)}{\sqrt{-ikr}} d\nu, \quad (6)$$

где $u_\nu(\omega, \omega_0)$ неизвестная (спектральная) функция.

Используя представления (6), (5) в задаче (3), (4), приходим к уравнению

$$(\Delta_\omega + (\nu^2 - 1/4))u_\nu(\omega, \omega_0) = 0, \quad (7)$$

в Σ и к краевому условию на σ

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_\nu(\omega, \omega_0)}{\partial \mathcal{N}} \right|_\sigma = \frac{\eta}{2i} \int_{-\infty}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \sin \pi\tau \hat{u}_\tau(\omega, \omega_0)|_\sigma}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}, \quad \nu \in \Pi_\delta \quad (8)$$

с $\hat{u}_\nu(\omega, \omega_0) = u_\nu(\omega, \omega_0) + u_\nu^i(\omega, \omega_0)$, $\Pi_\delta = \{\nu \in C : |\text{Im}(\nu)| < \delta_0\}$ для некоторого малого положительного δ_0 . Условие (8) нелокально по (спектральной) переменной ν .

Для дальнейших вычислений полезно ввести формальный интегральный оператор

$$\mathcal{A}v_\nu(\omega, \omega_0)|_\sigma = \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \sin \pi\tau v_\tau(\omega, \omega_0)|_\sigma}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}, \quad (9)$$

где v принадлежит мнимой оси, тогда из (8) имеем

$$\left. \frac{\partial \hat{u}_\nu(\omega, \omega_0)}{\partial \mathcal{N}} \right|_\sigma = \eta \mathcal{A}\hat{u}_\nu(\omega, \omega_0)|_\sigma.$$

⁵В данном разделе мы в действительности не используем то, что конус узкий, и результаты известны для произвольного гладкого выпуклого конуса.

Класс функций, в котором ищется решение задачи (7), (8), подробно описан в Главе 5 в [4] и более детально в [7].

Из задачи (7), (8) следует представление (см. [3])

$$\alpha_\omega u_\nu(\omega, \omega_0) = \int_{\sigma} dl_s \left(\frac{\partial g_\nu(\omega, s)}{\partial \mathcal{N}} u_\nu(s, \omega_0) - \eta \mathcal{A} u_\nu(s, \omega_0) g_\nu(\omega, s) \right) + \Psi_\nu(\omega, \omega_0), \quad (10)$$

где $g_\nu(s, \omega) = -\frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \theta(s, \omega))}{4 \cos \pi \nu}$, $\alpha_\omega = 1/2$ при $\omega \in \sigma$ и $\alpha_\omega = 1$ при $\omega \in \Sigma$,

$$\Psi_\nu(\omega, \omega_0) = \int_{\sigma} dl_s \left(\frac{\partial u_\nu^i(\omega_0, s)}{\partial \mathcal{N}} g_\nu(s, \omega) - \eta \mathcal{A} u_\nu^i(s, \omega_0) g_\nu(\omega, s) \right).$$

Интегрирование в формуле (10) проводится вдоль замкнутой кривой σ на S^2 .

Если $\omega \in \sigma$, представление (10) преобразуется в интегральное уравнение второго рода для $u_\nu(\cdot, \omega_0)$. Его асимптотическое решение при $\beta \rightarrow 0$ обсуждается в [3] и в старшем приближении спектральная функция дается выражением

$$u_\nu(\omega, \omega_0) = \Psi_\nu(\omega, \omega_0)(1 + O(\beta \log \beta)), \quad (11)$$

Стоит напомнить, что

$$\omega \in \Omega_\delta, \quad \omega_0 \in \Sigma_0$$

в формуле (11), так что $\theta(\omega, O) + \theta(O, \omega_0) = \pi + O(\beta^{1-\delta})$.

Для дальнейшего изучения асимптотики дальнего рассеянного поля, основанной на приближенном решении задачи для спектральной функции, нам нужны некоторые оценки для (11) при $\nu \rightarrow i\infty$.

§3. НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ПРИБЛИЖЕННОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ (11)

Запишем выражение (11) в виде

$$u_\nu(\omega, \omega_0) = \int_{\sigma} dl_s W_\nu(s, \omega, \omega_0)(1 + O(\beta \log \beta)) \quad (12)$$

с

$$W_\nu(s, \omega, \omega_0) = \frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \theta(\omega, s))}{4 \cos \pi \nu} \\ \times \left\{ \frac{\eta}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \tan \pi \tau P_{\nu-1/2}(-\cos \theta(\omega_0, s))}{\cos \pi \tau + \cos \pi \nu} \right. \\ \left. - \frac{\partial \theta(s, \omega_0)}{\partial \mathcal{N}} \frac{P_{\nu-1/2}^1(-\cos \theta(\omega_0, s))}{4 \cos \pi \nu} \right\},$$

где мы использовали

$$\frac{d}{dx} P_{\nu-1/2}(x) = -\frac{P_{\nu-1/2}^1(x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Мы заинтересованы в оценке $W_\nu(s, \omega, \omega_0)$, которая равномерна по $s \in \sigma$ для $\omega \in \Omega_\delta$, $\omega_0 \in \Sigma_0$ при $\nu \rightarrow i\infty$.

Если $\omega \in \Omega_\delta$, $\omega_0 \in \Sigma_0$, мы можем утверждать, что $\theta(\omega_0, s) < \pi - a_0 \beta$ для некоторого положительного a_0 и $\theta(\omega, s) > A_0 \beta$ для некоторого положительного A_0 . В результате мы имеем

$$-\cos \theta(\omega_0, s) = \cos[\pi - \theta(\omega_0, s)] < 1 - a_1 \beta^2,$$

и

$$-\cos \theta(\omega, s) = \cos[\pi - \theta(\omega, s)] > -1 + A_1 \beta^2$$

для некоторых положительных a_1 и A_1 . Предположим, что β малый, но фиксированный параметр.

Мы видим, что аргументы в

$$P_{\nu-1/2}^1(-\cos \theta(\omega_0, s)) \quad \text{и} \quad P_{\nu-1/2}(-\cos \theta(\omega, s))$$

таковы, что применима асимптотика [8], 8.721(3)

$$P_{\nu-1/2}^\mu(\cos \varphi) = \sqrt{\frac{\pi}{2 \sin \varphi}} \frac{\Gamma(\nu + \mu + 1/2)}{\Gamma(\nu + 1)} \\ \times \cos \left(\nu \varphi + \frac{\pi \mu}{2} - \frac{\pi}{4} \right) (1 + O(1/\nu)) \quad (13)$$

при $\nu \rightarrow i\infty$ и $0 < \epsilon \leqslant \varphi \leqslant \pi - \epsilon$, $|\nu| \gg 1/\epsilon$ $\epsilon > 0$ малое. В последующих оценках мы воспользуемся асимптотикой (13).

Таким образом, имеем

$$W_\nu(s, \omega, \omega_0) = \frac{P_{\nu-1/2}(-\cos \theta(\omega, s))}{4 \cos \pi \nu} \left\{ I(\nu, s, \omega_0) - \frac{\partial u_\nu^i(s, \omega_0)}{\partial \mathcal{N}} \right\}$$

с

$$I(\nu, s, \omega_0) = \frac{\eta}{2i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \tan \pi\tau P_{\tau-1/2}(-\cos \theta(\omega_0, s))}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}.$$

Сначала рассмотрим оценку интеграла $I(\nu, s, \omega_0)$, представив его как

$$\begin{aligned} I(\nu, s, \omega_0) &= \frac{\eta}{i} \int_0^{iA} d\tau \frac{\tau \tan \pi\tau P_{\tau-1/2}(-\cos \theta(\omega_0, s))}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} \\ &\quad + \frac{\eta}{i} \int_{iA}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \tan \pi\tau P_{\tau-1/2}(-\cos \theta(\omega_0, s))}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu}, \end{aligned}$$

где A достаточно велико. Первое слагаемое в правой части последнего равенства оценивается как $O\left(\frac{1}{\cos \pi\nu}\right)$ при $\nu \rightarrow i\infty$. Для второго слагаемого имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\eta}{4i} \int_{iA}^{i\infty} d\tau \frac{\tau \tan \pi\tau P_{\tau-1/2}(-\cos \theta(\omega_0, s))}{\cos \pi\tau + \cos \pi\nu} \\ &= C \int_A^\infty dt \frac{\sqrt{t} \tanh \pi t \cos(it[\pi - \theta(\omega_0, s)] - \pi/4)}{\cosh \pi t + \cos \pi\nu} (1 + O_1(1/t)) \\ &= C_1 \int_A^\infty dt \frac{\sqrt{t} \tanh \pi t \exp[t(\pi - \theta)]}{\cosh \pi t + \cos \pi\nu} (1 + O_1(1/t)) \\ &= C_2 \int_0^\infty dt \frac{\sqrt{t} \sinh \pi t [\cosh \pi t]^{-a}}{\cosh \pi t + \cos \pi\nu} (1 + O_1(1/t)) + O\left(\frac{1}{\cos \pi\nu}\right) \\ &= C_4 \int_1^\infty dp \frac{(\log(p + \sqrt{p^2 - 1}))^{1/2}}{p^a(p + q)} (1 + O_1(1/\log p)) + O\left(\frac{1}{q}\right), \end{aligned}$$

где $0 < a = \theta(\omega_0, s)/\pi < 1$ и $p = \cosh \pi t$, $q = \cos \nu$, а обозначение $O_1(1/t)$ используется для функции, которая имеет асимптотику C/t

при больших t . Последний интеграл допускает оценку

$$\begin{aligned} \int_1^\infty dp \frac{(\log(p + \sqrt{p^2 - 1}))^{1/2}}{p^a(p + q)} &= C_5 \int_1^\infty dp \frac{(\log p)^{1/2}}{p^a(p + q)} (1 + O_1(1/\log p)) \\ &= C_6 \frac{\sqrt{\log q}}{q^a} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log q}\right) \right) \end{aligned}$$

при $q \rightarrow \infty$, $\nu \rightarrow i\infty$. Эта оценка может быть выведена, например, на следующем пути. Рассмотрим тождество (см. также [2], Приложения)

$$\int_1^\infty \frac{p^{-a}}{p + q} dp = q^{-a} \left(\frac{\pi}{\sin \pi a} - \frac{1}{1-a} \right) + q^{-a} \left(\frac{1-q^{a-1}}{1-a} \right) + q^{-a} \int_0^{1/q} \frac{y^{1-a}}{1+y} dy$$

получаемое из 3.222(2) в [8].⁶ В этом тождестве вычислим производную $\frac{d^b}{da^b}$ от обеих частей при натуральных b , воспользуемся аналитическим продолжением на вещественные $b \in (0, 1]$ и возьмем $b = 1/2$, таким образом, имеем

$$\int_1^\infty dp \frac{(\log p)^{1/2}}{p^a(p + q)} = C_6 \frac{\sqrt{\log q}}{q^a} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log q}\right) \right).$$

Воспользуемся асимптотикой (13) и оценкой для

$$I(\nu, s, \omega_0) = C_7 \sqrt{\nu} \frac{w_I(s, \omega, \omega_0)}{\cos[\nu\theta(\omega_0, s)]} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right),$$

тогда придем к

$$\begin{aligned} W_\nu(s, \omega, \omega_0) &= \frac{w_0(s, \omega, \omega_0)}{\cos[\nu\theta(\omega_0, s)] \cos[\nu\theta(\omega, s)]} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right) \\ &= \frac{w(s, \omega, \omega_0)}{\cos[\nu(\theta(\omega_0, s) + \theta(\omega, s))]} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right) \end{aligned}$$

равномерно по $s \in \sigma$ и $\omega \in \Omega_\delta$, $\omega_0 \in \Sigma_0$ при $\nu \rightarrow i\infty$, w_0 и w, w_I непрерывные функции своих аргументов. Для дальнейшего удобно ввести обозначение $\theta_*(s, \omega, \omega_0) = \theta(\omega_0, s) + \theta(\omega, s)$.

⁶Случай $a \rightarrow 1 - 0$ может рассмотрен как предельный.

§4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ И ТРАНСФОРМАНТА ЗОММЕРФЕЛЬДА

Представление Зоммерфельда для рассеянного поля принимает вид (см. Главу 5 в [4, 7])

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{e^{-ikr \cos \alpha}}{\sqrt{-ikr}} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha, \quad (14)$$

где

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \sqrt{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} \nu e^{i\nu\alpha} u_\nu(\omega, \omega_0) d\nu$$

$|\operatorname{Re}(\alpha)| < \theta_*(\omega, \omega_0)$ и $\theta_*(\omega, \omega_0) = \min_{s \in \sigma} (\theta(\omega_0, s) + \theta(\omega, s))$, γ – двухпетлевой контур Зоммерфельда [4]. Аналогично интегрированием по частям из (14) имеем

$$U(r, \theta, \varphi) = \frac{\sqrt{-ikr}}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} \sin \alpha \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) d\alpha,$$

где

$$\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} u_\nu(\omega, \omega_0) d\nu, \quad \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0).$$

Трансформанты Зоммерфельда $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ и $\tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0)$ в (14) должны быть аналитически продолжены из полосы $|\operatorname{Re}(\alpha)| < \theta_*(\omega, \omega_0)$, где они являются голоморфными функциями, на более широкую полосу, если это необходимо. В нашем случае спектральная функция в интеграле Фурье для трансформант Зоммерфельда задается явным выражением (12).

Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \left(\frac{d}{d\alpha} e^{i\nu\alpha} \int_{\sigma} dl_s W_\nu(s, \omega, \omega_0) \right) d\nu (1 + O(\beta \log \beta)) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{\sigma} dl_s \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} W_\nu(s, \omega, \omega_0) d\nu \right) (1 + O(\beta \log \beta)), \end{aligned}$$

где изменение порядков интегрирований и дифференцирования оправдано. Введем обозначение

$$\tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} W_\nu(s, \omega, \omega_0) d\nu.$$

Замечание. В явной и формально асимптотически эквивалентной форме приближение (11) записывается как

$$u_\nu(\omega, \omega_0) = -l_\beta g_\nu(\omega, O) \left(\eta \mathcal{A} u_\nu^i(O, \omega_0) - \frac{\partial u_\nu^i(\omega_0, s)}{\partial \mathcal{N}} \Big|_{s \rightarrow O} \right) (1 + O(\beta \log \beta)),$$

где l_β длина σ и O точка внутри $S^2 \setminus \Sigma$.

Поэтому, имеем (замена $s \rightarrow O$, $l_\beta = \int_\sigma dl_s$)

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = l_\beta \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \frac{d}{d\alpha} \left(\int_{i\infty}^{i\infty} e^{i\nu\alpha} W_\nu(O, \omega, \omega_0) d\nu \right) (1 + O(\beta \log \beta)).$$

Преобразуем интеграл $\tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0)$, который является преобразованием Фурье от $W_\nu(s, \omega, \omega_0)$, воспользуемся асимптотикой (14)

$$\tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0) = \frac{1}{i} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\nu \cos(\nu\alpha) \frac{w(s, \omega, \omega_0)}{\cos[\nu\theta_*(s, \omega, \omega_0)]} \left(1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right).$$

Ввиду оценок из предыдущего раздела, последний интеграл абсолютно сходится и является голоморфной функцией при $|\operatorname{Re}(\alpha)| < \theta_*$. Положа $|\operatorname{Re}(\alpha)| < \theta_*$, где $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ также определена и регулярна, может быть расширена на $|\operatorname{Re}(\alpha)| < 3\pi/2$ с помощью аналитического продолжения. Однако, мы должны определить тип и положение особенности $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ на границе полосы голоморфности. Для этого, воспользуемся формулой 3.981(3) из [8]

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{\cosh(bx)} dx = \frac{\pi}{2b} \operatorname{sech}\left(\frac{\pi a}{2b}\right)$$

при $\operatorname{Re} b > a > 0$ и ее аналитическим продолжением по $\alpha = -ia$ полосу $|\operatorname{Re} \alpha| < \operatorname{Re} b$.

Тогда получаем, что $\alpha = \theta_*$ простой полюс для

$$\tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0), \quad \tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0) = O(1/(\alpha - \theta_*))$$

или

$$\tilde{\phi}(s, \alpha, \omega, \omega_0) = O([\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*/2)]^{-1}),$$

если α находится в окрестности θ_* . Из последней оценки легко получаем, что $\tilde{\phi}(\alpha, s, \omega, \omega_0)[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]$ голоморфна в некоторой окрестности $\alpha = \theta_*$. Так как $\theta_*(s, \omega, \omega_0) = \theta(\omega, s) + \theta(s, \omega_0) = \pi + O(\beta^{1-\delta})$, то $\tilde{\phi}(\alpha, s, \omega, \omega_0)[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]$ также голоморфна и в некоторой малой окрестности точки $\alpha = \pi$.

В результате из

$$\Phi(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tilde{\Phi}(\alpha, \omega, \omega_0) = \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\sigma} dl_s \tilde{\phi}(\alpha, \omega, \omega_0)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \omega, \omega_0) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{\sigma} dl_s \left(\frac{\Psi_1(\alpha, s, \omega, \omega_0)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]} \right. \\ &\quad \left. + \Psi_2(\alpha, s, \omega, \omega_0) \frac{\frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]^2} \right), \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\Psi_2(\alpha, s, \omega, \omega_0) = \tilde{\phi}(\alpha, s, \omega, \omega_0)[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]$$

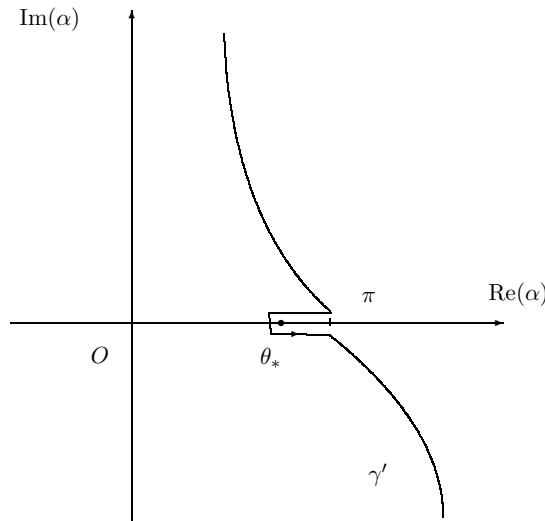
и

$$\Psi_1(\alpha, s, \omega, \omega_0) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \Psi_2(\alpha, s, \omega, \omega_0)$$

голоморфны в окрестности точки $\alpha = \pi$ и $\theta_* \sim \pi$.

Если $\theta_* > \pi + \delta_1$, $\delta_1 > 0$, то $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ голоморфна в окрестности $\alpha = \pi$ и

$$\begin{aligned} \Phi(\pi, \omega, \omega_0) &= \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{\sigma} dl_s \left(\frac{\Psi_1(\pi, s, \omega, \omega_0)}{(-\cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2))} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{1}{2} \Psi_2(\pi, s, \omega, \omega_0)}{\cos^2(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

Рис. 2. Контур интегрирования γ' .

§5. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ В МАЛОЙ ОКРЕСТНОСТИ УЗКОГО ИМПЕДАНСНОГО КОНУСА

Мы воспользуемся интегральным представлением (14) и деформируем контур Зоммерфельда в контуры быстрейшего спуска, имеем⁷

$$\begin{aligned}
 U(r, \theta, \varphi) = & \frac{\sqrt{2\pi}}{i} \int_{\sigma} dl_s \frac{1}{\pi i} \\
 & \times \int_{\gamma'} \frac{e^{-ikr(2\cos^2 \alpha/2 - 1)}}{\sqrt{-ikr}} \left(\frac{\Psi_1(\alpha, s, \omega, \omega_0) \frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{\frac{1}{2} \sin(\alpha/2) [\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]} \right. \\
 & \left. + \Psi_2(\alpha, s, \omega, \omega_0) \frac{\frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]^2} \right) d\alpha (1 + O(\beta \log \beta)),
 \end{aligned} \tag{17}$$

⁷Функция $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ нечетна по α , так что достаточно рассматривать вклад только стационарной точки $+\pi$ интеграла Зоммерфельда, затем умножить результат на два.

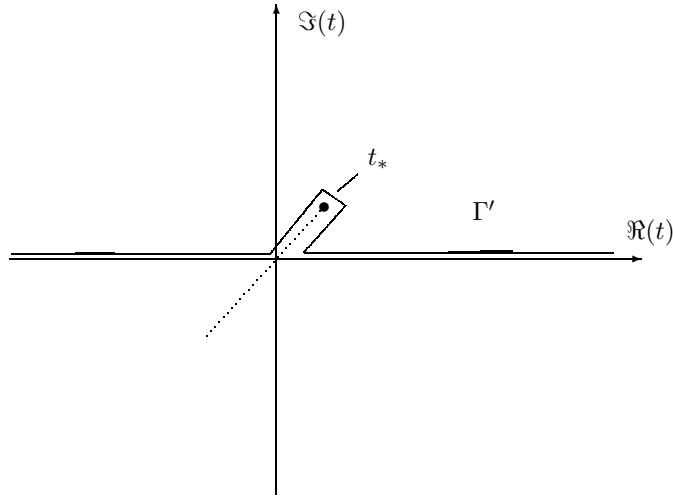


Рис. 3. Контур интегрирования Γ' и положение полюса t_*

где γ' контур наибыстрейшего спуска, охватывающий полюс для $\Phi(\alpha, \omega, \omega_0)$ в (15), см. Рис. 2. Вне вещественной оси контур γ' совпадает с кривой $\text{Re } \alpha = \pi - \text{gd}(\text{Im } \alpha)$, контуром наибыстрейшего спуска. Мы воспользовались тождеством $kr \cos \alpha = -kr + 2kr \cos^2(\alpha/2)$ в экспоненте и, затем, поменяли порядки интегрирования.

Интегрирование по α достаточно проводить по окрестности точки π размера порядка $O([kr]^{-1/2+\delta})$ при $kr \rightarrow \infty$ для вычисления старшего члена асимптотики интеграла Зоммерфельда. Пусть $B_\rho(\pi)$ круг с центром в точке $\alpha = \pi$ радиуса $\rho = O([kr]^{-1/2+\delta})$. Заменим $2\Psi_1(\alpha, s, \omega, \omega_0)/\sin(\alpha/2)$, $\Psi_2(\alpha, s, \omega, \omega_0)$ их значениями в точке $\alpha = \pi$, что вносит погрешность порядка $O([kr]^{-1/2+\delta})$. Предположим, что $0 < \beta < \text{Const}[kr]^{-1/2+\delta}$ так, что $\theta_* \in B_\rho(\pi)$. Заметим, что бесконечные участки интегрирования вне круга $B_\rho(\pi)$ вносят экспоненциально малый вклад в старший член асимптотики.

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varphi) &\sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ikr} \int_{\sigma} dl_s \\ &\times \int_{\gamma' \cap B_{\rho}(\pi)} \frac{e^{-2ikr \cos^2 \alpha/2}}{\sqrt{-ikr}} \left(\frac{2\Psi_1(\pi, s, \omega, \omega_0) \frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]} \right. \\ &\left. + \Psi_2(\pi, s, \omega, \omega_0) \frac{\frac{1}{2} \sin(\alpha/2)}{[\cos(\alpha/2) - \cos(\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2)]^2} \right) d\alpha (1 + O(\beta \log \beta)), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\theta_* = \pi + O(\beta^{1-\delta}) > 0 \text{ при } \omega \in \Omega_{\delta}, \omega_0 \in \Sigma_0.$$

Введем замену переменной интегрирования по α , $t = \sqrt{2ikr} \cos \alpha/2$, имеем

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varphi) &\sim -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{ikr} \int_{\sigma} dl_s \left(\frac{(-2)\Psi_1(\pi, s, \omega, \omega_0)}{\sqrt{-ikr}} F_1(t_*(s)) \right. \\ &\left. + \sqrt{2}i\Psi_2(\pi, s, \omega, \omega_0) F_2(t_*(s)) \right) (1 + O(\beta \log \beta)), \end{aligned} \quad (19)$$

$t_*(s) = \sqrt{2ikr} \cos[\theta_*(s, \omega, \omega_0)/2]$, $\omega = (\theta, \varphi)$, контур Γ' показан на Рис. 3, см. также [9], параграф 7,

$$F_1(t_*) = \int_{\Gamma'} \frac{e^{-t^2}}{(t - t_*)} dt, \quad F_2(t_*) = \int_{\Gamma'} \frac{e^{-t^2}}{[t - t_*]^2} dt.$$

Если $\theta_* > \pi + \delta_1$, то $t_* \rightarrow -e^{i\pi/4}\infty$ (Рис. 3), воспользуемся асимптотиками

$$F_1(t_*) = \frac{\sqrt{\pi}}{t_*} \left(1 + O\left(\frac{1}{t_*^2}\right) \right),$$

$$F_2(t_*) = -\frac{\sqrt{\pi}}{t_*^2} \left(1 + O\left(\frac{1}{t_*^2}\right) \right)$$

и формулой (16), приходим к выражению для дальнего поля в оазисе (см. (2))

$$U(r, \omega, \omega_0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(\pi, \omega, \omega_0) \frac{\exp\{ikr\}}{-ikr} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) \right),$$

$D(\omega, \omega_0) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(\pi, \omega, \omega_0)$ дифракционный коэффициент сферической волны от вершины конуса.

Замечание. По-видимому, возможно формальное упрощение формулы (19) подстановкой аргумента функций $s \rightarrow O$, заменяя интеграл на $l_\beta = \int_\sigma dl_s$, при $\beta \ll 1$.

Асимптотическая формула (19) представляет основной результат работы. Она описывает волновое поведение дальнего рассеянного поля в некоторой малой окрестности узкого конуса с импедансным краевым условием. Область применимости асимптотики обсуждалась выше. В частности, для любого $kr \gg 1$ найдется достаточно малое β из интервала $0 < \beta < C[kr]^{-1/2+\delta}$ такое, что асимптотическая формула (19) в старшем порядке правильно описывает волновое поле при $\omega \in \Omega_\delta$, $\omega_0 \in \Sigma_0$. Заметим, что при $\theta_* \sim \pi + O([kr]^{-1/2})$ рассеянное поле $U(r, \theta, \varphi)$ в (19) формально не убывает при $kr \rightarrow \infty$. Однако, $U(r, \theta, \varphi) = O(\beta)$ при $\beta \ll 1$, причем, как уже было отмечено $0 < \beta < C[kr]^{-1/2+\delta}$. Вычислительные аспекты, связанные с применением формулы (19) для расчета волнового поля, мы рассмотрим в продолжении этого исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. V. M. Babich , M. A. Lyalinov, V. E. Grikurov *Diffraction Theory. The Sommerfeld-Malyuzhinets Technique*. Alpha Science Ser. Wave Phenom., Alpha Science Oxford UK, 2008
2. J-M. L. Bernard, *Méthode analytique et transformées fonctionnelles pour la diffraction d'ondes par une singularité conique: équation intégrale de noyau non oscillant pour le cas d'impédance constante*, rapport CEA-R-5764, Editions Dist-Saclay, 1997. (erratum in J Phys A, 32 L45), an extended version in *Advanced Theory of Diffraction by a Semi-infinite Impedance Cone* Alpha Science Ser Wave Phenom Alpha Science Oxford UK, 2014
3. J-M. L. Bernard, M. A. Lyalinov *Diffraction of acoustic waves by an impedance cone of an arbitrary cross-section*. Wave Motion, (erratum : p.177 replace $O(1/\cos(\pi(\nu - b)))$ by $O(\nu^d \sin(\pi\nu)/\cos(\pi(\nu - b)))$), **33** 2001, 155–181.
4. M. A. Lyalinov, N. Y. Zhu *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions* (Mario Boella Series on Electromagnetism in Information & Communication) Edison NJ SciTech-IET USA, 2013
5. V. M. Babich, *Diffraction of a plane wave by a narrow angle cone in the case of the Dirichlet boundary conditions*. — J. Math. Sci. **86**, No 3 (1997), 2657–2663.
6. И. В. Андronov, *Дифракция на узком конусе при наклонном падении*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **451** (2016), 5–13
7. M. A. Lyalinov, *Acoustic scattering by a semi-infinite angular sector with impedance boundary conditions, submitted to IMA Journ.* (2017)
8. I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik *Table of Integrals, Series and Products*, 4th ed. Academic Press, Orlando, 1980.

9. M. A. Lyalinov, *Scattering of acoustic waves by a sector.* — Wave Motion, **50** (2013), 739–762.

Lyalinov M. A., Polianskaya S. V. Wave field near a narrow convex impedance cone completely illuminated by a plane incident wave.

An acoustic incident plane wave completely illuminates a narrow convex cone with impedance boundary condition on its surface. The wave field at far distances from the vertex of the cone and in some close neighbourhood of the cone's surface is asymptotically computed.

Кафедра Высшей Математики
и Математической Физики,
Санкт-Петербургский Университет,
Университетская наб. 7/9, Санкт-Петербург, 199034, Россия

Поступило 17 октября 2017 г.

E-mail: lyalinov@yandex.ru, m.lyalinov@spbu.ru

Северо-западный Институт Управления,
Средний пр., 57, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: svpolyan@yandex.ru