Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

В. А. Козлов, С. А. Назаров

МОДЕЛЬ МЕШКОВИДНОЙ АНЕВРИЗМЫ БИФУРКАЦИОННОГО УЗЛА АРТЕРИИ

§1. Преамбула

Абсолютное большинство одномерных моделей разнообразных физических явлений и процессов внутри сочленений тонких цилиндров – акустических труб, заполненных жидкостями сосудов или каналов, балок или стержней и т.п. – привлекают классические условия сопряжения Кирхгофа [1] в вершинах графа ("скелета" сочленения), которые (условия) связывают обыкновенные дифференциальные уравнения, поставленные на звеньях $\Upsilon_j \ni z^j$ графа, в единую задачу. Наиболее часто применяется модель Полинга [2], включающая дифференциальные уравнение второго порядка для скалярной функции, которая непрерывна в вершинах графа (первое, устойчивое по терминологии [3], условие Кирхгофа) и порождает нулевой суммарной поток из каждой вершины (второе условие Кирхгофа – естественное [3]). Условия Кирхгофа назначаются зачастую без какой-либо аргументации, как нечто само собой разумеющееся (см., например, обзор [4]), и действительно уже первое, вполне осмысленное, предположение о непрерывности (вектор)-функции u в вершинах и квадратичная зависимость функционала энергии от производных $\partial_{z^j} u$, оправданная стандартной процедурой понижения размерности, позволяет по известной схеме [3] вывести из вариационной задачи второе условие Кирхгофа, относящееся к потоку из вершин (взвешенной сумме предельных значений производных $\partial_{z^j} u$ вдоль исходящих звеньев).

Данная статья, продолжающая серию публикаций авторов [5–11], посвящена моделированию течения крови внутри артерии с тонкими упругими стенками в случае ее бифуркации (разветвления) и образования мешковидной аневризмы (строго локализованной гематомы,

---

Ключевые слова: бифуркация артерии, мешковидная аневризма, гематома, кровеносный сосуд, тонкие течения, понижение размерности, модифицированные условия сопряжения Кирхгофа.

Работа выполнена в рамках проекта 17-11-01003 Российского научного фонда.

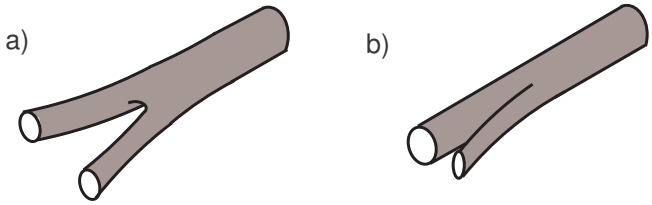

Рис. 1. Здоровые разветвляющиеся артерии.

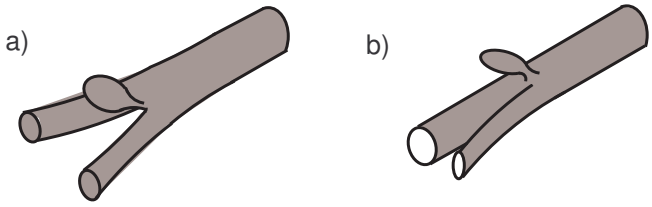

Рис. 2. Мешковидные аневризмы, произросшие из седловины (a) и боковины (b) бифуркационного узла артерии.

соединенной с просветом кровеносного сосуда), врожденной или приобретенной вследствие травмы или недуга сосудистой стенки (см. соответственно рис. 1 и рис. 2). Как известно [8, 10] и предсказуемо априори, даже при целом и совершенно здоровом бифуркационном узле условия Кирхгофа нуждаются в значительной переработке, в частности, из-за эластичности стенок сосудов и самого узла. Прежде чем приступить к описанию известных элементов одномерной модели взаимодействия течения крови с упругими стенками артерии и формированию модели самой аневризмы, укажем несколько причин, определяющих негодность условий сопряжения Кирхгофа во многих физических и механичесих задачах.

1) *Анизотропная природа объекта.* Повседневный опыт выявляет разнородную реакцию тонких упругих тел на внешние нагружения: стержень гораздо легче изогнуть, чем растянуть или закрутить. Это

наблюдение согласуется со строгим асимптотическим анализом математической задачи теории упругости для цилиндра Q_h с относительным диаметром $h \ll 1$: продольное и поперечные смещения в теле Q_h приобретают разные порядки относительно малого параметра h, а деформация стержня в главном описывается усложненной системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков. Оба обстоятельства делают невозможной постановку классических условий сопряжения Кирхгофа в точках излома одномерного изображения изломанного стержня [12] или в вершинах скелета более сложной стержневой конструкции [13]. Более того, в последних могут образовываться так называемые *подвижные фрагменты*, требующие полной перестройки асимптотических анзацев и условий сопряжения, привлекающих алгебраические неизвестные.

2) *Специфика явления пограничного слоя.* При моделировании сочленений тонких квантовых волноводов, описываемых при помощи дву- или трехмерных спектральных задач Дирихле для оператора Лапласа (ср. обзор [14] и монографию [15]) почти всегда применяется модель Полинга [2], оперирующая условиями сопряжения Кирхгофа (см. обзоры [14, 16] и публикации [17–20], которые посвящены гексогональным решеткам, имитирующим[1] графен). Между тем в весьма содержательных работах [22, 23] установлено, что такие условия сопряжения могут возникнуть разве лишь при наличии *порогового резонанса* в задаче Дирихле для оператора Гельмгольца на сочленении Ξ нескольких полубесконечных цилиндров, которое служит для описания явления пограничного слоя. В сообщении [24] показано, что в частном случае симметричного Y-образного сочленения трех единичных полуполос (предельная область для гексогональной решетки в растянутых координатах) порогового резонанса нет, а значит, согласно общим результатам [22, 23] одномерная сетка, подобная пчелиным сотам и моделирующая двумерную решетку квантовых волноводов, должна снабжаться в вершинах вовсе не условиями Кирхгофа, а условиями Дирихле, разбивающими сетку-граф на независимые звенья. Аналогичный вывод сделан в работах [25] и [26] для прямоугольных дву- и

[1]Правомочность такой интерпретации вызывает у авторов сомнение; ср. публикации [21].

трехмерных решеток. Подчеркнем, что в задаче Неймана для оператора Лапласа, служащей для описания сочленений акустических волноводов, пороговый резонанс заведомо присутствует[2], а значит, результаты [22, 23] подтверждают правильность использование модели Полинга [2] по крайней мере в акустических задачах.

3) *Модели повышенной точности.* Обычно в таких моделях (ср. публикации [8, 10, 11] и др.), учитывающих явление пограничного слоя около узлов сочленений тонких каналов и привлекающих в условия сопряжения члены следующего порядка малости, возмущения претерпевает первая группа условий сопряжения Кирхгофа. Этот эффект будет подробно обсуждаться далее в п. 3 применительно к одномерной модели разветвляющейся артерии, и поэтому здесь отметим лишь, что малость возмущения в одиночном узле проявляется значимо для всего артериального дерева благодаря обилию бифуркационных узлов.

4) *Математические исследования.* Получено (см. оригинальную работу [27] и обзоры [28, 29]) описание всех возможных, в том числе нелокальных, условий сопряжения в вершинах конечного графа, которые (условия) порождают самосопряженные, но не обязательно положительные операторы одномерной задачи. Впрочем, общие результаты не предоставляют каких-либо рецептов подбора параметров самосопряженных расширений дифференциальных операторов для обслуживания конкретных сочленений тонких многомерных каналов.

Созданы алгоритмы построения полных асимптотических рядов для решений исследуемой в работе задачи Стокса в сочленениях тонких труб с жесткими стенками (см. публикации [11, 30–33] и др.) при дополнительных требованиях гладкости к данным задачи, однако применение таких результатов к изучению течения крови в сосудах упругими стенками встречает затруднения (ср. обсуждение в статье [11]).

[2]У задачи Неймана порог (нижняя грань непрерывного спектра) равен нулю, а задача для уравнения Лапласа в Ξ имеет постоянное решение, которое как раз и порождает обсуждаемый резонанс.

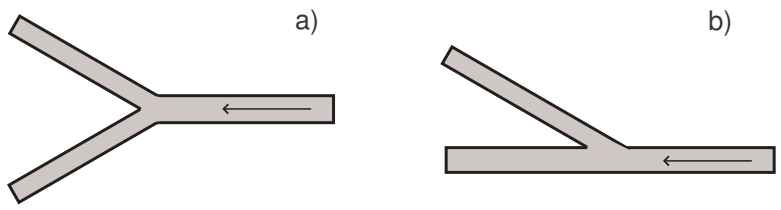

Рис. 3. Схематичное изображение разветвляющихся артерий на рис. 1.

§2. Математическая постановка задачи о здоровой разветвляющейся артерии.

Сочленение Ξ трех ($\alpha = 0, \pm$) кровеносных сосудов, изображенное схематично на рис. 3 (ср. рис. 1), состоит из тонких прямых[3] цилиндров Ω^α и соединительного узла G (рис. 4, a и b). С каждым из цилиндров связана локальная система декартовых координат $x^\alpha = (y^\alpha, z^\alpha) = (y_1^\alpha, y_2^\alpha, z^\alpha)$, причем

$$z^\alpha \in \Upsilon^\alpha := (0, L_\alpha), \quad \alpha = 0, \pm. \tag{1}$$

Длины $L_\alpha > 0$ рассматриваемых участков сосудов существенно превосходят радиусы $R_\alpha > 0$ круговых[4] цилиндров

$$\Omega^\alpha = \{x : \, z^\alpha \in (0, L_\alpha), |y^\alpha| < R_\alpha\}, \quad \alpha = 0, \pm. \tag{2}$$

При этом $x = (x_1, x_2, x_3)$ – глобальная система координат. В данном разделе считаем, что оси (1) цилиндров (2) исходят из общего "центра" $\mathcal{O}$ узла G – эти геометрические объекты нуждаются в уточнении (см. п. 3).

Произведем масштабирование, например, приравняем единице длину L_0 первого сосуда Ω^0 и тем самым сделаем декартовы координаты и все геометрические параметры безразмерными. В результате появляется малый параметр $h = R_0/L_0$, относительно которого и строятся асимптотические разложения. Подчеркнем, что мы пренебрегаем

[3]Процедура понижения размерности в случае изогнутых цилиндров до сих пор не разработана в достаточной степени (ср. работы [30,34], посвященные цилиндрам с плавно и периодически изменящимися сечениями).

[4]В работах [5, 9] установлено, что такая форма здорового и неповрежденного сосуда оптимальна.

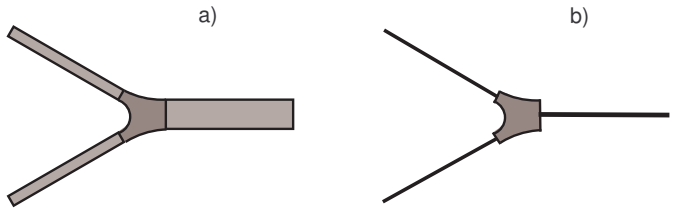

Рис. 4. Разбиение разветвляющейся артерии на цилиндры и узел (a), а также замена цилиндров одномерными отрезками и вычленение узла (b).

обычным в хемодинамике обезразмериванием остальных величин ввиду узкой направленности данного исследования. Далее при конструировании асимптотик присваиваем используемым объектам дополнительный нижний индекс h, т.е. пишем Ξ_h, Ω_h^α, G_h и т.п.

Наличие общего малого параметра h подразумевает возможность использования процедуры [30] понижения размерности в уравнениях Стокса, обычно принятых для описания течение крови. Отметим, что кровь – многокомпонентная жидкость с ярко выраженными вязкоупругими свойствами (см., например, статью [35]), и поэтому привлечение в модель нелинейных уравнений Навье–Стокса, которые отличатся от линейных уравнений Стокса лишь одним конвективным членом, учитывающим трение между элементарными частицами жидкости, вряд ли способствует более адекватному описанию течения крови, и потому по мнению авторов в данном контексте бесполезно, а может быть, и вредно.

Вычисления, сопутствующие применению упомянутой процедуры понижения размерности, подробно изложены в статьях авторов [6,7,9, 35]. Поскольку сам анализ течения крови внутри фрагментов (2) сосудов в данной работе не востребован, ограничимся лишь формулировкой предельных дифференциальных уравнений. Более того, опустим описание двумерной модели тонких (характеризующихся еще одним набором малых параметров H_α/R_α – относительных толщин) многослойных стенок артерии (см. замечание 1). Еще не будем приводить обычные, обеспечивающие правомерность асимптотического анализа, ограничения на естественные безразмерные параметры системы *кровь/стенки* (числа Рейнольдса, Вормслея и пр.): далее оперируем

только предельными системами дифференциальных уравнений по времени t и продольным координатам (1), а также стандартными физическими характеристиками крови и стенок артерии и аневризмы. При выводе условий сопряжения удобно пользоваться размерными величинами – отсылаем читателя к статьям [7, 8, 35], которые в отличие от [5, 6, 9] использует именно такую форму записи. Иными словами, введенный в обозначения трехмерных множеств безразмерный параметр $h \ll 1$ далее часто игнорируется, так как использующая его и полностью разработанная процедура понижения размерности остается за рамками данной статьи.

Замечание 1. Стенка состоит из трех слоев – очень тонкой *интимы*, не влияющей на эффективные упругие свойства, и двух сравнимых по толщине *медии* и *адвентиции*, которые пронизаны спиралевидными укрепляющими коллагеновыми волокнами. Эффективные свойства такой композитной цилиндрической оболочки получены в работах [5, 9].

Обозначив $1/T$ частоту пульса, изучаем T-периодическое течение, описываемое радиальным смещением $u^\alpha(z,t)$ стенки сосуда Ω^α и средним по сечению $\{x \in \Omega^\alpha : \ z^\alpha = z\}$ давлением $p^\alpha(z,t)$ в потоке крови. Одномерная модель [6, 7], основанная на классическом анзаце Рейнольдса–Пуазейля и осредненных упругих характеристиках стенок сосудов, предоставляет дифференциальные уравнения на осях Υ^α цилиндрических фрагментов (2), $\alpha = 0, \pm$, выделенных из разветвляющейся артерии, а именно,

$$\begin{gathered} R_\alpha^{-1} K_\alpha u^\alpha(z^\alpha,t) + H_\alpha \gamma_\alpha \partial_t^2 u^\alpha(z^\alpha,t) = \gamma p^\alpha(z^\alpha,t), \\ (z^\alpha,t) \in \Upsilon^\alpha \times (0,T), \end{gathered} \tag{3}$$

$$2\pi R_\alpha \partial_t u^\alpha(z^\alpha,t) - A(R_\alpha)\partial_z^2 p^\alpha(z^\alpha,t) = 0, \quad (z^\alpha,t) \in \Upsilon^\alpha \times (0,T). \tag{4}$$

При этом коэффициент $A(R_\alpha)$ – эталонный поток через круговое сечение радиусом R_α,

$$A(R_\alpha) = \frac{\pi}{8\nu} R_\alpha^4, \quad \alpha = 0, \pm, \tag{5}$$

вызванный единичным перепадом давления на единичном расстоянии. Как обычно, формула (5) получается интегрированием по сечению продольной компоненты течения Пуазейля. Помимо длин L_α и радиусов R_α сосудов Ω^α и истинных толщин H_α их стенок, в уравнениях

(3), (4) присутствуют следующие физические и механические характеристики: коэффициент динамической вязкости $\nu > 0$ и плотность $\gamma > 0$ крови вместе с осредненными плотностью $\gamma_\alpha > 0$ материала стенки и ее упругим модулем $K_\alpha > 0$ в окружном направлении. Все перечисленные параметры можно найти в справочной литературе (см., например, монографии [36, 37], а также обширные списки литературы в статьях [38, 39]), а явную формулу для K_α – в статьях [5, 9, 38].

У системы (3), (4) обнаруживаются свойства как гиперболического, так и параболического дифференциальных уравнений, решения которых ведут себя совершенно по-разному. Поэтому лишь при вполне определенных связях между перечисленными параметрами (т.е. в случае здоровой артерии) модель описывает правильное поведение системы *поток крови/стенка сосуда*, причем в работах [6] и [38] при помощи асимптотического и численного анализа показано, что рассогласование параметров (например, при одряблении или расслоении сосудистых оболочек по причине старения, недуга или травмы) приводит к аномальному функционированию системы, в частности, появлению противотоков (течений в направлении к сердцу).

Снабдим уравнения (3), (4) условиями периодичности по времени:

$$\begin{aligned} &u^\alpha(z^\alpha, 0) = u^\alpha(z^\alpha, T), \quad \partial_t u^\alpha(z^\alpha, 0) = \partial_t u^\alpha(z^\alpha, T), \\ &p^\alpha(z^\alpha, 0) = p^\alpha(z^\alpha, T), \quad z^\alpha \in \Upsilon^\alpha. \end{aligned} \tag{6}$$

Они отвечают спокойной работе сердца и кровеносной системы, но нуждаются в изменениях при мгновенных нагрузках или других нерегулярных внешних воздействиях на организм.

В *подающем* сосуде Ω^0 задана зависимость потока крови от времени t, т.е. согласно стандартному анзацу Рейнольдса–Пуазейля и формуле (5) положим

$$-A(R_0)\partial_z p^0(L_0, t) = \Phi(t), \quad t \in (0, T). \tag{7}$$

На внешних концах выделенных участков *принимающих* сосудов $\Omega^\pm$ назначим "*периферийное давление*" p_∞:

$$p^\pm(L_\pm, t) = p_\infty, \quad t \in (0, T). \tag{8}$$

Оба данных в краевых условиях (7) и (8) доступны для измерения: метод *магнитно-резонансной томографии* (МРТ) (см. справочник [40]) табулирует потоки крови одновременно в нескольких сосудах с шагом в десятые доли секунды, а периферийное давление, незначительно изменяющееся в рассматриваемых промежутках времени,

можно определить простейшим *тонометром*. Подготовка данных в моделях кровеносных сосудах подробно обсуждается в [8, п. 1 и п. 2], и мы еще вернемся к этому вопросу в п. 5 данной работы.

Для замыкания дифференциальных уравнений (3), (4), снабженных краевыми условиями (7), (8) и условиями периодичности (6), требуется поставить условия сопряжения в точке $z^\alpha = 0$, отождествленных концах отрезков Υ^α, $\alpha = 0, \pm$. Понятно, что эти условия играют первостепенную роль в формировании адекватной одномерной модели разветвляющейся артерии, однако в современной литературе по хемодинамике их исследования по существу отсутствуют, а проведенные асимптотический анализ и численные эксперименты относятся к отдельным прямолинейным – редко искривленным – одиночным фрагментам артерий и обычно лишь после понижения размерности фрагменты соединялись в дерево посредством классических условий сопряжения Кирхгофа (ср. п. 1). Даже при построении полных асимптотических разложений [32, 33] в сочленении труб с абсолютно жесткими стенками не предпринималось попыток понять, как влияют младшие асимптотические члены на перераспределение давлений или потоков.

Особняком стоят публикации авторов [8,10,11], в которых при формировании условий сопряжения были впервые учтены основные поправочные асимптотические члены, а также, что особенно важно, упругие свойства стенок бифуркационного узла. В очередном разделе кратко изложим аргументацию и приведем результаты вычислений из указанных статей – они необходимы при создании модели мешковидной аневризмы.

§3. Одномерная модель разветвляющейся артерии и модифицированные условия сопряжения Кирхгофа

Рассмотрим схематичную картину мысленного выделения цилиндров (2) из артерии с бифуркационным узлом (рис. 5). Вывод дифференциальных уравнений (3), (4) при помощи процедуры понижения размерности всегда подразумевает, что течение крови происходит в прямых цилиндрах (рис. 5, b) с торцами, перпендикулярными их осям, которые встречаются в точке $\mathcal{O}$. В то же время при реальном расчленении узлового сочленения полученные части артерии на рис. 5, c, приобретают скошенные концы, а значит, в одномерных уравнениях (3), (4) были учтены “лишние” объем жидкости и поверхности упругой

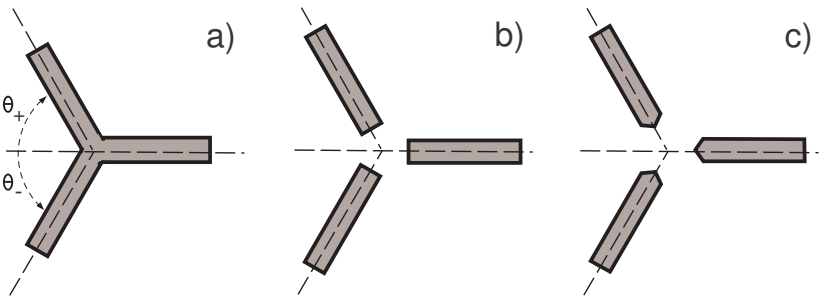

Рис. 5. Бифуркационный узел (a) и его разбиения: обычное (b) и геометрически правильное (c).

стенки сосуда. В статье [8] было предложено компенсировать указанные излишки при формировании условий сопряжения. В результате вместо классического их варианта (см. далее замечание 2 (3)) появились модифицированные условия сопряжения Кирхгофа

$$\begin{aligned} p^{\pm}(0,t) &= p^0(0,t) + hQ_{\pm+}A(R_+)\partial_z p^+(0,t) \\ &\quad + hQ_{\pm-}A(R_-)\partial_z p^-(0,t), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} -A(R_0)\partial_z p^0(0,t) &+ s^0\partial_t u^0(0,t) \\ &= \sum_{\pm}\left(A(R_\pm)\partial_z p^\pm(0,t) - s^\pm\partial_t u^\pm(0,t)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Коэффициентами в этих соотношениях служат элементы *матрицы перепадов давления* $(Q_{\tau\sigma})_{\tau,\sigma=\pm}$, *эффективные площади поверхности* s^α лепестков узла, а также величины (5).

Замечание 2. Подсчитанное в статье [8] уменьшение площади поверхности при заострении цилиндра на рис. 6 дает такие формулы для эффективных площадей:

$$s_\pm = -2\frac{R_\pm R_0}{\sin\theta_\pm}, \quad s_0 = -2R_0^2\sum_{\pm}\frac{1}{\sin\theta_\pm}\left(\frac{R_\pm}{R_0} - \cos\theta_\pm\right). \tag{11}$$

Здесь $\theta_\pm$ – углы, под которыми сосуды $\Omega_\pm$ подходят к сосуду Ω_0 (см. рис. 5, c). Выражения (11) имеют порядок h^2, а коэффициенты (5) – порядок h^4, однако в силу уравнения (18) имеем $R_\alpha\partial_t u^\alpha \approx A(R_\alpha)\partial_z p^\alpha$,

т.е. произведения $s^\alpha \partial_t u^\alpha$ следует считать на один порядок по h меньше остальных слагаемых в (10).

2) Симметричная матрица перепадов давления Q, введенная первоначально в публикации [31], приспособлена в статьях [8, 10, 11] именно к бифуркациям (раздвоениям) сосудов. Ее элементы $Q_{\alpha\pm}$ находятся как постоянные в асимптотике при $z^\pm \to +\infty$ давления P^α в трубе $\Omega_1^{\infty\,\pm} = \{x : z^\alpha \in (0, +\infty), |y^\alpha| < r_\alpha\}$ с радиусом $r_\alpha = h^{-1} R_\alpha$ единичного порядка. При этом (V^α, P^α) – решение задачи Стокса в сочленении трех полубесконечных цилиндров и ограниченного узла

$$\Xi_1^\infty = G_1 \cup \Omega_1^{\infty\,0} \cup \Omega_1^{\infty\,+} \cup \Omega_1^{\infty\,-} \tag{12}$$

со следующими условиями на бесконечности: через сечение канала $\Omega^{\infty\,0}$ закачивается единичный поток жидкости, которая целиком вытекает через сечение канала $\Omega^{\infty\,\pm}$, т.е. в канале $\Omega^{\infty\,\mp}$ поток нулевой. Создание продуктивных вычислительных схем для определения матриц перепадов давления до сих пор остается открытым вопросом.

3) Классические условия сопряжения Кирхгофа – формулы (10), (9) при $s_\alpha = 0$ и $Q_{\tau\theta} = 0$:

$$p^\pm(0,t) = p^0(0,t), \quad -A(R_0)\partial_z p^0(0,t) = \sum_\pm A(R_\pm)\partial_z p^\pm(0,t). \tag{13}$$

Их можно получить предельным переходом $h \to +0$, оставив только старшие асимптотические члены при учете сказанного выше о порядках слагаемых относительно малого параметра h.

В сообщении [10] (см. также подробную статью [11]) сделано важное наблюдение[5], позволяющее сохранить первое условие сопряжения в исходной форме Кирхгофа. Изложим соответствующие рассуждения и преобразования подробно.

Сначала отметим, что выбор центра $\mathcal{O}$ узла G_h – чисто математическая условность: в принципе оси сосудов вовсе не обязаны пересекаться в одной точке и даже могут лежать на скрещивающихся прямых. Поэтому легко объяснимы малые отличия вводимых длин $L_\alpha^h = L_\alpha + hl_\alpha$ осей

$$\Upsilon_h^\alpha(l_\alpha) := (-hl_\alpha, L_\alpha), \quad \alpha = 0, \pm. \tag{14}$$

[5]Подчеркнем, что предложенный прием годится только при бифуркациях сосудов, но, например, трифуркации не обрабатываются с его помощью.

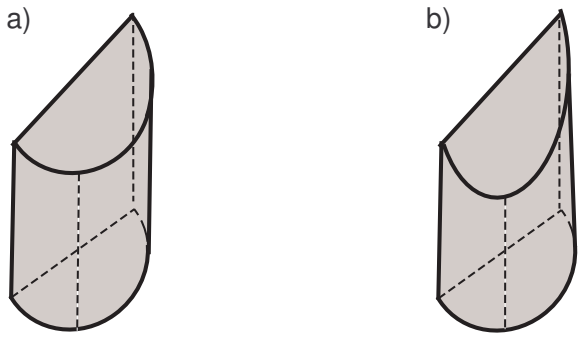

Рис. 6. Сравнение площадей поверхностей прямого (a) и скошенного (b) полуцилиндров.

искусственно образованных цилиндров

$$\Omega_h^\alpha(l_\alpha) = \{x:\ z^\alpha \in (-hl_\alpha, L_\alpha), |y^\alpha| < R_\alpha\}, \tag{15}$$

изображающих фрагменты разветвляющейся артерии: они учитывают упоминавшиеся излишки объема жидкости (ср. рис. 5, b и c). Принимая во внимание приведенные в работах [10, 11] анализ и аргументацию, определим фиктивные размеры l_α по формулам

$$A(R_0)^{-1}l_0 = -Q_{+-} = -Q_{-+}\,, \quad A(R_\pm)^{-1}l_\pm = Q_{+-} - Q_{\pm\pm}. \tag{16}$$

Поскольку знак матрицы перепадов давления остается неизвестным, величины l_0 и $l_\pm$ могут стать как положительными, так и отрицательными (именно последнее предсказуемо в силу сказанного об учтенных излишках объема крови), а значит, отрезки (14), которые названы [10, 11] *эффективными одномерными изображениями осей сосудов*, могут оказаться длиннее ($l_\alpha > 0$) или короче ($l_\alpha < 0$) назначенных изначально в формулах (1). В статьях [10, 11] приведен асимптотический анализ, показывающий, что переход к эффективным длинам осей неимоверно повышает точность аппроксимации трехмерного течения в сочленении сосудов с жесткими стенками.

Распространим дифференциальные уравнения (3), (4) на отрезки (14):

$$R_\alpha^{-1} K_\alpha u^\alpha(z^\alpha, t) + H_\alpha \gamma_\alpha \partial_t^2 u^\alpha(z^\alpha, t) = \gamma p^\alpha(z^\alpha, t), \quad (z^\alpha, t) \in \Upsilon_h^\alpha(l_\alpha) \times (0, T), \tag{17}$$

$$2\pi R_\alpha \partial_t u^\alpha(z^\alpha, t) - A(R_\alpha) \partial_z^2 p^\alpha(z^\alpha, t) = 0, \quad (z^\alpha, t) \in \Upsilon_h^\alpha(l_\alpha) \times (0, T). \tag{18}$$

Краевые условия (7), (8) и условия периодичности (6) остаются без изменений. Убедимся в том, что первое условие сопряжения (9), связывающее значение функций p^α в точках $z^\alpha = -hl_\alpha$, принимают вид обычного устойчивого условия Кирхгофа, выражающего непрерывность функции давления:

$$p^\pm(-hl_\pm, t) = p^0(-hl_0, t). \tag{19}$$

Применим формулу Тейлора

$$p^\alpha(-hl_\pm, t) = p^\alpha(0, t) - hl_\alpha \partial_z p^\alpha(0, t) + O(h^2)$$

и, пренебрегая бесконечно малыми $O(h^2)$, получим соотношение

$$\begin{aligned} p^\pm(-hl_\pm, t) - p^0(-hl_0, t) &= p^\pm(-hl_\pm, t) - hl_\pm \partial_z p^\pm(0, t) - p^0(0, t) \\ &\quad + hl_0 \partial_z p^0(0, t) + O(h^2) \\ &= p^\pm(0, t) - p^0(0, t) \\ &\quad + h(Q_{\pm\pm} - Q_{-+}) A(R_\pm) \partial_z p^\pm(0, t) \\ &\quad + hQ_{-+} \sum_{\tau=\pm} A(R_\tau) \partial_z p^\tau(0, t) + O(h^2) \\ &= p^\pm(0, t) - p^0(0, t) + hQ_{\pm\pm} A(R_\pm) \partial_z p^\pm(0, t) \\ &\quad + hQ_{\pm\mp} A(R_\mp) \partial_z p^\mp(0, t) + O(h^2). \end{aligned} \tag{20}$$

В средней части (20) применены определения (16), а также последнее равенство (13), вытекающее из второго модифицированного условия Кирхгофа (10) после удаления слагаемых $O(h)$ (ср. формулы (11) и замечание 2 (3)). Итак, в силу первого модифицированного условия Кирхгофа (9) выражение (20) – бесконечно малая $O(h^2)$, т.е. соотношение действительно выполнено (19) с достаточной степенью точности.

Перенесем второе модифицированное условие сопряжения Кирхгофа (10) в точки $z^\alpha = -hl_\alpha$ опять-таки посредством формулы Тейлора

$$\partial_z p^\alpha(-hl_\pm, t) = \partial_z p^\alpha(0,t) - hl_\alpha \partial_z^2 p^\alpha(0,t) + O(h^2).$$

Поскольку

$$A(R_\alpha)\partial_z^2 p^\alpha(0,t) = 2\pi R_\alpha \partial_t u^\alpha(0,t) \tag{21}$$

в силу исходных уравнений (4), находим, что левая и правая части равенства (10) с допустимой погрешностью записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&- A(R_0)\partial_z p^0(0,t) + s^0 \partial_t u^0(0,t)\\
&= -A(R_0)\partial_z p^0(-hl_0,t) + hl_0 A(R_0)\partial_z^2 p^\alpha(0,t) + s^0\partial_t u^0(0,t) + \dots\\
&= -A(R_0)\partial_z p^0(-hl_0,t) + 2\pi R_0 hl_0 A(R_0)\partial_t u^\alpha(0,t) + s^0\partial_t u^0(0,t) + \dots\\
&= -A(R_0)\partial_z p^\alpha(-hl_0,t) + S^0\partial_t u^0(-hl_0,t) + \dots,
\end{aligned} \tag{22}$$

и

$$\begin{aligned}
&\sum_\pm \big(A(R_\pm)\partial_z p^\pm(0,t) - s^0\partial_t u^\pm(0,t)\big)\\
&\quad = \sum_\pm \big(A(R_\pm)\partial_z p^\pm(-hl_\pm,t) - S^0\partial_t u^\pm(-hl_\pm,t)\big).
\end{aligned} \tag{23}$$

При этом

$$S^\alpha = s^\alpha + 2\pi R_\alpha hl_\alpha. \tag{24}$$

В преобразованиях (22) и (23) учтено равенство (21) вместе с формулой $u^\alpha(-hl_\pm,t) = u^\alpha(0,t) + O(h)$. Итак, второе условие сопряжения принимает вид

$$\begin{aligned}
&-A(R_0)\partial_z p^\alpha(-hl_0,t) + S^0\partial_t u^0(-hl_0,t)\\
&\qquad = \sum_\pm \big(A(R_\pm)\partial_z p^\pm(-hl_\pm,t) - S^\pm\partial_t u^\pm(-hl_\pm,t)\big).
\end{aligned} \tag{25}$$

Подчеркнем, что изменение (24) эффективных площадей s^α вполне обосновано вариацией (14) длин осей сосудов (15), так как последнее слагаемое в правой части (24) – соответствующие приращения площадей цилиндрических поверхностей.

Итак, сформулирована одномерная модель разветвляющейся здоровой артерии, состоящая из дифференциальных уравнений (17), (18), краевых условий (7), (8), а также условий периодичности (6) и сопряжения (19), (25). Она отличается от предложенной ранее [8] модели (3),

(4), (6)–(10) тем, что устойчивое условие сопряжения имеет вид классического условия Кирхгофа и позволяет придать смысл осредненному давлению в бифуркационном узле, хотя само определение одномерного узла становится проблематичным (см. схему на рис. 3, b).

§4. Модель мешковидной анавризмы

Дефекты сосудов кровеносной системы могут иметь разнообразную природу, однако их проявление в основном сводится к ослаблению упругих свойств стенок посредством изменения их физических параметров (вследствие старения, болезней, медикоментозного воздействия и пр.) или геометрических размеров (вследствие травмирования, хирургического вмешательства и пр.). Локальное изменение формы сосуда называется *аневризмами*. Аневризмы бывают *истинными* (*aneurysm verum* – врожденными) и *ложными* (*aneurysm falsum* – приобретенными), и классифицируются в зависимости от их формы и местоположения. В данной статье мы занимаемся *мешковидными* аневризмами бифуркационных узлов, а другие типы аневризм, удаленные от узлов артерии, уже рассматривались в работах [7, 39]. Седловина стенки узла подвержена наибольшим растягивающим напряжениям вследствие завихренности течения крови при разделении потока крови между принимающими сосудами. Как результат, возможна диссекция (расслоение медии и адвентиции; см. замечание 1) стенки, а затем и ее прободение, сопровождающееся образованием локализованной внешней гематомы – мешочка, который заполнен кровью и соединен с просветом сосуда (рис. 2, a и b). Гематома окружена клеточной или мышечной тканью и разве лишь выпученной тонкой пленкой интимы, а значит, упругие свойства внешней поверхности гематомы значительно более слабые, чем у самой артерии и ее узла (см. описание и конкретные данные, например, в монографии [36]).

Поскольку аневризма соединена с просветом бифуркационного узла, давление $\mathbf{p}(t)$ в ней с допустимой погрешностью можно считать равной величине (19). При увеличении давления $\mathbf{p}(t)$ со временем возрастает и объем $\mathbf{v}(t)$ аневризмы по причине растяжения ее податливой стенки, т.е. происходит исход крови из узла через соединительное отверстие. Взяв периферийное давление p_∞ в качестве точки отсчета (приписываем его гидростатическому давлению в клетчатом или

мышечном материале, окружающем гематому), учитываем баланс потоков посредством включения нового члена в левую часть условия сопряжения (25)

$$-A(R_0)\partial_z p^0(-hl_0,t) + S^0\partial_t u^0(-hl_0,t) - F^0(p^0(-hl_0,t) - p_\infty) \\ = \sum_{\pm}\big(A(R_\pm)\partial_z p^\pm(-hl_\pm,t) - S^\pm\partial_t u^\pm(-hl_\pm,t)\big). \tag{26}$$

Здесь F^0 – некоторый коэффициент, характеризующий геометрию аневризмы и упругие свойства внешней ткани. Конструкция добавочного члена учитывает, что в главном приращение объема $\mathbf{v}(t)$ аневризмы равно произведению площади $\mathbf{s}(t)$ на скорость нормального смещения $\partial_t\mathbf{u}_n(t)$ ее поверхности. Последнее прямо пропорционально внутреннему давлению $\mathbf{p}(t)$ в гематоме и среднему ее радиусу $\mathbf{r}(t)$ и обратно пропорционально упругому модулю $\mathbf{E}$ окружающего материала. Наконец, поток крови вовнутрь гематомы за единицу времени равен приращению объема, деленному на площадь сечения соединительного отверстия. Все это придает правильную, согласованную с остальными слагаемыми в равенстве (26), размерность, а причины, почему мы считаем величину F^0 постоянной поясняются в следующем разделе.

Проделанные численные эксперименты [39] для одномерной модели аневризмы другого типа позволяют предсказать сценарий прохождения крови через поврежденный узел на рис. 2 в рамках одномерной модели. Именно, подаваемая от сердца под значительным давлением кровь через сосуд Ω^0 распределяется между принимающими сосудами $\Omega^\pm$, но некоторая часть крови проникает в гематому, причем все бо̀льшая при ослабевающей сопротивляемости окружающей ткани. По завершению интенсивного временного участка $[0,T_*)$ приток крови через Ω^0 прекращается, давление $\mathbf{p}(t)$ снижается на экстенсивном участке $(T_*,T]$, и кровь начинает возвращаться в узел из гематомы, растекаясь по всем трем сосудам Ω^0 и $\Omega^\pm$. В результате возникает нежелательный противоток крови в Ω^0, а течение в $\Omega^\pm$ становится вялым, что затрудняет доставку крови к периферии кровеносной системы. Авторы планируют провести численные эксперименты для различных по порядку значениях коэффициента F^0 в условиях сопряжения (19), (26), замыкающих одномерную модель (17), (18) с начально-краевыми условиями (7), (8) и условиями T-периодичности (6) по переменной t.

§5. О подготовке данных и применении одномерной модели

Определение физических и геометрических характеристик бифуркационного узла артерии и тем более примыкающей к нему аневризмы затруднено, в частности, потому, что в медицинской практике подводить к узлу эндоскопический катетер для детального обзора категорически запрещено из-за возможного повреждения стенок. Таким образом, бесполезно пытаться правильно вычислить параметр F^0 в условии (26) при помощи классических решений внешней задачи теории упругости для полостей канонических форм, тем более из-за того, что определить упругие характеристики посредством визуального или рентгенографического обзора невозможно. Поэтому более предпочтительна следующая стратегия моделирования кровеносной системы, *всей*, а не описанного ее фрагмента. Современная аппаратура МРТ (см., например, [40]) позволяет найти потоки крови через несколько сечений сосудов с временным шагом в десятые доли секунды и тем самым подготовить заведомо переопределенную совокупность данных для одномерной модели. Таким образом, решение обратных задач с подходящими целевыми функциями дает возможность вычислить все параметры модели.

Поскольку артериальная система включает несколько десятков бифуркационных узлов, индивидуальная модель каждого из них должна быть максимально простой – именно поэтому слагаемое, введенное в условие сопряжения (26) и моделирующее мешковидную аневризму, содержит один постоянный коэффициент и линейно зависит лишь от одной характеристики, давления (19), потока крови через узел. Подчеркнем, что в рамках предлагаемого подхода усложнение моделй отдельных участков артериального дерева может излишне перегрузить общую систему дифференциальных уравнений, сделав ее трудно- и долгорешаемой, а значит, бесполезной для медицинских целей, требующих зачастую экстренной диагностики состояния пациента.

Одна из функций бифуркационного узла – распределение потоков при раздвоении артериального дерева. Отношение $\Phi_-(t) : \Phi_+(t)$ потоков $\Phi^\pm(t)$ через сосуды $\Omega^\pm$ определяется не только скоростью поступающей крови и геометрическими и механическими характеристиками рассматриваемого узла, но также состоянием исходящих из него поддеревьев и внешними воздействиями на них. Таким образом, постановка краевых условий (8) с периферийным давлением – серьезное

допущение, потребовавшееся для замыкания индивидуальной модели узла. Более реалистичным оказывается применение дифференциальных уравнений и условий сопряжения на каждом из звеньев и в каждом из узлов артериального дерева, причем при достаточной тонкости периферийных сосудов их следует заменить искусственными краевыми условиями типа Робэна [41], параметры которых также следует вычислять при решении обратных задач.

Образование мешковидной аневризмы в первую очередь влияет на режим и уменьшает скорость кровотока через бифуркационный узел, а также изменяет распределение $\Phi_-(t) : \Phi_+(t)$ потоков, что с одной стороны усложняет кровоснабжение периферии организма, но с другой стороны легко идентифицируется аппаратурой МРТ. При этом после предварительного вычисления отношения $\Phi_-(t) : \Phi_+(t)$ для конкретного узла, подозрительного на наличие аневризмы, возможно детализированное его локализированное исследование либо посредством мощной медицинской аппаратуры, либо при помощи более сложных трехмерных моделей, учитывающих нелинейные свойства многослойных упругих стенок сосуда, вязкоупругих свойств многокомпонентной крови и прочие эффекты, которые проигнорированы при создании простейшей одномерной модели.

Литература

1. G. R. Kirchhoff, *Ueber den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisformige.* — Annalen der Physik und Chemie **1845**. Bd. LXIV, No. 4, 497-514.
2. L. Pauling, *The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules.* — J. Chem. Phys. **4** (1936).
3. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* — Мир, М., 1971.
4. A. Bressan, S. Canic, M. Garavello, M. Herty, Piccoli B., *Flows on networks: recent results and perspectives.* — European Mathematical Society (EMS Surveys in Mathematical Sciences) **1**, No. 1. (2014), 47–111.
5. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Поверхностная энтальпия и упругие свойства кровеносных сосудов.* — Доклады РАН. **441**, No. 1 (2011), 38–43.
6. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотические модели течения крови в артериях и венах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **409** (2012), 80–106.
7. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Простейшая одномерная модель ложной аневризмы в большой бедренной артерии.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **426** (2014), 64–86.

8. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Условия сопряжения в одномерной модели разветвляющейся артерии с упругими стенками.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 138–177.
9. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Асимптотические модели анизотропных неоднородных упругих стенок кровеносных сосудов.* — Проблемы матем. анализа. **83** (2016), Новосибирск, 93–110.
10. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Эффективные одномерные образы артериальных деревьев из кровеносной системы.* — Доклады РАН **473**, No. 2 (2017) , 295–301.
11. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Одномерная модель течения в сочленении тонких каналов в том числе артериальных деревьев.* — Матем. сборник. **208** (2017). Т. , №8. 56–105.
12. H. Le Dret, *Modeling of the junction between two rods.* — J. Math. Pures Appl. **68** (1989), 365–397.
13. С. А. Назаров, А. С. Слуцкий, *Асимптотический анализ произвольной пространственной системы тонких стержней.* — Труды Санкт-Петербург. матем. о-ва. **10** (2004), 63–115.
14. P. Kuchment, (Editor), *Quantum graphs and their applications.* — a special issue of Waves in Random media **14**, No. 1 (2004).
15. P. Exner, H. Kovařík, *Quantum Waveguides*, Hidelberg, Springer, 2015.
16. P. Kuchment, *Graph models for waves in thin structures.* — Waves in Random Media **12**, No. 12 (2002), R1–R24.
17. P. Kuchment, O. Post, *On the spectrum of carbon nano-structures.* — Communications in Mathematical Physics. **275**, No. 3 (2007), 805–826.
18. E. Korotyaev, I. Lobanov, *Schrödinger operators on zigzag nanotubes.* — Annales Henri Poincaré **8**, No. 6 (2007), 1151–1176.
19. А. В. Баданин, Коротяев Е. Л, *Об одном магнитном операторе Шрёдингера на периодическом графе.* — Матем. сборник. **201**, No. 10 (2010), 3-46.
20. I. Y. Popov, A. N. Skorynina, I. V. Blinova, *On the existence of point spectrum for branching strips quantum graph.* — J. Math. Phys. **55**, No. 3 (2014).
21. V. A. Kozlov, S. A. Nazarov, A. Orlof, *Trapped modes supported by localized potentials in the zigzag graphene ribbon.* — C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. **354**, No. 1 (2016), 63–67.
22. S. Molchanov, B. Vainberg, *Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics.* — Comm. Math. Phys. **273**, No. 2 (2007), 533-559.
23. D. Grieser, *Spectra of graph neighborhoods and scattering.* — Proc. London Math. Soc. **97**, No. 3 (2008), 718–752.
24. S. A. Nazarov, K. Ruotsalainen, P. Uusitalo, *Asymptotics of the spectrum of the Dirichlet Laplacian on a thin carbon nano-structure.* — C. R. Mecanique. **343** (2015), 360-364.
25. С. А. Назаров, *Спектр прямоугольных решеток квантовых волноводов.* — Известия РАН. Серия матем. **81**, No. 1 (2017), 31–92.
26. Ф. Л. Бахарев, С. Г. Матвеенко, С. А. Назаров, *Дискретный спектр крестообразных волноводов.* — Алгебра и анализ **28**, No. 2 (2016), 32-45.

27. Ф. С. Рофе-Бекетов, *Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций.* — Доклады АН СССР **184** (1969), 1034–1037.
28. Б. С. Павлов, *Теория расширений и явно решаемые модели.* — Успехи матем. наук **4**, No. 6 (1987), 99–132.
29. K. Pankrashkin, *Eigenvalue inequalities and absence of threshold resonances for waveguide junctions.* — J. Math. Anal. Appl. **449** (2017), 907–925.
30. С. А. Назаров, К. И. Пилецкас, *Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале.* — Литовский матем. сборник. **30**, No. 4 (1990), 772–783.
31. S. A. Nazarov, K. Pileckas, *Asymptotic conditions at infinity for the Stokes and Navier–Stokes problems in domains with cylindrical outlets to infinity.* — Quaderni di matematica **4** (1999), 141–243.
32. G. Panasenko, K. Pileckas, *Asymptotic analysis of the nonsteady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe.* — Applicable Analysis **91**, No. 3 (2012), 559–574.
33. G. Panasenko, K. Pileckas, *Flows in a tube structure: equation on the graph.* — J. Math. Phys. **55** (2014), 081505; doi: 10.1063/1.4891249.
34. S. A. Nazarov, *The Navier–Stokes problem in thin or long tubes with periodically varying cross-section.* — ZAMM **80**, No. 9 (2000), 591–612.
35. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Одномерная модель вязкоупругого течения крови в тонком упругом сосуде.* — Проблемы матем. анализа. **78** (2015), Новосибирск, 123–140.
36. Y. C. Fung, *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*, New York, Berlin, Springer, 1993.
37. Y. C. Fung, *Biomechanics. Circulation*, Second edition. New York, Berlin, Springer, 2011.
38. F. Berntsson, M. Karlsson, V. Kozlov, S. A. Nazarov, *A one-dimensional model of viscous blood flow in an elastic vessel.* — Appl. Math. Comput. **274** (2016), 125-132.
39. F. Berntsson, M. Karlsson, V. Kozlov, S. A. Nazarov, *A one-dimensional model of a false aneurysm.* — Int. J. Research in Engineering and Sci. **6**, No. 5 (2017), 61–73.
40. J. PHornak, *The Basics of MRI*, Interactive Learning Software, 2008.
41. V. A. Kozlov, S. A. Nazarov, G. Zavorokhin, *A fractal graph model of capillary type systems.* — Complex Variables and Elliptic Equations. (2017). published online 17.07.2017

Kozlov V. A., Nazarov S. A. Model of saccular aneurysm of the bifurcation node of the artery.

Modified Kirchhoff conditions in the simple one-dimensional model of the branching artery developed by the authors, allow to describe an anomaly of its bifurcation node, congenital or acquired due to trauma or disease of the vessel wall. The pathology of the blood flow through the damaged

node and the methods of determining the aneurysm parameters from data measured at the peripheral parts of the circulatory system by solving inverse problems are discussed.

Поступило 8 ноября 2017 г.

Applied Mathematics,
Department of Mathematics,
Linkopings Universitet
581 83 Linkoping Sweden
E-mail: vlkoz@mai.liu.se

ИПМаш РАН, Большой пр. В.О. 61,
199178 С.Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk