

А. С. Кирпичникова, Н. Я. Кирпичникова

МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ЛЕОНТОВИЧА-ФОКА НА УДЛИНЕННОМ ТЕЛЕ  
ВРАЩЕНИЯ В ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА

Рассматривается коротковолновая дифракция плоской падающей волны на строго выпуклом, вытянутом теле вращения. Геометрические характеристики рассеивателя (радиусы кривизны поверхности тела вращения) считаются много больше длины падающей волны. Падающая волна распространяется вдоль оси вращения. Полное волновое поле  $U$ , есть сумма падающей  $U^{\text{inc}}$  и отражённой  $U^{\text{ref}}$  волн,  $U = U^{\text{inc}} + U^{\text{ref}}$ . Поле построено в окрестности границы свет-тень (то есть в полутеневой области В. А. Фока, [1]) являющейся “зародышевой” зоной для поля в окрестности предельных лучей и в затенённой части тела. Коротковолновое поле в освещённой области рассеивателя описано в рамках лучевого метода. Поле  $U$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям Неймана или Дирихле. В окрестности точки  $s = 0$ , лежащей на границе геометрической тени (экватор) введем пологранничный слой Фока  $\mathcal{O}(sk^{\frac{1}{3}}) = \mathcal{O}(1)$ ,  $\mathcal{O}(nk^{\frac{2}{3}}) = \mathcal{O}(1)$ ,  $k$  это волновое число,  $n$  – расстояние вдоль внешней нормали к рассеивателю,  $s$  – длина дуги геодезической. В окрестности границы свет-тень, то есть в пологранничном слое Фока, лучевой метод не применим. Полное поле в пологранничном слое Фока представим в виде  $U = e^{iks}(W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}})$ , где  $e^{iks}$  даёт наиболее осциллирующий множитель волнового поля вдоль геодезической, а функция  $W$  называется функцией ослабления. Введя вместо  $s$  и  $n$  безразмерные координаты  $\sigma$  и  $\nu$ , и, представив падающее поле  $e^{ikz}$  в координатах  $\sigma$  и  $\nu$ , получим первые три члена разложения  $W^{\text{inc}}$  вида

$$W(\sigma, \nu) = W_0^{\text{inc}} + \frac{W_1^{\text{inc}}}{k^{\frac{1}{3}}} + \frac{W_2^{\text{inc}}}{k^{\frac{2}{3}}} + \mathcal{O}(k^{-1}), \quad k \gg 1,$$

здесь  $W_0^{\text{inc}}$  назовём главным,  $W_1^{\text{inc}}$  – первым, а  $W_2^{\text{inc}}$  вторым членом асимптотического разложения. Функции  $W_i^{\text{inc}}$ ,  $i = 0, 1, 2$ , в области

---

*Ключевые слова:* дифракция коротких волн на вытянутом теле вращения, задача Неймана, метод параболического уравнения Леонтовича-Фока.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 17-01-00529-А.

Фока имеют вид интегралов от линейной комбинации функций Эйри  $v(t)$  и её производной  $v'(t)$  на полиномы по безразмерной переменной нормали  $\nu$ . Применим метод параболического уравнения Леонтического–Фока [1, 4], к искомой функции

$$W^{\text{ref}}(\sigma, \nu) = W_0^{\text{ref}} + \frac{W_1^{\text{ref}}}{k^{\frac{1}{3}}} + \frac{W_2^{\text{ref}}}{k^{\frac{2}{3}}} + \mathcal{O}(k^{-1}), \quad k \gg 1.$$

Функции  $W_i^{\text{ref}}$ ,  $i = 0, 1, 2$  удовлетворяют рекуррентной системе дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_0 W_0^{\text{ref}} = 0, \quad \mathcal{L}_0 W_1^{\text{ref}} + \mathcal{L}_1 W_0^{\text{ref}} = 0, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_0 W_2^{\text{ref}} + \mathcal{L}_1 W_1^{\text{ref}} + \mathcal{L}_2 W_0^{\text{ref}} = 0 \quad \text{и так далее.}$$

Функции ослабления  $W_i^{\text{ref}}$ ,  $i = 0, 1, 2$  так же имеют вид интегралов от функций  $w_1(t)$  и  $w'_1(t)$  (в определении Фока) на полиномы по  $\nu$ .

Эти формулы дают непрерывный переход от поля в освещённой области (лучевое разложение) к полной тени, где решение экспоненциально убывает при  $\sigma > 0$ . Кроме того, в тени интегралы  $W_i^{\text{ref}}$ ,  $i = 0, 1, 2$  могут быть представлены как сумма вычетов в корнях знаменателей подинтегрального выражения. Последнее позволяет построить волны соскальзывания по начальным данным, которые даёт эта асимптотика. Ввиду удлинённости тела вращения, построенное двухмасштабное асимптотическое разложение в области Фока позволяет получить приближённые формулы для волнового поля в зависимости от больших параметров задачи. Так, рекуррентная система дифференциальных уравнений (1) сохраняет асимптотический характер, при условии, что параметр удлинения

$$\Lambda_0 = 2M_0^{2-\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 2, \quad \Lambda_0 = \frac{\rho_0}{f(0)}, \quad M_0 = \left(\frac{k\rho_0}{2}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (2)$$

Здесь параметр удлинения  $\Lambda_0$  равен отношению радиусов кривизн вдоль геодезических и вдоль экватора, а  $M_0$  это параметр Фока.

## 1. ПОСТАНОВКА И ГЕОМЕТРИЯ ЗАДАЧИ

Мы повторяем формулировку задачи из [2, 3], однако решение строится на основе совершенно других методов [1, 4, 5], позволяющих проследить влияние обоих радиусов кривизны тела вращения на волновое поле.

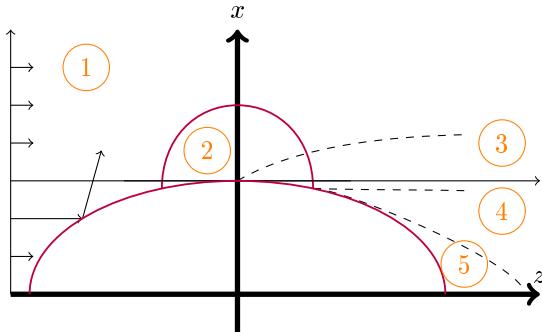


Рис. 1. На рисунке представлены основные пять зон освещённости при дифракции плоской волны на теле вращения  $\Omega$ : зона света 1, зона 2 это окрестность точки касания предельного луча (зона Фока), зона 3 это полутеневая область в окрестности предельного луча, зона 4 – тень, зона 5 это поверхностный слой в зоне тени, где формируются волны скольжения.

Предположим, что поверхность  $\partial\Omega$  рассеивателя  $\Omega$  образована вращением плоской строго выпуклой кривой  $x = f(z)$  вокруг оси  $z$ . Сечение поверхности  $\partial\Omega$  плоскостью  $z = 0$  называется экватором и совпадает с границей свет-тень, которая появляется в результате падения на  $\Omega$  плоской волны  $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$ . Здесь  $k \gg 1$  это волновое число, причем  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , где  $\lambda$  это длина падающей волны, (см. Рис. 1).

Волновое поле  $U$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца с граничным условием Неймана на поверхности  $\partial\Omega$ , то есть

$$(\Delta + k^2)U = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} U|_{n=0} = 0, \quad (3)$$

а также удовлетворяет принципу предельного поглощения, который состоит в том, что при малой  $\text{Im } k > 0$ ,  $U \rightarrow 0$  на больших расстояниях от окрестности полутени. Граничное условие Дирихле рассмотрено в работах [4], [5] и приводится в данной статье для сравнения волновых полей задач Дирихле и Неймана друг с другом.

Наравне с декартовыми координатами  $\{x, y, z\}$  и полярными координатами  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  в окрестности экватора, введём криволинейные координаты  $\{s, n, \varphi\}$ ,

где  $s$  есть длина дуги вдоль геодезических (меридианов), отсчитываемая от экватора, (то есть  $s = 0$ ) так, что  $s < 0$  соответствует освещенной части  $\partial\Omega$ ,  $s > 0$  отвечает затенённой части поверхности. Связь между  $s$  и  $z$  определяется соотношением

$$s = \int_0^z \sqrt{1 + (f'(z))^2} dz. \quad (4)$$

Радиус-вектор точки  $M$  вне  $\Omega$  в полярных координатах  $(r, \varphi, z)$  имеет вид

$$\mathbf{R}(M) = r[\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y] + z \mathbf{e}_z.$$

Если точка лежит на  $\partial\Omega$ , тогда  $r = f(z)$ , и единичная внешняя нормаль к  $\partial\Omega$  определяется следующей формулой

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla[r - f(z) = 0]}{|\nabla[r - f(z) = 0]|} = \frac{(\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y) - f'_z(z) \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (f'_z)^2}}.$$

Радиус-вектор точки, лежащей на поверхности  $\partial\Omega$ , равен

$$\mathbf{R}(s) = f(z(s))[\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y] + z(s) \mathbf{e}_z = f(z(s)) \mathbf{e}_r + z(s) \mathbf{e}_z,$$

где единичный орт нормали  $\mathbf{e}_r = (\cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y)$ . Кроме того, касательные вектора вдоль меридианов ортогональны касательным векторам вдоль параллелей на поверхности рассеивателя. В системе координат  $\{s, n, \varphi\}$  радиус-вектор имеет вид

$$\mathbf{R}(M) = \mathbf{R}(s) + n \mathbf{n} = \mathbf{R}(s) + n \frac{\mathbf{e}_r - f'_z \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + (f'_z)^2}}.$$

Для того, чтобы найти коэффициенты Ламе, используем полный дифференциал  $d\mathbf{R}(M)$ :

$$d\mathbf{R}(M) = d\mathbf{R}(s) + d(n \mathbf{n}) = \frac{\partial \mathbf{R}(s)}{\partial z} dz + \frac{\partial \mathbf{R}(s)}{\partial \varphi} d\varphi + dn \mathbf{n} + n d\mathbf{n}.$$

Тогда

$$(d\mathbf{R}(M), d\mathbf{R}(M)) = \left(1 + \frac{n}{\rho(s)}\right)^2 ds^2 + dn^2 + \left(f + \frac{n}{\sqrt{1 + (f'_z)^2}}\right)^2 d\varphi^2.$$

Функция  $\rho(s)$  это радиус кривизны меридиана в точке  $s$ . При этом квадрат линейного элемента длины, равный

$$dS^2 = h_s^2 ds^2 + dn^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2,$$

определяет коэффициенты Ламе

$$\begin{aligned} h_s &= 1 - n \frac{f''(z(s))}{[1 + (f'(z(s)))^2]^{3/2}} = 1 + \frac{n}{\rho(s)}, \quad h_n = 1 \\ h_\varphi &= f(z(s)) + \frac{n}{\sqrt{1 + (f'(z(s)))^2}}, \quad \frac{1}{\rho(s)} = \frac{-f''(z(s))}{[1 + (f'(z(s)))^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Отметим, что  $z$  в (4) рассматривается как функция от  $s$ , то есть,  $z = z(s)$  можно получить обращением (4). В результате обращения (4) получаем

$$z(s) = s - \frac{s^3}{3!\rho_0^2} + \frac{3\rho'_0}{4!\rho_0^3}s^4 + \left[ \frac{-11(\rho'_0)^2 + 4\rho_0\rho''_0 + 1}{5!\rho_0^4} \right] s^5 + \mathcal{O}(s^6).$$

Здесь  $\rho_0 = \rho(s)|_{s=0}$  есть радиус кривизны геодезических (меридианов) на границе свет-тень. Умножим радиус-вектор в системе координат  $(s, n, \varphi)$  на  $\mathbf{e}_z$  и найдём разложение  $z$  по  $s$  и  $n$ :

$$z = z(s) + n(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) = z(s) + n \frac{-f'(z(s))}{\sqrt{1 + [f'(z(s))]^2}}.$$

Учитывая разложение по  $s$  функции  $f(z(s))$ , имеем

$$\begin{aligned} z &= s + \left( -\frac{s^3}{3!\rho_0^2} + \frac{ns}{\rho_0} \right) + \left( \frac{3\rho'_0 s^4}{4!\rho_0^3} - \frac{ns^2 \rho'_0}{2!\rho_0^2} \right) \\ &\quad + \left( \frac{\alpha s^5}{5!\rho_0^4} - \frac{\beta ns^3}{3!\rho_0^3} \right) + \mathcal{O}(s^6, ns^4). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее из формул

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{-f''(z(s))}{[1 + (f'(z(s)))^2]^{3/2}} \quad \text{и} \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(z(s)))^2}}$$

найдём

$$f'_z(0) = 0, \quad f_z^{(2)} = f_{zz}''(0) = -\frac{1}{\rho_0}, \quad f_z^{(3)} = f_{zzz}'''(0) = -\frac{d}{ds} \frac{1}{\rho} \Big|_{s=0}, \dots$$

Здесь и далее, все выражения, относящиеся к зоне Фока, содержат функции от  $s$ , вычисленные в  $s = 0$ . Коэффициенты  $\alpha, \beta$  в (6) имеют вид

$$\alpha = 4\rho_0\rho''_0 - 11(\rho'_0)^2 + 1, \quad \beta = \rho_0\rho''_0 - 2(\rho'_0)^2 + 1. \quad (7)$$

Отметим, что для упрощения задачи мы рассмотрим осесимметрический случай, подобно работам [2, 3], то есть будем искать решение,

которое не зависит от угла  $\varphi$ , а именно, такое, что  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ . Следовательно, решение в трёхмерном случае можно строить в любом сечении по  $\varphi$ , например,  $\varphi = 0$ .

В окрестности тех точек поверхности  $\partial\Omega$ , которые принадлежат границе свет-тень, то есть в области 2 (см. рис. 1), введём масштабы по  $s$  и  $n$  в рамках метода параболического уравнения Леонтовича-Фока:  $sk^{\frac{1}{3}} = \mathcal{O}(1)$ ,  $nk^{\frac{2}{3}} = \mathcal{O}(1)$ ,  $k \gg 1$ , где символ  $\mathcal{O}(1)$  означает, что правые части равенств пропорциональны постоянным. Эти постоянные содержатся в формулах для безразмерных переменных  $\sigma = \mathcal{O}(1)$  и  $\nu = \mathcal{O}(1)$ ,

$$\sigma = \frac{k^{1/3}s}{2^{1/3}\rho_0^{2/3}} = \frac{\mathbf{M}_0}{\rho_0}s, \quad \nu = \frac{2^{1/3}k^{2/3}n}{\rho_0^{1/3}} = \frac{2\mathbf{M}_0^2}{\rho_0}n. \quad (8)$$

Ширина области полутени  $|s| \leq \frac{\rho_0}{\mathbf{M}_0}|\sigma|$  имеет порядок  $\mathcal{O}(\frac{1}{\mathbf{M}_0})$ , здесь  $\mathbf{M}_0$  это безразмерный параметр Фока (2),  $\mathbf{M}_0 \gg 1$ .

В задаче о коротковолновой дифракции плоской падающей волны на сильно вытянутом рассеивателе, разложение поля наследует не только свойства большого параметра Фока  $\mathbf{M}_0$ , но и второго параметра удлинения тела  $\Lambda_0$  (2), см. [4, 5].

Решение в пограничном слое 2 построено методом двухмасштабного разложения и параметр  $\Lambda_0$  появлялся в рекуррентной системе уравнений для пограничного слоя в комбинации  $\frac{\Lambda_0}{2\mathbf{M}_0^2}$  и её положительных степенях. Асимптотический характер разложения не нарушается, если  $\frac{\Lambda_0}{2\mathbf{M}_0^2}$  будет порядка  $\mathcal{O}(\mathbf{M}_0^{-\varepsilon})$  для  $0 < \varepsilon < 2$ . При  $\varepsilon = 2$ ,  $\Lambda_0 = 2\mathbf{M}_0^{2-\varepsilon} = \mathcal{O}(1)$  и оба радиуса кривизны мало отличаются друг от друга (что не является случаем вытянутого тела).

При  $\varepsilon = 0$ , параметр  $\Lambda_0$  компенсирует параметр Фока и рекуррентная система уравнений пограничного слоя теряет асимптотический характер, а все уравнения системы приобретают сингулярность в коэффициентах, см. [4, 6].

В данной статье найдено волновое поле вблизи поверхности  $\partial\Omega$  в зоне Фока 2, см. рис. 1. В освещенной зоне 1 решение найдено лучевым методом в [1, 4, 7]. Область предельного луча 3 исследована в монографии В.А. Фока [1] и в книге [8], а в затенённой области 4 возникают дифракционные лучи Фридлендера-Келлера вдали от границы. Асимптотика решения в области 2 даёт начальные данные для построения

волн соскальзывания в приповерхностном затенённом слое 5. Зоны 4 и 5 будут рассмотрены отдельно.

## 2. ПАДАЮЩЕЕ ПОЛЕ В ЗОНЕ ФОКА

**2.1. Разложение поля  $U^{\text{inc}}$  по  $\sigma$  и  $\nu$ .** Рассмотрим падающую волну  $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$ , удовлетворяющую (3) с граничными условиями либо Дирихле, либо Неймана на поверхности рассеивателя  $\partial\Omega$ . Нам необходимо разложение падающей волны в координатах  $s$  и  $n$  в зоне Фока для того, чтобы построить отраженную волну  $U^{\text{ref}}$ . Разложение падающей волны в безразмерных координатах  $(\sigma, \nu)$  (8) имеет вид

$$\begin{aligned} U^{\text{inc}} = e^{ikz} &= e^{\left[iks + i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})\right]} \left( 1 + i \left( \frac{2}{k\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left[ \frac{\rho'_0}{4} (\sigma^4 - 2\nu\sigma^2) \right] \right. \\ &\quad + \left( \frac{2}{k\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{2i\alpha\sigma^5}{5!} - \frac{i\beta\nu\sigma^3}{3!} - \frac{(\rho'_0)^2}{2 \cdot 4^2} (\sigma^8 - 4\nu\sigma^6 + 4\nu^2\sigma^4) \right] \\ &\quad \left. + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k}\right) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь выражение (6) по  $s, n$  было переписано в новых растянутых координатах  $\sigma, \nu$ . Обращаем внимание, что слагаемые в квадратных скобках одного порядка по волновому числу  $k$ , и порядок каждого слагаемого в последующих скобках отличается от предыдущего порядка на  $k^{-1/3}$ . Из последнего следует выражение для функции ослабления падающей волны  $W^{\text{inc}}$

$$U^{\text{inc}} = e^{iks} W^{\text{inc}} = e^{iks} \sum_{m=0} W_m^{\text{inc}} k^{-\frac{m}{3}} = e^{iks} W_0^{\text{inc}} \sum_{m=0} k^{-\frac{m}{3}} P_m^{\text{inc}} \quad (10)$$

где  $P_m^{\text{inc}}$  это полиномы по  $\sigma$  и  $\nu$ , а коэффициент ослабления  $W_0^{\text{inc}} = e^{i(\nu\sigma - \sigma^3/3)}$  вынесен за знак суммы. В статье представлены три первых члена разложения (10) для падающей и отражённой волн. Опустим громоздкие вычисления, чтобы не перегружать статью.

**2.2. Три члена разложения  $W^{\text{inc}}$  по  $\sigma, \nu$ .** Начнём с нахождения первых трёх членов разложения (10) падающего поля  $e^{ikz} = U^{\text{inc}} =$

$e^{iks} W^{\text{inc}}$ :

$$\begin{aligned} W^{\text{inc}} &= W_0^{\text{inc}} + k^{-\frac{1}{3}} W_1^{\text{inc}} + k^{-\frac{2}{3}} W_2^{\text{inc}} + \dots \\ &= W_0^{\text{inc}} \left[ P_0^{\text{inc}} + k^{-\frac{1}{3}} P_1^{\text{inc}} + k^{-\frac{2}{3}} P_2^{\text{inc}} + \mathcal{O}(k^{-1}) \right], \end{aligned}$$

где  $W_0^{\text{inc}} = e^{i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})}$  это функция ослабления (фаза падающей волны, полученная в (9)). Сравнивая полученное с (9), ясно, что амплитуда падающей волны равна единице, то есть  $P_0^{\text{inc}} = 1$ . А в таком случае главный член разложения (10) имеет вид

$$W_0^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \exp \left\{ i \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} v(\zeta - \nu) d\zeta, \quad (11)$$

где  $v(\zeta - \nu)$  вещественнозначная функция Эйри в том виде, в котором её определял В.А.Фок [1]. Из представления для первого члена

$$W_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = e^{i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})} \left[ i \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\rho'_0}{4} (\sigma^4 - 2\nu\sigma^2) \right]$$

следует, что полином  $P_1^{\text{inc}}$  принимает вид

$$P_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = i \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{\rho'_0}{4} (\sigma^4 - 2\nu\sigma^2).$$

Одним из важных технических моментов является то, что масштабированные координаты  $\sigma$  и  $\nu$  превращают область задачи нахождения отраженной волны в зоне Фока в полу平面ность  $\{-\infty < \sigma < \infty, \nu > 0\}$ . А в таком случае удобно выделить координату  $\sigma$  в преобразовании Фурье, как в (11). Такое преобразование может быть выполнено, благодаря следующему формальному равенству (его математическое обоснование может быть найдено в [8])

$$(-i\sigma)^m \exp \left\{ i \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \frac{d^m}{d\zeta^m} v(\zeta - \nu) d\zeta. \quad (12)$$

Функции Эйри удовлетворяют уравнению Эйри  $v''(t) = tv(t)$ , которое способно изменить равенство (12) так, что

$$(-i\sigma)^m \exp \left\{ i \left( \sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} [P_m(\zeta, \nu)v(\zeta - \nu) + Q_m(\zeta, \nu)v'(\zeta - \nu)] d\zeta, \quad (13)$$

где  $P_m$  и  $Q_m$  (полиномы по  $\nu$  с коэффициентами от  $\zeta$ ) быстро усложняются с ростом  $m$ .

Таким образом мы получаем и формулу для следующего члена функции ослабления  $W_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu)$

$$W_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} i \rho'_0 \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} \left[ \frac{v'(\zeta - \nu)}{2} + \frac{\zeta^2 - \nu^2}{4} v(\zeta - \nu) \right] d\zeta, \quad (14)$$

а полиномы тогда имеют вид

$$P_1^{\text{inc}}(\zeta, \nu) = \frac{\zeta^2 - \nu^2}{4}, \quad Q_1^{\text{inc}}(\zeta, \nu) = \frac{1}{2}.$$

Полином  $P_2^{\text{inc}}$  выглядит сложнее, включая в себя  $\sigma^8$  и  $\nu^4$ , однако легко выписывается из (6) в разложении  $\exp(ikz)$ . Из представления

$$W_2^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = e^{i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})} \left[ \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\alpha\sigma^5 i}{5!} - \frac{\beta i\nu\sigma^3}{3!} - \frac{(\rho'_0)^2}{2 \cdot 4^2} (\sigma^4 - 2\nu\sigma^2)^2 \right) \right] + \dots$$

следует, что

$$P_2^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left( \frac{2\alpha\sigma^5 i}{5!} - \frac{\beta i\nu\sigma^3}{3!} - \frac{(\rho'_0)^2}{2 \cdot 4^2} (\sigma^4 - 2\nu\sigma^2)^2 \right).$$

Второй член  $W_2^{\text{inc}}$  а также последующие члены разложения падающего поля в зоне Фока имеют структуру (13). Слагаемое для  $m = 2$  (оно нам интересно) в разложении (10) имеет вид

$$W_2^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} [P_2^{\text{inc}}v(\zeta - \nu) + Q_2^{\text{inc}}v'(\zeta - \nu)] d\zeta,$$

а полиномы  $P_2^{\text{inc}}(\zeta, \nu)$  и  $Q_2^{\text{inc}}(\zeta, \nu)$  равны

$$\begin{aligned} P_2^{\text{inc}}(\zeta, \nu) &= -\frac{8\alpha}{5!}(\zeta - \nu) - \frac{\beta}{3!}\nu - \frac{\rho'_0}{8}[4\zeta + 3(\zeta - \nu) \\ &\quad + \frac{1}{4}(\zeta - \nu)^4 + \nu(\zeta - \nu)^3 + \nu^2(\zeta - \nu)^2], \end{aligned}$$

$$Q_2^{\text{inc}}(\zeta, \nu) = -\frac{2\alpha}{5!}(\zeta - \nu)^2 - \frac{\beta}{3!}\nu(\zeta - \nu) - \frac{\rho'_0}{4}[\frac{3}{2}(\zeta - \nu)^2 + 3\nu(\zeta - \nu) + \nu^2],$$

где, по-прежнему,  $\alpha, \beta$  выражаются равенствами (7). Приведённые выше формулы для  $W_m^{\text{inc}}(\sigma, \nu)$ ,  $m = 0, 1, 2$  дают нам представление об аналитической структуре отражённого поля.

### 3. ОТРАЖЁННАЯ ВОЛНА В ЗОНЕ ФОКА

**3.1. Осесимметричное решение.** Среди решений уравнения Гельмольца (3), нас интересуют осесимметричные (вследствие симметрии рассеивателя), то есть, такое решение, которое удовлетворяет условию  $\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0$ . Решение ищем в виде ряда  $U = \exp(iks)W(s, n)$ , где  $\exp(iks)$  описывает главные колебания поля, а  $W$  это функция ослабления (она медленно меняет амплитуду, то есть относительное изменение амплитуды мало по сравнению с волновым числом  $k$ ). Выделяя множитель  $e^{iks}$ , уравнение Гельмольца перепишется для функций ослабления

$$[(\Delta + k^2)e^{iks}W] = e^{iks}g^{-1}(\mathcal{A}W + \mathcal{B}W) = 0,$$

где  $g = (4M_0^4)/\rho_0^2$ , а операторы  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  равны

$$\begin{aligned} \mathcal{A}W &= k^2(1 - h_s^{-2})W + \left(2ik\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right)h_s^{-2} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} \\ &\quad - \left(ikW + \frac{\partial W}{\partial s}\right)h_s^{-2}\frac{\partial \ln h_s}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial n}\frac{\partial \ln h_s}{\partial n}, \\ \mathcal{B}W &= \frac{1}{h_\varphi} \left[ \frac{df}{ds} \frac{1}{h_s} \left( ikW + \frac{\partial W}{\partial s} \right) + \frac{\partial h_\varphi}{\partial n} \frac{\partial W}{\partial n} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathcal{A}W + \mathcal{B}W = g \sum_{m=0} k^{-\frac{m}{3}} \mathcal{L}_m.$$

Заметим, что оператор  $\mathcal{A}$  соответствует двумерной задаче дифракции на выпуклом теле в плоскости  $\varphi = \text{const}$ , тогда как  $\mathcal{B}$  отвечает за свойства, связанные с трёхмерностью задачи. Соответственно, оператор  $\mathcal{B}$  нам больше интересен. Что касается двумерной задачи, подробное изложение деталей построения асимптотического разложения можно найти в [1], математически доказанную схему построения следующих членов можно найти в [8–10] и [11].

**3.2. Ряд отражённого поля.** Математическое обоснование схемы, которую мы здесь представим, следует из предыдущих работ по коротковолновой дифракции на строго выпуклом теле, и может быть найдена в [10, 12] и [13]. Отраженная волна  $U^{\text{ref}} = e^{iks}W^{\text{ref}}$  строится в виде асимптотического ряда по степеням  $k^{-m/3}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , подобно ряду (10):

$$W^{\text{ref}} = \sum_{m=0} W_m^{\text{ref}} k^{-\frac{m}{3}}. \quad (16)$$

Выведем рекуррентную систему уравнений для  $W_m^{\text{ref}}$ , а затем выпишем сами коэффициенты разложения.

**3.3. Система уравнений отражённого поля.** Раскладывая коэффициенты первичного уравнения Гельмгольца (3) по степеням  $s, n$ , перейдём к растянутым координатам  $\sigma, \nu$ , как в (8), и в результате получим

$$(\Delta + k^2)e^{iks}W^{\text{ref}} = e^{iks}g^{-1}g \sum_{m=0} k^{-\frac{m}{3}} \mathcal{L}_m W^{\text{ref}} = 0, \quad (17)$$

где  $g = (4M_0^4)/(\rho_0^2)$ . Дифференциальные операторы (первого и второго порядков) по  $\sigma$  и  $\nu$ ,  $\mathcal{L}_m$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ , содержат полиномы по  $\sigma$  и  $\nu$  в качестве своих сомножителей. Когда  $m$  растёт, явные формулы для  $\mathcal{L}_m$  усложняются. Выпишем их здесь только для  $m = 0, 1, 2$ .

Подставляя в уравнение (17) ряд для  $W^{\text{ref}}$  (16), и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $k$  нулю, находим рекуррентную систему уравнений (1). Для решения (1) мы не забываем снабдить уравнения граничными условиями на поверхности тела  $\nu = 0$ , и решениями будут, соответственно,  $W_m^{\text{ref}}$ . В случае задачи Неймана, необходимое условие запишется так

$$\frac{\partial}{\partial \nu}(W_m^{\text{ref}} + W_m^{\text{inc}})|_{\nu=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Для задачи Дирихле,

$$(W_m^{\text{ref}} + W_m^{\text{inc}})|_{\nu=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (19)$$

здесь также учтены условия на поле, когда  $\nu \rightarrow +\infty$ , тогда  $W^{\text{ref}}$  описывает волну, покидающую тело вращения. Обсуждения постановки корректных граничных условий можно найти в работах [1, 4, 8, 9].

**3.4. Главный член отражённого поля.** Первое из уравнений (1) имеет следующий вид

$$\left( i \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \nu \right) W_0^{\text{ref}}(\sigma, \nu) = 0.$$

В последнем уравнении переменные разделяются по  $\sigma$  и  $\nu$ , и, используя преобразование Фурье, можно получить уравнение Эйри по  $\nu$ . Решение берётся в виде

$$W_0^{\text{ref}}(\sigma, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} B_0(\zeta) w_1(\zeta - \nu) d\zeta, \quad (20)$$

где  $B_0(\zeta)$  произвольная (пока) функция,  $w_1(\zeta - \nu)$  – функция Эйри в определении Фока [1]. Выбор конкретного вида определяется принципом предельного поглощения, а именно: потребуем, чтобы при малой положительной мнимой части волнового числа  $k$ ,  $\text{Im } k > 0$ , функция Эйри  $w_1(\zeta - \nu)$  устремлялась к нулю при  $\nu \rightarrow +\infty$ , см. [1]. Это то же самое, что сказать, что формула (20) теперь описывает уходящую от рассеивателя волну при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Функция  $B_0(\zeta)$  находится из краевого условия (18) или (19), где мы берём  $m = 0$ , и для задач Неймана и Дирихле соответственно

$$B_0^{\text{Neu}}(\zeta) = -\frac{v'(\zeta)}{w'_1(\zeta)}, \quad B_0^{\text{Dir}}(\zeta) = -\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)}. \quad (21)$$

Главный член разложения отраженной волны  $W_0^{\text{ref}}$  определён единственным образом.

**3.5. Неоднородные уравнения.** Оставшиеся уравнения в (1) неоднородны, и нам нужно строить общее решение для каждого из них, в то время, как однородное мы уже решили и общее решение будет иметь вид (20) со своей функцией  $B_m(\zeta)$ ,  $m = 1, 2, \dots$  (ещё и разными для Неймана и Дирихле). Частное решение может быть найдено тем же способом, который был использован в [4], где вместо  $v(\zeta - \nu)$  и её производной  $v'(\zeta - \nu)$  мы возьмём  $w_1(\zeta - \nu)$  и  $w'_1(\zeta - \nu)$ .

Мы упоминали, что в системе (1) переменные разделяются, и после выделения  $\sigma$ , используя преобразование Фурье в (12), мы получим явные формулы для операторов  $\tilde{\mathcal{L}}_m$ , которые таким способом получились из  $\mathcal{L}_m$ . Мы принимали во внимание, что  $v(\zeta - \nu)$  заменена на

$w_1(\zeta - \nu)$ , и контур интегрирования должен быть регуляризирован:

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta),$$

где  $\frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta)$  это оператор Эйри;

$$\tilde{\mathcal{L}}_1 = -i \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{1/3} \rho'_0 \nu \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_2 = \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left[ \frac{\rho_0 \rho''_0 - 2\rho'^2_0}{2} \nu \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{3\nu^2}{4} + \nu \zeta - \frac{\zeta^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{\Lambda_0}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\partial}{\partial \nu} \right) \right].$$

**3.6. Первый член отражённого поля  $W_1^{\text{ref}}$ .** Копируя выражение для первого члена разложения падающей волны  $W_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu)$  (см. (14)), будем считать, что первый член отраженной волны выглядит так:

$$W_1^{\text{ref}}(\sigma, \nu) = i \left( \frac{\rho'_0}{\sqrt{\pi}} \right) \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} W_1^{\text{ref}}(\zeta, \nu) d\zeta, \quad (22)$$

где

$$W_1^{\text{ref}}(\zeta, \nu) = B_1(\zeta) w_1(\zeta - \nu) + P_1(\zeta, \nu) w_1(\zeta - \nu) + Q_1(\zeta, \nu) w'_1(\zeta - \nu), \quad (23)$$

а слагаемое  $B_1(\zeta) w_1(\zeta - \nu)$  удовлетворяет однородному уравнению:

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 B_1(\zeta) w_1(\zeta - \nu) = 0.$$

Полиномы  $P_1(\zeta, \nu)$  и  $Q_1(\zeta, \nu)$  это полиномы по  $\nu$  второй и первой степеней соответственно, с коэффициентами, зависящими от  $\zeta$ . Эти полиномы (а, соответственно, и  $W_1^{\text{ref}}$  тоже) могут быть найдены из уравнения

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 W_1 + \tilde{\mathcal{L}}_1 W_0 = 0.$$

Для этого перепишем последнее уравнение в развернутом виде

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \right] \left( P_1(\zeta, \nu) w_1(\zeta - \nu) + Q_1(\zeta, \nu) w'_1(\zeta - \nu) \right) \\ = \nu \left[ \frac{\partial B_0(\zeta)}{\partial \zeta} w_1(\zeta - \nu) + B_0(\zeta) w'_1(\zeta - \nu) \right]. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta) \right] \left( P_1(\zeta, \nu) w_1(\zeta - \nu) + Q_1(\zeta, \nu) w'_1(\zeta - \nu) \right) \\ &= w_1(\zeta - \nu) \left( P''_1 - 2[\zeta - \nu]Q'_1 + Q_1 \right) + w'_1(\zeta - \nu) \left( -2P'_1 + Q''_1 \right) \end{aligned}$$

Приравняем правые части в двух последних уравнениях (так как левые части равны), и соберём члены при  $w_1(\zeta - \nu)$  и  $w'_1(\zeta - \nu)$  чтобы получить искомые полиномы

$$P''_1 - 2[\zeta - \nu]Q'_1 + Q_1 = \nu \frac{\partial B_0(\zeta)}{\partial \zeta} \quad \text{и} \quad -2P'_1 + Q''_1 = \nu B_0(\zeta).$$

Выбор степеней полиномов  $P_1(\zeta, \nu), Q_1(\zeta, \nu)$  (второй и первой степени соответственно) сделан, благодаря виду падающего поля. Приравнивая коэффициенты правой и левой частей при одинаковых степенях  $\nu$  в последних равенствах, получим полиномы

$$P_1 = \nu^2 P_1^{(2)} \quad \text{и} \quad Q_1 = Q_1^{(1)} \nu + Q_1^{(0)}.$$

Обратимся к нахождению  $B_1(\zeta)$ . Коэффициенты найдём из условия

$$\frac{\partial \nu}{\partial n} \frac{\partial}{\partial \nu} (W_1^{\text{inc}} + W_1^{\text{ref}}) \Big|_{n=0} = \frac{2M_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \nu} (W_1^{\text{inc}} + W_1^{\text{ref}}) \Big|_{\nu=0} = 0,$$

здесь функция  $W_1^{\text{inc}}(\sigma, \nu)$  определена формулой (14), а функция ослабления  $W_1^{\text{ref}}$  выражена (22), (23). Опуская громоздкие вычисления, запишем окончательно поправку  $W_1^{\text{ref}}(\sigma, \nu)$  порядка  $\mathcal{O}(k^{-\frac{1}{3}})$  к интегральному представлению отраженного поля в зоне Фока  $W_0^{\text{ref}}(\sigma, \nu)$  для краевых условий Неймана

$$\begin{aligned} W_1^{\text{ref}}(\sigma, \nu) &= \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{1/3} \frac{i\rho_0'}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} \{ B_1(\zeta) w_1(\zeta - \nu) \right. \\ &\quad \left. + P_1^{(2)} \nu^2 w_1(\zeta - \nu) + (Q_1^{(1)} \nu + Q_1^{(0)}) w'_1(\zeta - \nu) \} d\zeta. \end{aligned} \quad (24)$$

Коэффициенты  $B_1, P_1^{(2)}, Q_1^{(1)}$  и  $Q_1^{(0)}$  имеют вид

$$B_1^{\text{Neu}}(\zeta) = \left[ -\frac{\zeta^2 v'(\zeta)}{4w'_1(\zeta)} - \frac{5}{6} \frac{\zeta}{(w'_1(\zeta))^2} + \frac{2}{3} \frac{\zeta^3 w_1(\zeta)}{(w'_1(\zeta))^3} \right]; \quad P_1^{(2)\text{Neu}}(\zeta) = \frac{v'(\zeta)}{4w'_1(\zeta)};$$

$$Q_1^{(1)\text{Neu}}(\zeta) = \frac{(-\zeta)}{3(w'_1(\zeta))^2}; \quad Q_1^{(0)\text{Neu}}(\zeta) = \left( \frac{-2\zeta^2}{3(w'_1(\zeta))^2} - \frac{v'(\zeta)}{2w'_1(\zeta)} \right).$$

В случае задачи Дирихле, те же самые коэффициенты  $B_1$ ,  $P_1^{(2)}$ ,  $Q_1^{(1)}$  и  $Q_1^{(0)}$  имеют вид

$$B_1^{\text{Dir}}(\zeta) = \left[ -\frac{\zeta^2 v(\zeta)}{4w_1(\zeta)} + \frac{1}{2} \frac{1}{w_1^2(\zeta)} - \frac{2}{3} \frac{\zeta w'_1(\zeta)}{w_1^3(\zeta)} \right]; \quad P_1^{(2)\text{Dir}}(\zeta) = \frac{v(\zeta)}{4w_1(\zeta)};$$

$$Q_1^{(1)\text{Dir}}(\zeta) = \frac{1}{3w_1^2(\zeta)}; \quad Q_1^{(0)\text{Dir}}(\zeta) = \left( \frac{2\zeta}{3w_1^2(\zeta)} - \frac{v(\zeta)}{2w_1(\zeta)} \right).$$

Заметим, что в выражениях для коэффициентов мы использовали следующее тождество:

$$v'(t)w_1(t) - v(t)w'_1(t) = -1.$$

**3.7. Второй член отражённого поля  $W_2^{\text{ref}}$ .** Наконец, получим асимптотическое выражение для  $W_2^{\text{ref}}(\sigma, \nu)$ , который состоит из общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения, а именно, третьего уравнения в системе (1). Повторим его здесь

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 W_2^{\text{ref}} = -\tilde{\mathcal{L}}_1 W_1^{\text{ref}} - \tilde{\mathcal{L}}_2 W_0^{\text{ref}} - \dots$$

Будем искать  $W_2^{\text{ref}}(\sigma, \nu)$  в следующей форме

$$W_2^{\text{ref}}(\sigma, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2}{\rho_0} \right)^{\frac{2}{3}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} W_2^{\text{ref}}(\zeta, \nu) d\zeta, \quad (25)$$

где

$$W_2^{\text{ref}}(\zeta, \nu) = B_2(\zeta)w_1(\zeta - \nu) + P_2(\zeta, \nu)w_1(\zeta - \nu) + Q_2(\zeta, \nu)w'_1(\zeta - \nu).$$

Снова первое слагаемое удовлетворяет однородному уравнению

$$\tilde{\mathcal{L}}_0 B_2(\zeta)w_1(\zeta - \nu) = 0.$$

Мы выбираем вид полиномов  $P_2$  и  $Q_2$ , исходя из вида полиномов падающей волны

$$P_2(\zeta, \nu) = P_2^{(4)}\nu^4 + P_2^{(3)}\nu^3 + P_2^{(2)}\nu^2 + P_2^{(1)}\nu; \quad Q_2 = Q_2^{(3)}\nu^3 + Q_2^{(2)}\nu^2 + Q_2^{(1)}\nu + Q_2^{(0)}.$$

Аналогично нахождению полиномов  $P_1$  и  $Q_1$  для  $W_1^{\text{ref}}(\zeta, \nu)$ , после громоздких вычислений в случае краевых условий Неймана, получаем

$P_2(\zeta, \nu)$  и  $Q_2(\zeta, \nu)$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_2^{(4)} = \frac{(\rho'_0)^2 v'(\zeta)}{32 w'_1(\zeta)} \\ P_2^{(3)} = -\frac{(\rho'_0)^2}{18} \left[ \frac{1}{(w'_1(\zeta))^2} - \frac{2\zeta^2 w_1(\zeta)}{[w'_1(\zeta)]^3} \right] \\ P_2^{(2)} = \frac{(\rho'_0)^2}{2} \cdot \frac{\zeta^3 w_1(\zeta)}{[w'_1(\zeta)]^3} - \frac{(\rho'_0)^2 \zeta^2 v'(\zeta)}{16 w'_1(\zeta)} - \frac{\zeta}{24 [w'_1(\zeta)]^2} [7(\rho'_0)^2 + 6\rho_0 \rho''_0] \\ P_2^{(1)} = \frac{v'(\zeta)}{40 w'_1(\zeta)} [(\rho'_0)^2 - 4\rho_0 \rho''_0 + 4] - \frac{(\rho'_0)^2 \zeta^2}{6 [w'_1(\zeta)]^2} \\ Q_2^{(3)} = -\frac{(\rho'_0)^2 \zeta}{12 [w'_1(\zeta)]^2} \\ Q_2^{(2)} = \frac{v'(\zeta)}{40 w'_1(\zeta)} [(\rho'_0)^2 - 4\rho_0 \rho''_0 - 6] - \frac{(\rho'_0)^2 \zeta^2}{6 [w'_1(\zeta)]^2} \\ Q_2^{(1)} = \frac{2}{3} (\rho'_0)^2 \frac{\zeta^4 [w_1(\zeta)]^2}{[w'_1(\zeta)]^4} - \frac{5}{36} \frac{\zeta^3 (\rho'_0)^2}{[w'_1(\zeta)]^2} - \frac{\zeta^2 w_1(\zeta)}{[w'_1(\zeta)]^3} \cdot \frac{7(\rho'_0)^2 + 3\rho_0 \rho''_0}{9} \\ + \frac{\zeta v'(\zeta) [(\rho'_0)^2 + \rho_0 \rho''_0 + 4]}{w'_1(\zeta)} + \frac{1}{[w'_1(\zeta)]^2} \cdot \frac{[(\rho'_0)^2 + 3\rho_0 \rho''_0]}{18} \\ Q_2^{(0)} = \frac{4(\rho'_0)^2}{3} \frac{\zeta^5 [w_1(\zeta)]^2}{[w'_1(\zeta)]^4} - \frac{5}{18} \frac{(\rho'_0)^2 \zeta^4}{[w'_1(\zeta)]^2} - \frac{\zeta^3 w_1(\zeta)}{[w'_1(\zeta)]^3} \cdot \frac{[23(\rho'_0)^2 + 6\rho_0 \rho''_0]}{9} \\ + \frac{\zeta^2 v'(\zeta) [23(\rho'_0)^2 + 8\rho_0 \rho''_0 + 2]}{w'_1(\zeta)} + \frac{\zeta}{[w'_1(\zeta)]^2} \left[ \frac{\Lambda_0}{2} + \frac{[25(\rho'_0)^2 + 30\rho_0 \rho''_0]}{36} \right] \end{array} \right. \quad (26)$$

Так же, как мы определили функцию  $B_1(\zeta)$ , найдём функцию  $B_2(\zeta)$ , которая вместе с формулами (25) – (26), даёт искомый второй член  $W_2^{\text{ref}}$  отражённой волны. Окончательно коэффициент  $B_2(\zeta)$  равен

$$\begin{aligned} B_2(\zeta) = & Q_2^{(1)} + P_2^{(1)} \frac{w_1(\zeta)}{w'_1(\zeta)} - Q_2^{(0)} \frac{\zeta w_1(\zeta)}{w'_1(\zeta)} \\ & + \frac{v(\zeta)}{w'_1(\zeta)} \left[ \frac{8\alpha}{5!} - \frac{\beta}{3!} + \frac{3(\rho'_0)^2}{8} + \frac{2\alpha}{5!} \zeta^3 + \frac{3}{8} (\rho'_0)^2 \zeta^3 \right] \\ & + \frac{v'(\zeta)}{w'_1(\zeta)} \left[ \frac{8\alpha}{5!} \zeta - \frac{\beta}{3!} \zeta + \frac{(\rho'_0)^2}{8} \left( 7\zeta + \frac{\zeta^4}{4} \right) + \frac{4\alpha}{5!} \zeta \right], \end{aligned} \quad (27)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  задаются формулой (7). Удлинённость тела проявляется только во втором большом параметре  $\Lambda_0$  (2), он появляется только в операторе  $\mathcal{B}$  (см. формулу (15)) и в коэффициенте  $Q_2^{(0)}(\zeta)$  (26), который стоит в  $W_2^{\text{ref}}(\zeta, \nu)$  при  $w'_1(\zeta - \nu)$  и при  $w_1(\zeta - \nu)(-\frac{\zeta w_1(\zeta)}{w'_1(\zeta)})$  в коэффициенте  $B_2(\zeta)$ , см. (27).

#### 4. ПОЛНОЕ ПОЛЕ

Первый член в разложении для полного поля запишется в виде

$$U_0(s, n) = e^{iks} W_0(\sigma, \nu) = e^{iks} (W_0^{\text{inc}} + W_0^{\text{ref}}).$$

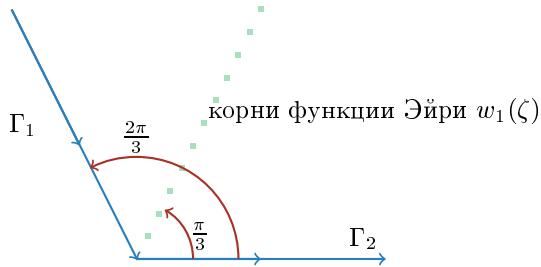


Рис. 2. Контур  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  проходит по ломаной прямой от  $\infty e^{i\frac{2\pi}{3}}$  до 0, и от 0 до  $\infty$  по положительной части вещественной оси на плоскости комплексного переменного  $\zeta$ . Этот контур охватывает в первой четверти корни функции  $w_1(\zeta_q)$ ,  $q = 1, 2, \dots$ , либо корни производной функции Эйри  $w'_1(\zeta_p)$ ,  $p = 1, 2, \dots$ . Корни функции Эйри  $w_1(\zeta)$  и её производной лежат на луче  $e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

Подставим представления для главного члена падающей (11) и отраженной (20), (21) волн, чтобы получить полное поле

$$U_0(s, n) = \frac{e^{iks}}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \left[ v(\zeta - \nu) - B_0(\zeta)w_1(\zeta - \nu) \right] d\zeta, \quad (28)$$

где функция  $B_0(\zeta)$  (21) подставляется в зависимости от краевых условий. Важно описать контур интегрирования  $\Gamma$ , который обходит первую четверть комплексной плоскости  $\zeta$  в положительном направлении. Все нули подынтегрального выражения в (28) находятся в первой четверти в плоскости комплексного переменного  $\zeta$ . Например, можно считать, что контур  $\Gamma$  идёт из бесконечности вдоль луча  $\arg \zeta = \frac{2\pi}{3}$  к нулю, и от нуля по вещественной оси к  $\infty$ , (см. рис. 2).

Перепишем интеграл (28), используя соотношения между функциями Эйри:  $v(t)$  выражается через функции  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  по формуле

$$v(t) = \frac{w_1(t) - w_2(t)}{2i},$$

и тогда интеграл (28) перепишется, как равный ему

$$U_0(s, n) = e^{iks} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{i}{2} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} [w_2(\zeta - \nu) - B_0(\zeta)w_1(\zeta - \nu)] d\zeta,$$

а  $B_0(\zeta)$  выбирается в зависимости от условий Неймана или Дирихле:

$$B_0^{\text{Neu}}(\zeta) = -\frac{w'_2(\zeta)}{w'_1(\zeta)}, \quad B_0^{\text{Dir}}(\zeta) = -\frac{w_2(\zeta)}{w_1(\zeta)}.$$

## 5. СРАВНЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТОМ В. И. ИВАНОВА [14]

Методом параболического уравнения Леонтовича–Фока найдены три члена асимптотического разложения волнового поля

$$U = e^{iks} \left( W_0 + \frac{W_1}{k^{\frac{1}{3}}} + \frac{W_2}{k^{\frac{2}{3}}} + \mathcal{O}(k^{-1}) \right), \quad k \gg 1. \quad (29)$$

Сравним разложение (29) с решением, полученным в статье В. И. Иванова [14]. В работе [14] приведено численное сравнение точного решения с асимптотической поправкой  $e^{iks} W_2 k^{-\frac{2}{3}}$  (второй член) к представлению Фока ( $e^{iks} W_0$ ) вблизи круга (или кругового цилиндра в ортогональном к оси сечений) и сферы. При этом,  $\rho_0 = a$ , где  $a$  это радиус круга или сферы. Следовательно, в формулах (25)–(27) для круга следует взять  $\rho'_0 = \rho''_0 = 0$ ,  $f(0) = \infty$ ,  $\Lambda_0 = 0$  и оператор  $\mathcal{B}$  исчезает. Для сферы, ввиду осесимметричности задачи дифракции,  $\Lambda_0 = 1$ , так как  $\rho_0 = f(0) = a$ .

В случае дифракции плоской волны на круге наши формулы (25)–(27) в точности совпадают с формулами (10), (11) работы Иванова [14], а именно:

$$\begin{aligned} U^{\text{Neu}} &= U_0^{\text{Neu}} - \frac{e^{iks}}{60M_0^2 \sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \left( [4\zeta + 6\nu]\Psi(\zeta, \nu) + [\zeta - \nu][\zeta + 9\nu]\bar{\Psi}(\zeta, \nu) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\zeta^3 - 6}{[w'_1(\zeta)]^2} w_1(\zeta - \nu) \right) d\zeta + \mathcal{O}\left(\frac{1}{M_0^4}\right), \\ \Psi(\zeta, \nu) &= v(\zeta - \nu) - \frac{v'(\zeta)}{w'_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu), \quad \bar{\Psi} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \nu}. \end{aligned}$$

Здесь

$$U_0^{\text{Neu}} = \frac{e^{iks}}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \Psi(\zeta, \nu) d\zeta$$

это асимптотика Фока, а все остальные члены (29) являются поправочными. В качестве контура  $\Gamma$  мы можем взять ломаную линию (см. рис. 2), в первой четверти расположены все полюса подынтегральной

функции. В случае дифракции на сфере совпадения нет ни с падающей, ни с отражённой волнами. Но ввиду того, что задача осесимметричная, формула для падающей волны должна совпадать с выражением для падающей волны в случае двумерной дифракции на круге. В статье [14] это условие не выполнено. Результат сравнения одинаков и для задачи Дирихле, и для задачи Неймана.

## 6. ТОК НА ГРАНИЦЕ В ЗАДАЧЕ НЕЙМАНА $\frac{\partial U}{\partial n}|_{n=0} = 0$

**6.1. Добавки с множителем  $\frac{\Lambda_0}{2M_0^2}$ .** Построенное двухмасштабное асимптотическое разложение поля в области Фока позволяет получить приближённые формулы для определения волнового поля в зависимости от соотношений больших параметров задачи: параметра Фока  $M_0$  и параметра вытянутости тела вращения  $\Lambda_0$  (2). Этот параметр входит в рекуррентную систему уравнений (1) лишь в виде отношения  $\frac{\Lambda_0}{2M_0^2}$  и его целых степеней. Параметр  $\Lambda_0$  появляется впервые из оператора  $\mathcal{B}$  (15), в третьем уравнении системы (1) при разложении коэффициента Ламе  $h_\varphi^{-1}$  (5) в ряд по степеням  $\sigma$  и  $\nu$ . Отсюда следует, что решение системы (1) будет сохранять асимптотический характер по  $M_0^{-m}$ ,  $m = 0, 1, 2$ , при условии, что  $\Lambda_0 = 2M_0^{2-\varepsilon}$ ,  $0 < \varepsilon < 2$ . Величина  $\varepsilon$  зависит от конкретных параметров  $k$ ,  $\rho_0$ ,  $f(0)$  в окрестности 2 (см. рис. 1), то есть в окрестности Фока.

**6.2. Безразмерные токи: Фока, Фока с поправочным членом и лучевые.** Током функции ослабления  $W = W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}}$  для граничного условия Дирихле называется следующая величина (см. [4], в данной статье эти формулы приводятся для сравнения с выражением для тока в случае граничных условий Неймана)

$$I^{\text{Dir}} = \frac{\partial}{\partial n} \left( W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}} \right) \Big|_{n=0} = \frac{2M_0^2}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \nu} \left( W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}} \right) \Big|_{\nu=0}.$$

Для последующих сравнений приведём формулу для безразмерного тока с поправочным членом

$$k^{-1} I^{\text{Dir}} = \frac{1}{M_0 \sqrt{\pi}} \left[ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{w_1(\zeta)} d\zeta + \frac{\Lambda_0}{2M_0^2} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \left[ \frac{\zeta}{w_1(\zeta)} - \frac{[w'_1(\zeta)]^2}{[w_1(\zeta)]^3} \right] d\zeta \right] \quad (30)$$

Заметим, что ток, соответствующий полю Фока, есть

$$I_0^{\text{Dir}} = \frac{2M_0^2}{\rho_0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} \frac{e^{i\sigma\zeta} d\zeta}{w_1(\zeta)}.$$

Током функции ослабления  $W = W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}}$  для граничного условия Неймана называется следующая величина

$$I^{\text{Neu}} = \frac{2M_0^2}{\rho_0} \left( W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}} \right) |_{\nu=0}.$$

Безразмерный ток, соответствующий полному полю  $W_0^{\text{Neu}}$ , равному

$$W_0^{\text{Neu}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} [v(\zeta - \nu) - \frac{v'(\zeta)}{w'_1(\zeta)} w_1(\zeta - \nu)] d\zeta$$

будет таким

$$\begin{aligned} k^{-1} I^{\text{Neu}} &= \frac{2M_0^2}{\rho_0 k} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \left[ \frac{v(\zeta) w'_1(\zeta) - v'(\zeta) w_1(\zeta)}{w'_1(\zeta)} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{M_0 \sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \frac{d\zeta}{w'_1(\zeta)}, \end{aligned}$$

так как вронскиан  $v(\zeta) w'_1(\zeta) - v'(\zeta) w_1(\zeta) = 1$ . Ток с поправочным членом равен

$$k^{-1} I^{\text{Neu}} = \frac{1}{M_0 \sqrt{\pi}} \left[ \int_{\Gamma} \frac{e^{i\sigma\zeta}}{w'_1(\zeta)} d\zeta + \frac{\Lambda_0}{2M_0^2} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \left[ \frac{\zeta}{w'_1(\zeta)} - \frac{\zeta^2 w_1^2(\zeta)}{[w'_1(\zeta)]^3} \right] d\zeta \right]. \quad (31)$$

Рассмотрим освещённую область 1 (см. рис. 1). Полное лучевое поле  $U = U^{\text{inc}} + U^{\text{ref}} = e^{iks} (W^{\text{inc}} + W^{\text{ref}})$  представлено формулами для условий Дирихле и Неймана вида

$$W^{\text{inc}} = e^{i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})},$$

$$W^{\text{ref}} = \mp \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2\sigma}{3\sqrt{\sigma^2 + 3\nu}}} \exp \left[ i \left( -\frac{5}{27}\sigma^3 - \frac{\nu\sigma}{3} + \frac{4}{27}(\sigma^2 + 3\nu)^{\frac{3}{2}} \right) \right], \sigma < 0.$$

Знак минус перед радикалом соответствует условию Дирихле, знак плюс – условию Неймана. В. А. Фок [1] показал, что при  $\sigma \rightarrow -\infty$  отражённое поле  $W^{\text{ref}}$  совпадает с отражённой волной в пограничном

слое. При ограничениях  $\nu = \mathcal{O}(1)$ ,  $\sigma \rightarrow -\infty$ ,  $W_{-\infty}^{\text{ref}}$  упрощается и полное лучевое поле может быть представлено выражением

$$W_{-\infty} = e^{i(\nu\sigma - \frac{\sigma^3}{3})} \mp \frac{\sqrt{2\sigma^2 + \nu}}{\sqrt{2\sigma^2 + 3\nu}} e^{-i(\nu\sigma + \frac{\sigma^3}{3})}. \quad (32)$$

Безразмерный ток, порождённый лучевой формулой (32), для граничных условий Неймана имеет вид

$$k^{-1} I_{\text{ray}}^{\text{Neu}} = \frac{2}{M_0} e^{-i\frac{\sigma^3}{3}}, \quad \sigma \rightarrow -\infty. \quad (33)$$

Для краевых условий Дирихле лучевой безразмерный ток равен

$$k^{-1} I_{\text{ray}}^{\text{Dir}} = \frac{2i\sigma}{M_0} e^{-i\frac{\sigma^3}{3}}, \quad \sigma \rightarrow -\infty. \quad (34)$$

**6.3. Безразмерные токи Фока.** Итак, безразмерные токи Фока для условий Дирихле и Неймана:

$$k^{-1} I_0^{\text{Dir}} = \frac{1}{M_0 \sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \frac{d\zeta}{w_1(\zeta)}; \quad (35)$$

$$k^{-1} I_0^{\text{Neu}} = \frac{1}{M_0 \sqrt{\pi}} \int_{\Gamma} e^{i\sigma\zeta} \frac{d\zeta}{w'_1(\zeta)}; \quad (36)$$

здесь параметр Фока  $M_0 = \left(\frac{k\rho_0}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$  (2).

## 7. Область тени, полутени, 4,5

Напомним, что граница свет-тень на поверхности рассеивателя  $\partial\Omega$  соответствует  $s = 0$  и при малых  $n$  с ростом  $s$  точка наблюдения  $(s, n)$  попадает в затенённую часть вблизи рассеивателя (рис. 3). В растянутых координатах  $(\sigma, \nu)$  это условие соответствует  $\sigma \rightarrow +\infty$  и ограниченным  $\nu = \mathcal{O}(1)$ . Волновое поле может быть получено по теории вычетов, так как в верхней полуплоскости  $\text{Im } \zeta > 0$  функция  $\exp(i\sigma\zeta)$  экспоненциально убывает при  $\sigma \gg 1$ , так же, как и  $\exp(-\sigma\text{Im } \zeta)$ . Контуры интегрирования в дифракционных формулах для  $W_0^{\text{ref}}, W_1^{\text{ref}}, W_2^{\text{ref}}$  можно поднять в верхнюю полуплоскость. При этом выделяются вычеты в полюсах подинтегрального выражения. Интегралы  $W_0, W_1, W_2$  (20), (21), (24), (25)–(27) могут быть представлены как сумма вычетов, относящихся к корням функции Эйри ( $w_1(\zeta_q) = 0$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ) для задачи Дирихле и к корням производной от функции Эйри ( $w'_1(\zeta'_p) =$

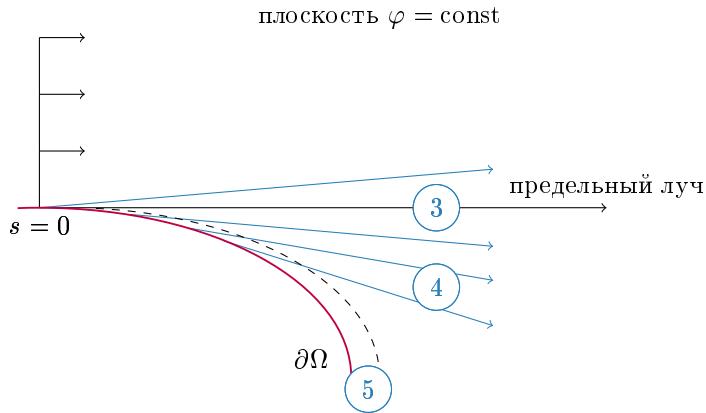


Рис. 3. Область тени и полутени. Поле в области тени 4 между зонами 3 и 5 имеет лучевой характер уходящей волны. Зона 5 при  $\nu = \mathcal{O}(1), s = \mathcal{O}(1)$  есть зона волн соскальзывания (37), (38).

$0, p = 1, 2, \dots$ ) в задаче Неймана на  $\partial\Omega$ . Тогда полное решение в теневой области

$$U^{\text{Dir, Neu}} = e^{iks} \left[ W_0(s, n) + \frac{W_1(s, n)}{k^{\frac{1}{3}}} + \frac{W_2(s, n)}{k^{\frac{2}{3}}} + \mathcal{O}(k^{-1}) \right]$$

дают функции (из формулы Фока для  $W_0$ )

$$W_0^{\text{Dir}} = -i2\sqrt{\pi} \sum_{q=1} \frac{w_1(\zeta_q - \nu)}{[w'_1(\zeta_q)]^2} e^{i\sigma\zeta_q} \quad (37)$$

и

$$W_0^{\text{Neu}} = i2\sqrt{\pi} \sum_{p=1} \frac{w_1(\zeta'_p - \nu)}{\zeta'_p [w_1(\zeta'_p)]^2} e^{i\sigma\zeta'_p} \quad (38)$$

и так далее. Корни  $\zeta_q, q = 1, 2, \dots$  лежат на луче  $\arg \zeta = \frac{\pi}{3}$  и возвращаются по модулю (рис. 2). Величины  $\zeta'_p$  и  $\zeta_1$  принимают следующие положительные значения:

$$\zeta'_1 = 1.01879 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad \zeta_1 = 2.33811 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Если воспользоваться асимптотическим выражением для  $w_1(\zeta - \nu)$  при больших  $\nu$  по сравнению с корнями

$$w_1(\zeta - \nu) \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{(\nu - \zeta)}} \exp\left(i\frac{2}{3}((\nu - \zeta)^{\frac{3}{2}}) + i\frac{\pi}{4}\right),$$

то получим для  $W_0^{\text{Dir}}$  и  $W_0^{\text{Neu}}$  приближённые значения:

$$e^{iks} W_0^{\text{Dir}} \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-ie^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi}}{[w'_1(\zeta_1)]} \cdot e^{i(\sigma - \sqrt{\nu})\zeta_1} \cdot e^{i\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{iks} \quad (39)$$

$$e^{iks} W_0^{\text{Neu}} \underset{\nu \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\pi}}{[w_1(\zeta'_1)^2]} \cdot e^{i(\sigma - \sqrt{\nu})\zeta'_1} \cdot e^{i\frac{2}{3}\nu^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{iks} \quad (40)$$

Исследуем формулы (39) и (40), см. [1]. Отметим, что равенство  $\sigma - \sqrt{\nu} = 0$  даёт геометрическую границу тени. Возрастающие положительные величины  $\sigma - \sqrt{\nu}$  соответствуют точкам, расположенным всё дальше в области тени. Там, где величина  $\sigma - \sqrt{\nu}$  невелика (и обоих знаков), находится область полутени. Итак, при возрастании  $\sigma - \sqrt{\nu}$  функции (39) и (40), равно как и поле, будут экспоненциально убывать. Кроме этого, наиболее осцилирующим множителем будет  $\exp(iks + \frac{2}{3}i\nu^{\frac{3}{2}})$  в формулах (39) и (40) при  $\nu \rightarrow +\infty$ . При удалении от границы  $\partial\Omega$  лучевое волновое поле для краевых условий Дирихле и Неймана (в главном приближении) представляет собой совокупность лучей уходящих волн, имеющей каустикой поверхностью рассеивателя (см. рис. 3). Отметим, что формальное решение, соответствующее лучам соскальзывания, было найдено Фридлендером и Келлером [15]. При этом дифракционные лучи в области 4 были впервые введены Дж. Келлером в статье [16].

Если мы обратимся к формулам (37), (38) для вычетов, то увидим, что  $e^{iks} W_0^{\text{Dir}}$  и  $e^{iks} W_0^{\text{Neu}}$  дают нам именно волны соскальзывания. Формально волна соскальзывания ищется в следующем виде в слое  $\nu = \mathcal{O}(1)$ ,  $s = \mathcal{O}(1)$

$$U = e^{iks} \cdot e^{ik^{\frac{1}{3}}} \Phi(s) \sum_{m=0} V_m(s, \nu) k^{-\frac{1}{3}},$$

где для задачи Дирихле

$$\Phi(s) = \frac{\zeta_q}{2^{\frac{1}{3}}} \int_0^s \rho^{-\frac{2}{3}}(s) ds, \quad V_{0,q} = A_0(s) w_1(\zeta_q - \nu),$$

и для задачи Неймана

$$\Phi(s) = \frac{\zeta'_p}{2^{\frac{1}{3}}} \int_0^s \rho^{-\frac{2}{3}}(s) ds, \quad V_{0,p} = A_0(s) w_1(\zeta'_p - \nu).$$

Если мы перейдём от координаты  $\sigma$  к  $s$ , в окрестности  $s = 0$ , то формулы (37), (38) дадут нам волны соскальзывания.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена коротковолновая дифракция плоской падающей волны на строго выпуклом теле вращения. Геометрические характеристики тела вращения (радиусы кривизны поверхности рассеивателя) считаются много больше длины падающей волны. В результате решения задачи получена четкая физическая картина явления коротковолновой дифракции. В освещённой области рассеивателя поле описывается лучевыми формулами. В окрестности границы свет-тень, где лучи падающей волны касаются границы, лучевой метод неприменим. Здесь строится пограничный слой Фока, в котором возникает другое асимптотическое разложение. Оно имеет вид интегралов от линейной комбинации функции Эйри и её производной на полиномы по координате нормали к рассеивателю. Фоковская асимптотика даёт начальные данные для построения волн соскальзывания в затенённой части границы, для дифракционных лучей (введённых впервые Келлером) в тени вдали от границы и для построения волнового поля в окрестности предельного луча, где осуществляется переход от света к тени.

Авторы благодарны профессору М. М. Попову за ценные советы и замечания и Н. М. Семченку за помощь в численных расчётах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V.A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*. International Series of Monographs on Electromagnetic Waves, vol. 1, Pergamon Press (1965).
2. I. V. Andronov, *Diffraction of strongly elongation body of revolution*. — Acoustic Physics **57**, No.2 (2011), 147–152.
3. I. V. Andronov, *Diffraction of a plane wave incident at a small angle to the axis of a strongly elongation spheroid*. — Acoustic Physics **58**, No.5 (2012), 521–529.
4. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *The Leontovich-Fock parabolic equation method in problems of short-wave diffraction by prolate bodies*. — J. Mathem. Sciences **194**, No.42 (2013), 30–43.

5. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, N. M. Semtchenok, *On short-wave diffraction by an elongated body. Numerical experiments.* — Zap. Nauchn. Sem. POMI **451** (46) (2016), 65–78.
6. M. M. Popov, N. Ya. Kirpichnikova, *On problems of applying the parabolic equation to diffraction by prolate bodies.* — Acoustical Physics, **60**, No. 4 (2014), 363–370.
7. N. Ya. Kirpichnikova, M. M. Popov, *Merging of asymptotics in the illuminated part of the Fock domain.* — J. Math. Sciences **214**, No. 3 (2016), 277–286.
8. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *The Boundary-Layer Method in Diffraction Problems*, Springer-Verlag (1979).
9. V. M. Babich, V. Buldyrev, *Asymptotic Methods in Short-Wavelength Diffraction Theory*, Alpha Science, Oxford (2007).
10. V. M. Babich, *On short wavelength asymptotics of Green's function for the exterior of a compact convex domain.* — Dokl. AN SSSR **146**, No. 3 (1962), 571–573.
11. N. Ya. Kirpichnikova, *On propagation of surface waves, which are concentrated in the vicinity of rays in an inhomogeneous elastic body of arbitrary shape.* — Trudy MIAN, CXV, No. 1 (1971), 114–130.
12. V. S. Buslaev, *Short wavelength asymptotics in the problem of diffraction by smooth convex contours*, XXIII, No. 2 (1964), 14–117.
13. V. B. Philippov, *On mathematical justification of the short wavelength asymptotics of the diffraction problem in shadow zone.* — J. Soviet Mathematics **6**, No. 5 (1976), 577–626.
14. V. S. Ivanov, *Calculation of corrections to the Fock's asymptotic formula for the wave field in a neighborhood of surfaces of circular cylinder and a sphere.* — J. Soviet Mathematics **20**, No. 1 (1982), 1812–1817.
15. F. G. Friedlander J. B. Keller, *Asymptotic expansion of solution of  $(\nabla^2 + k^2)u = 0$ .* — Comm. Pure Appl. Math **8**, No. 3 (1955), 378–394.
16. J. B. Keller, *Diffraction by a convex cylinder.* — Trans. IRE Ant. and Prop., **4**, No. 3 (1956), 312–321.

Kirpichnikova A. S., Kirpichnikova N. Ya., Leontovich–Fock parabolic equation method in the Neumann diffraction problem on a prolate body of revolution.

This paper continues the series of publications on the shortwave diffraction of the plane wave on the prolate bodies of revolution with axial symmetry in Neumann problem. The approach which is based on Leontovich–Fock parabolic equation method for the two parameter asymptotic expansion of the solution is briefly described. Two correction terms are found for the Fock's main integral term of the solution expansion in the boundary layer. This solution can be continuously transformed into the ray solution in the lit zone and decays exponentially in the shadow zone. If the observation point is in the shadow zone near the scatterer, then the wave field can be obtained with the help of residue theory for the integrals of the reflected

field, because the incident field does not reach the shadow zone. The obtained residues are necessary for the unique construction of the creeping waves in the boundary layer of the scatterer in the shadow zone.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
наб. р. Фонтанки д.27, 192288, С.-Петербург  
*E-mail:* nkirp@pdmi.ras.ru  
*E-mail:* kirpica@hope.ac.uk

Поступило 19 ноября 2017 г.