Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

Е. А. Городницкий, М. В. Перель

ОБОСНОВАНИЕ ОСНОВАННОЙ НА ВЕЙВЛЕТАХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Работа посвящена интегральному представлению решений волнового уравнения, найденному в работах [1–3]. Это интегральное представление получено с помощью пространственно-временного непрерывного вейвлет-анализа. Впервые вейвлет-анализ применялся для вывода интегральных представлений в [4], а затем в работах [5–7]. В качестве одного из возможных примеров элементарных решений с известными свойствами в работах [1–3, 5–7] предлагалось использовать точные локализованные решения [8, 9]. В работе [10] использовались асимптотические решения, называемые квазифотонами, которые были впервые построены в работе [11] для уравнения Шредингера, а затем в работах [12–14] для волнового уравнения. В предыдущих наших работах по применению пространственно-временного вейвлет-анализа [2, 3, 10] основное внимание уделялось практической реализации полученных формул и их приложениям. Формулы задаются несобственными интегралами и наша цель в настоящей работе состоит в исследовании их сходимости.

Ранее интегральные разложения решений волнового уравнения по другим локализованным решениям, гауссовым пучкам, строились на основе асимптотических формул в [15]. Ориентированные на приложения формулы, представляющие собой различные разложения решений по элементарным локализованным решениям даны в [16, 17] и в цитированной литературе. Разложения, основанные на сдвиге функции Грина в комплексную плоскость, получены в [18].

Дадим краткое содержание статьи. Прежде всего, мы приводим необходимые нам факты из пространственно-временного непрерывного вейвлет-анализа, основанного на аффинной группе Пуанкаре. Затем

Ключевые слова: волновое уравнение, интегральные представления, вейвлет-анализ, аффинная группа Пуанкаре.

Работа М.В.П. поддержана грантом СПбГУ 11.42.1073.2016.

вводим в рассмотрение пространство решений волнового уравнения, для элементов которого получены интегральные представления. Мы доказываем при некоторых условиях поточечную сходимость несобственных интегралов в интегральном представлении. Доказывается также сходимость этих интегралов в $\mathcal{L}_2$ норме.

1.1. Основные факты пространственно-временного вейвлет-анализа. Рассмотрим пространство функций

$$f(t,x), v(t,x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R},\, dx\, dt),$$

пространство квадратично интегрируемых комплекснозначных функций от двух переменных:

$$\langle f, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} dx\, dt f(t,x)\overline{v(t,x)} < \infty, \tag{1}$$

где t – время, x – пространственная координата. В дальнейшем будем использовать обозначение $\vec{\chi} = (t,x)^{\top}$, где вектор $\vec{\chi}$ принадлежит пространству Минковского, на котором вводится индефинитное(псевдоевклидовое) скалярное произведение:

$$(\vec{\chi}_1, \vec{\chi}_2) = t_1 t_2 - x_1 x_2, \tag{2}$$

которое порождает псевдоевклидовое расстояние(интервал):

$$\|\vec{\chi}_1 - \vec{\chi}_2\|_m^2 = (t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение группу преобразований пространства $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, состоящую из сдвигов $\mathcal{T}_{\vec{\chi}_s}\vec{\chi} = \vec{\chi} + \vec{\chi}_s$, преобразований Лоренца

$$\mathcal{L}_\phi \vec{\chi} = \mathbf{\Lambda}_\phi \vec{\chi}, \tag{4}$$

$$\mathbf{\Lambda}_\phi = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi \\ \sinh\phi & \cosh\phi \end{pmatrix} \tag{5}$$

и масштабирования $\mathcal{D}_a\vec{\chi} = a\vec{\chi}$, которая называется аффинной группой Пуанкаре G [19]. Элементы группы – преобразования

$$g = g(\vec{\chi_s}, a, \phi) = \mathcal{T}_{\vec{\chi}_s}\, \mathcal{D}_a\, \mathcal{L}_\phi. \tag{6}$$

Выберем функцию $\zeta \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Построим семейство функций, зависящих от параметров $\vec{\chi_s}, a, \phi$, применив к $\zeta(\vec{\chi})$ преобразование $U(g)$:

$$U(g)\zeta(\vec{\chi}) = \zeta(g^{-1}\vec{\chi}) = \frac{1}{a}\zeta\left(\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a}\right) \equiv \zeta_{g(\vec{\chi_s}, a, \phi)}(\vec{\chi}). \tag{7}$$

Это преобразование унитарно, то есть

$$\|U(g)\zeta(\vec{\chi})\|^2 = \|\zeta(\vec{\chi})\|^2, \tag{8}$$

что проверяется заменой переменной интегрирования и обеспечивается выбором множителя $1/a$ преобразованной функции. Преобразование Фурье функции ζ определяем следующим образом:

$$\widehat{\zeta}(\vec{\sigma}) = \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} d^2\vec{\chi}\, e^{i(\vec{\sigma},\,\vec{\chi})}\zeta(\vec{\chi}). \tag{9}$$

Нетрудно показать, что

$$\widehat{\zeta}_{g(\vec{\chi_s},a,\phi)}(\vec{\sigma}) = a\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})e^{i(\vec{\sigma},\,\vec{\chi}_s)}. \tag{10}$$

Все пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ является прямой суммой четырех инвариантных относительно $U(g)$ подпространств

$$\mathcal{L}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=1}^{4}\mathcal{D}_j, \tag{11}$$

которые различаются носителем преобразования Фурье функций $\widehat{\zeta}(\vec{\sigma})$, а именно, Фурье-преобразование функций из пространства $\mathcal{D}_j$ отлично от нуля только в D_j :

$$D_1 = \{\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k > 0, |k| > |k_x|\}, \tag{12a}$$

$$D_2 = \{\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k < 0, |k| > |k_x|\}, \tag{12b}$$

$$D_3 = \{\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k_x > 0, |k| < |k_x|\}, \tag{12c}$$

$$D_4 = \{\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} : k_x < 0, |k| < |k_x|\}. \tag{12d}$$

Покажем, например, что пространство $\mathcal{D}_1$ является инвариантным относительно преобразования $U(g)$. Всякий вектор $\vec{\sigma}\in D_1$ можно представить следующим образом:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} k \\ k_x \end{pmatrix} = \rho\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \sqrt{k^2 - k_x^2}, \tag{13}$$

и только вектор из D_1 можно записать в такой форме. Возьмем какое-нибудь $\vec{\sigma}_0 \in D_1$,

$$\vec{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} k_0 \\ k_{x0} \end{pmatrix}, \quad \|\vec{\sigma}_0\|_m = \rho_0 > 0, \quad \tanh\phi_0 = -\frac{k_{x0}}{k_0}. \tag{14}$$

Преобразования Лоренца и масштабирования отображают $\vec{\sigma}_0$ на $\vec{\sigma}$,

$$\vec{\sigma} = a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma}_0 = a\rho_0\mathbf{\Lambda}_{-\phi-\phi_0}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

имеющий вид (13) и поэтому принадлежащий $\mathcal{D}_1$. Очевидно, что, подбирая масштаб a и параметр преобразования Лоренца ϕ, мы получим любой $\vec{\sigma} \in D_1$. Представление $U(g)$ является неприводимым представлением в каждом подпространстве $\mathcal{D}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, см. [19]. Это представление квадратично интегрируемо [20,21], то есть существует ненулевое $\psi(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$ такое, что

$$\int\limits_G d\mu(g) |\langle \psi, U(g)\psi \rangle|^2 < \infty. \tag{16}$$

Здесь интегрирование ведется по всей группе, элементы которой задаются параметрами $a \in (0, \infty)$, $\vec{\chi_s} \in \mathbb{R}^2$, $\phi \in (-\infty, \infty)$, а $d\mu(g)$ – мера, инвариантная слева (левая мера Хаара), то есть при фиксированном $g_0 \in G$ для любого $g \in G$ имеем $d\mu(g_0 g) = d\mu(g)$. В случае аффинной группы Пуанкаре эта мера определяется формулой:

$$d\mu(g) = d^2\vec{\chi}_s \frac{da}{a^3} d\phi. \tag{17}$$

Функции, удовлетворяющие условию (16), называются материнскими вейвлетами [21]. Условие квадратичной интегрируемости эквивалентно условию

$$\langle C\psi, C\psi \rangle \equiv \int\limits_{D_1} d^2\vec{\sigma}\, \frac{|\widehat{\psi}(\vec{\sigma})|^2}{\|\vec{\sigma}\|_m^2} < \infty, \tag{18}$$

где

$$C\psi = \widehat{\psi}(\vec{\sigma})/\|\vec{\sigma}\|_m, \tag{19}$$

которое называют условием допустимости [21]. Этот факт доказан в приложении. Неограниченный оператор C называется *оператором Дюфло-Мура* (см. [20, 21]).

Семейство (7) называется *семейством аффинных вейвлетов Пуанкаре*, или, для краткости, *семейством вейвлетов*.

Введем в рассмотрение *аффинное вейвлет-преобразование Пуанкаре* (см. [21]), которое, в связи с тем, что других вейвлет-преобразований в данной статье не возникает, будем называть вейвлет-преобразованием. Вейвлет-преобразование определяется отдельно для каждого $\mathcal{D}_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, мы приводим результаты для любой $f(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$:

$$\begin{gathered} \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g) \equiv \langle f, U(g)\zeta\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi} f(\vec{\chi})\overline{\zeta(g^{-1}\vec{\chi})}, \\ \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g\,(a,\phi,\vec{\chi}_s)) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi} f(\vec{\chi})\frac{1}{a}\overline{\zeta\left(\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\frac{\vec{\chi}-\vec{\chi}_s}{a}\right)}. \end{gathered} \tag{20}$$

Вейвлет-преобразование является сверткой и поэтому легко вычисляется в Фурье области:

$$\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g\,(a,\phi,\vec{\chi}_s)) = \frac{a}{(2\pi)^2}\int\limits_{D_1} d^2\vec{\sigma}\widehat{f}(\vec{\sigma})\overline{\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})}e^{-i(\vec{\sigma},\vec{\chi}_s)}. \tag{21}$$

Отметим свойство, следующее из неравенства Коши-Буняковского,

$$|\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g)| \leqslant \|f\|\|\zeta\|. \tag{22}$$

Поэтому вейвлет-преобразование есть результат применения ограниченного оператора к $f(\vec{\chi})$.

Решающее значение для дальнейшего является теорема об изометрии, доказанная для локально компактных групп в [20], которая применима и в частном случае аффинной группы Пуанкаре. Пусть ψ, ζ – два допустимых материнских вейвлета. Тогда для функций $f(\vec{\chi})$, $v(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$ справедливо соотношение ортогональности

$$\int\limits_G \langle f, U(g)\zeta\rangle\overline{\langle v, U(g)\psi\rangle}d\mu(g) = \langle C\psi, C\zeta\rangle\,\langle f, v\rangle\,. \tag{23}$$

Отметим, что под знаком интеграла стоят вейвлет-преобразования $\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g) \equiv \langle f, U(g)\zeta\rangle$ и $\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)(g) \equiv \langle v, U(g)\psi\rangle$. Соотношения (23) показывают, что вейвлет-преобразования от f и v как функции g ортогональны, если f и v ортогональны, или если материнские вейвлеты ζ и ψ выбраны так, что $\langle C\psi, C\zeta\rangle = 0$. Доказательство (23) непосредственно для аффинной группы Пуанкаре значительно проще общего доказательства и приведено в приложении.

§2. Пространство решений волнового уравнения

Применим развитый формализм к получению интегральных представлений решений $u(t,x)$ волнового уравнения

$$\Box u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0. \tag{24}$$

Будем искать решения, такие что $u(t,x,0) = f(t,x) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Для корректной постановки задачи требуется еще условие, которое обеспечивало бы единственность решения. Мы опишем ниже пространство решений, которые определяются однозначно по граничным данным. Именно для решений из этих пространств мы будем строить интегральные представления. Как упоминалось выше, функцию $f(t,x)$ можно представить в виде $f(t,x) = \sum\limits_{j=1}^{4} f_j(t,x)$, $f_j(t,x) \in \mathcal{D}_j$. Рассмотрим пространство $\mathcal{H}$, которое является прямой суммой восьми подпространств,

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^{4} \mathcal{H}_j, \qquad \mathcal{H}_j = \mathcal{H}_j^+ \oplus \mathcal{H}_j^-, \tag{25}$$

$$u(t,x,y) = \sum_{j=1}^{4} u_j(t,x,y), \quad u_j(t,x,y) = u_j^+(t,x,y) + u_j^-(t,x,y), \tag{26}$$

$$u_j(t,x,y) \in \mathcal{H}_j, \quad u_j^+(t,x,y) \in \mathcal{H}_j^+, \quad u_j^-(t,x,y) \in \mathcal{H}_j^-. \tag{27}$$

Будем предполагать, что $\widehat{f}_j^+, \widehat{f}_j^- \in \mathcal{L}_2(\mathcal{D}_j)$. Подпространства $\mathcal{H}_j^\pm$, $j = 1,2$, состоят из интегрируемых с квадратом функций от $\vec{\chi} = (t,x)^\top$, зависящих от y как от параметра:

$$\begin{aligned} u_j^+(t,x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{D_j} d^2\vec{\sigma}\, e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi}+ik_y y}\widehat{f}_j^+(\vec{\sigma}), \quad k_y = \sqrt{k^2-k_x^2},\ j=1,2,\\ u_j^-(t,x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{D_j} d^2\vec{\sigma}\, e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi}-ik_y y}\widehat{f}_j^-(\vec{\sigma}), \quad \widehat{f}_j(\vec{\sigma}) = \widehat{f}_j^+(\vec{\sigma}) + \widehat{f}_j^-(\vec{\sigma}). \end{aligned} \tag{28}$$

Эти функции могут быть не дифференцируемы, и тогда они не являются классическими решениями волнового уравнения. Дадим обобщенную постановку краевой задачи для волнового уравнения в одном из подпространств, например, в $\mathcal{H}_1^+$. Пусть $\alpha(\vec{\chi}) \in \mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$– класс

Шварца, то есть множество вещественнозначных бесконечно дифференцируемых функций, убывающих вместе со всеми своими производными быстрее любой степени. Будем говорить, что $u_1^+(t,x,y)$ удовлетворяет волновому уравнению в обобщенном смысле, а также краевому условию $u_1^+(t,x,0) = f(t,x)$, если $\forall \alpha \in \mathcal{S}$ выполняются соотношения:

$$\left\langle u_1^+, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right\rangle - \frac{\partial^2 \left\langle u_1^+, \alpha \right\rangle}{\partial y^2} = 0, \tag{29}$$

$$\left\langle u_1^+, \alpha \right\rangle|_{y=0} = \left\langle f, \alpha \right\rangle. \tag{30}$$

Проверим, например, что $u_1^+(t,x,y) \in \mathcal{H}_1^+$ удовлетворяет (30). Так как решение $u_1^+(t,x,y)$ является квадратично интегрируемой функцией от $\vec{\chi} = (t,x)^\top$, то её действие на основную функцию $\alpha(\vec{\chi})$ задается интегралом по $\vec{\chi}$ от произведения $u_1^+\alpha$, зависящим от y как от параметра. Применим тождество Планшереля, получим

$$\langle u, \alpha \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} d^2\vec{\sigma} e^{ik_y y} \widehat{f}_1^+(\vec{\sigma}) \widehat{\alpha}(\vec{\sigma}). \tag{31}$$

Интеграл (31), а также интегралы, полученные дифференцированием его подынтегрального выражения по y, сходятся равномерно по y. Поэтому интеграл является непрерывной функцией y, при $y = 0$ получим (30). Кроме того, возможно дифференцирование по y под знаком интеграла. Справедливость уравнения (29) легко проверяется после перехода в Фурье область (29). Итак, $u_1^+(t,x,y)$, определяемое формулой (28) при $j = 1$, является обобщенным решением задачи (29), (30). Определим также решения $u_j^+(t,x,y)$, $j = 3,4$:

$$\begin{aligned} u_j^+(t,x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{D_j} d^2\vec{\sigma}\, e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi} + k_y y} \widehat{f}_j^+(\vec{\sigma}), \quad k_y = \sqrt{k_x^2 - k^2},\, j = 3,4, \\ u_j^-(t,x,y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int\limits_{D_j} d^2\vec{\sigma}\, e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi} - k_y y} \widehat{f}_j^-(\vec{\sigma}), \quad \widehat{f}_j(\vec{\sigma}) = \widehat{f}_j^+(\vec{\sigma}) + \widehat{f}_j^-(\vec{\sigma}). \end{aligned} \tag{32}$$

Функции $u_j^+(t,x,y)$, $j = 3,4$ являются обобщенными решениями задачи (29), (30) при $y < 0$, а функции $u_j^-(t,x,y)$, $j = 3,4$ - обобщенные решения той же задачи при $y > 0$.

Скалярное произведение двух решений $F(\vec{\chi},y)$, $V(\vec{\chi},y)\in\mathcal{H}_1^+$ определим следующим образом:

$$\langle F,V\rangle_{\mathcal{H}_1^+}=\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} d^2\vec{\chi}\,F(\vec{\chi},y)\overline{V(\vec{\chi},y)}. \tag{33}$$

Скалярное произведение не зависит от y, что легко получить, применяя тождество Планшереля. В дальнейшем мы не будем писать нижний индекс $\mathcal{H}_1^+$ при символе скалярного произведения.

Построим интегральное представление решений из $\mathcal{H}_1^+$, интегральные представления решений из других пространств строятся аналогично.

Выберем функции $\zeta(\vec{\chi}),\psi(\vec{\chi}),f(\vec{\chi}),v(\vec{\chi})\in\mathcal{D}_1$, причем две из них, $\zeta(\vec{\chi})$, $\psi(\vec{\chi})$, принадлежат области определения оператора Дюфло-Мура (18), (19). Введем в рассмотрение соответствующие решения из $\mathcal{H}_1^+$

$$Z(\vec{\chi},y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} d^2\vec{\sigma}\,e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi}+ik_y y}\widehat{\zeta}(\vec{\sigma}), \tag{34}$$

$$\Psi(\vec{\chi},y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} d^2\vec{\sigma}\,e^{-i\vec{\sigma}\cdot\vec{\chi}+ik_y y}\widehat{\psi}(\vec{\sigma}), \tag{35}$$

которые будем называть материнскими решениями. Введем по аналогии решения $F(\vec{\chi},y)$, $V(\vec{\chi},y)$.

Введем семейства решений, по которым предполагается производить разложения

$$Z_g(\vec{\chi},y)=\frac{1}{a}\,Z(g^{-1}\vec{\chi},y/a)=\frac{1}{a}Z\left(\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\frac{\vec{\chi}-\vec{\chi}_s}{a},\frac{y}{a}\right), \tag{36}$$

$$\Psi_g(\vec{\chi},y)=\frac{1}{a}\,\Psi(g^{-1}\vec{\chi},y/a)=\frac{1}{a}\Psi\left(\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\frac{\vec{\chi}-\vec{\chi}_s}{a},\frac{y}{a}\right). \tag{37}$$

Фурье-преобразование от решений по переменной $\vec{\chi}$ дается формулами

$$\widehat{Z}_g(\vec{\sigma},y)=a\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})e^{i(\vec{\sigma},\,\vec{\chi}_s)+ik_y y}, \tag{38}$$

$$\widehat{\Psi}_g(\vec{\sigma},y)=a\widehat{\psi}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})e^{i(\vec{\sigma},\,\vec{\chi}_s)+ik_y y}. \tag{39}$$

Определим вейвлет-преобразование решений:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\Psi V)(g,y)&=\langle V(\vec{\chi},y),\Psi_g(\vec{\chi},y)\rangle\,,\\ (\boldsymbol{\mathcal{W}}_Z F)(g,y)&=\langle F(\vec{\chi},y),Z_g(\vec{\chi},y)\rangle\,.\end{aligned} \tag{40}$$

Отметим, что так определенное вейвлет-преобразование решений не зависит от y. Поэтому тождество (23) при $\langle C\psi, C\zeta\rangle \neq 0$ дает

$$\langle F, V\rangle = \frac{1}{\langle C\psi, C\zeta\rangle} \int\limits_G d\mu(g)\ \langle F, Z_g\rangle\, \overline{\langle V, \Psi_g\rangle}. \tag{41}$$

Это тождество мы истолковываем как формальное равенство

$$F(\vec{\chi}, y) = \frac{1}{c_{\psi\zeta}} \int\limits_G d\mu(g)\, \langle F, Z_g\rangle\, \Psi_g(\vec{\chi}, y), \tag{42}$$

где введено обозначение

$$c_{\psi\zeta} = \langle C\psi, C\zeta\rangle\,. \tag{43}$$

Условие $c_{\psi\zeta} \neq 0$ и абсолютной сходимости интеграла в (43) называется условием допустимости для пары материнских вейвлетов ζ, ψ. Учитывая определение (40) и то обстоятельство, что $(\boldsymbol{\mathcal{W}}_Z F)\,(g, y) = (\boldsymbol{\mathcal{W}}_Z F)\,(g, 0) = (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)\,(g)$, мы получаем

$$F(\vec{\chi}, y) = \frac{1}{\langle C\psi, C\zeta\rangle} \int\limits_G d\mu(g)\, (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)\,(g)\Psi_g(\vec{\chi}, y). \tag{44}$$

Мы будем называть формулу (42) или (44) формулой восстановления, поскольку она позволяет восстановить решение, если известно его вейвлет-преобразование. Формула (44) использовалась нами в приложениях к задачам сейсмики [10].

§3. Исследование сходимости интегралов, задающих формулу восстановления

Утверждение 1. *(О поточечной сходимости) Пусть функция $f \in \mathcal{D}_1$ такова, что её преобразование Фурье абсолютно интегрируемо $\widehat{f} \in \mathcal{L}_1(D_1)$, а вейвлеты ζ, ψ – допустимы. Тогда имеет место формула восстановления:*

$$\begin{aligned} F(\vec{\chi}, y) &= \frac{1}{c_{\psi\zeta}} \int\limits_G d\mu(g)\, (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)\,(g)\Psi_g(\vec{\chi}, y) \\ &\equiv \frac{1}{c_{\psi\zeta}} \int\limits_0^\infty \frac{da}{a^3} \int\limits_{\mathbb{R}} d\phi \int\limits_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi}_s\, (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)\,(a, \phi, \vec{\chi}_s) \frac{1}{a} \Psi\left(\boldsymbol{\Lambda}_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a}, \frac{y}{a}\right). \end{aligned} \tag{45}$$

Доказательство. Вычислим внутренний интеграл по $\vec{\chi}_s$ с помощью равенства Планшереля с учётом того, что в Фурье области вейвлет-преобразование задаётся формулой (21), а преобразование Фурье от решений семейства даётся формулой (39):

$$F(\vec{\chi},y) = \frac{1}{c_{\psi\zeta}}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \frac{da}{a}\int_{\mathbb{R}} d\phi \int_{D_1} d^2\vec{\sigma}\,\widehat{f}(\vec{\sigma})\overline{\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})}\widehat{\psi}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})e^{-i(\vec{\chi},\vec{\sigma})+ik_y y}.$$

Поменяем порядок интегрирование, сделав интегрирование по $\vec{\sigma}$ внешним,

$$F(\vec{\chi},y) = \frac{1}{c_{\psi\zeta}}\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{D_1} d^2\vec{\sigma}\,\widehat{f}(\vec{\sigma})e^{-i(\vec{\chi},\vec{\sigma})+ik_y y}\int_0^\infty \frac{da}{a}\int d\phi\overline{\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})}\widehat{\psi}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{D_1} d^2\vec{\sigma}\,\widehat{f}(\vec{\sigma})e^{-i(\vec{\chi},\vec{\sigma})+ik_y y} = F(\vec{\chi},y).$$

В предпоследнем равенстве мы воспользовались тем, что согласно лемме, (см. Приложение), внутренний интеграл равен $c_{\psi\zeta}$. В связи тем, что $\widehat{f}(\vec{\sigma}) \in \mathcal{L}_1$ повторный интеграл сходится абсолютно, и, значит, согласно теореме Фубини, замена порядка интегрирования была законной. □

Доказательство следующего утверждения проведено по аналогии с доказательством для группы аффинных преобразований на прямой, приведённым в книге [22]. Прежде, чем перейти к его формулировке докажем лемму, которая является следствием тождества изометрии (23).

Лемма 1. *Пусть* $\zeta(\vec{\chi}),\psi(\vec{\chi}),f(\vec{\chi}),v(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$. *Пусть* $\zeta(\vec{\chi}),\psi(\vec{\chi})$ *допустимые вейвлеты, тогда справедливо неравенство:*

$$\left|\int d\mu(g)\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)(g)}\right| \leqslant \sqrt{\left|\int d\mu(g)\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi f\right)(g)}\right|\left|\int d\mu(g)\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta v\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)(g)}\right|}. \quad (46)$$

Доказательство. Действительно, по доказанному (23) левая часть неравенства равна $|c_{\psi\zeta}\langle f, g\rangle|$, а правая $|c_{\psi\zeta}\|f\|^2|^{1/2}|c_{\psi\zeta}\|v\|^2|^{1/2}$, а тогда (46) следует из неравенства Коши-Буняковского для $\langle f, g\rangle$. $\square$

Утверждение 2. *(О сходимости в среднем) Пусть функция* $f \in \mathcal{D}_1$, *а вейвлеты* ζ, ψ *– допустимы. Тогда интеграл в формуле восстановления* (42) *сходится по* $\mathcal{L}_2$ *норме, а именно, справедливо, что:*

(1) $\widetilde{f}(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$, *где*

$$\widetilde{f}(\vec{\chi}) = \frac{1}{c_{\psi\zeta}} \int_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int_{|\vec{\chi}_s|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right) \psi_{g(a,\phi,\vec{\chi}_s)}(\vec{\chi}), \quad (47)$$

где $0 < A_1 < A_2 < \infty$, $-\infty < \Phi_1 < \Phi_2 < \infty$, $|\vec{\chi}_s|^2 = c^2 t_s^2 + x_s^2$, $0 < \rho < \infty$.

(2)

$$\lim_{\substack{A_1 \to 0,\, A_2 \to \infty \\ \Phi_1 \to -\infty,\, \Phi_2 \to \infty \\ \rho \to \infty}} \left\| f - \widetilde{f} \right\| = 0. \quad (48)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение линейный функционал, действуюший на функциях $v(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$:

$$I(v) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi}\,\overline{v(\vec{\chi})} \int_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int_{-\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int_{|\vec{\chi}|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right) \frac{1}{a} \psi\left(\boldsymbol{\Lambda}_{-\phi} \frac{\vec{\chi} - \vec{\chi}_s}{a}\right). \quad (49)$$

Согласно теореме Фубини, если мы получим после замены переменных абсолютно сходящийся интеграл, то замена переменных оправдана. Поменяем порядок интегрирования и воспользуемся равномерной ограниченностью вейвлет-преобразования (22), получим:

$$|I(v)| = \left| \int_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int_{-\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int_{|\vec{\chi}|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right) \overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right)} \right|$$

$$\leqslant \int_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int_{-\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int_{|\vec{\chi}_s|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left|\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right)\right| \left|\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\Psi v\right)\left(g(a,\phi,\vec{\chi}_s)\right)\right|$$

$$\leqslant \int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int\limits_{-\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int\limits_{|\vec{\chi}_s|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \|f\| \|v\| \|\psi\| \|\zeta\|$$

$$= \pi\rho^2 \left(\frac{1}{A_1^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) (\Phi_2 - \Phi_1) \|f\| \|\zeta\| \|v\| \|\psi\| < \infty. \quad (50)$$

Согласно теореме Рисса о представлении линейного функционала, существует единственный элемент $\widetilde{f} \in \mathcal{D}_1$ такой, что $I(v) = \left\langle \widetilde{f}, v \right\rangle$. Отсюда следует справедливость первой части утверждения.

Докажем вторую часть утверждения.

$$\left\| f - \widetilde{f} \right\| = \sup_{\|v\|=1} \left| \left\langle f - \widetilde{f}, v \right\rangle \right| = \sup_{\|v\|=1} \left| \langle f, v \rangle - \left\langle \widetilde{f}, v \right\rangle \right|$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \left| \langle f, v \rangle - c_{\psi\zeta}^{-1} \int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int\limits_{-\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int\limits_{|\vec{\chi}_s|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g) \overline{\langle \psi_g, v \rangle} \right|$$

$$= \sup_{\|v\|=1} \left| \langle f, v \rangle - c_{\psi\zeta}^{-1} \int\limits_{A_1}^{A_2} \frac{da}{a^3} \int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2} d\phi \int\limits_{|\vec{\chi}_s|<\rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g) \overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)(g)} \right|$$

В последнем равенстве мы воспользовались абсолютной сходимостью интеграла (49) и по теореме Фубини поменяли порядок интегрирования. Вследствие тождества Планшереля (23) и аддитивности интеграла, найдем следующее:

$$\left\| f - \widetilde{f} \right\|$$

$$= c_{\psi\zeta}^{-1} \sup_{\|v\|=1} \left| \int\limits_{a \in [0, A_1] \cup a \geqslant A_2} \frac{da}{a^3} \int\limits_{\phi \langle \Phi_1 \cup \phi \rangle \Phi_2} d\phi \int\limits_{|\vec{\chi}| > \rho} d^2\vec{\chi}_s \left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g) \overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi h\right)(g)} \right|.$$

К последнему интегралу уже можно применить неравенство (46):

$$
\begin{aligned}
&\left\|f-\widetilde{f}\right\| \\
&\leqslant c_{\psi\zeta}^{-1}\sup_{\|v\|=1}\left|\int\limits_{a\in[0,A_1]\cup a\geqslant A_2}\frac{da}{a^3}\int\limits_{\phi<\Phi_1\cup\phi>\Phi_2}d\phi\int\limits_{|\vec{\chi}|>\rho}d^2\vec{\chi}_s\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi f\right)(g)}\right|^{1/2} \\
&\times\left|\int\limits_{a\in[0,A_1]\cup a\geqslant A_2}\frac{da}{a^3}\int\limits_{\phi<\Phi_1\cup\phi>\Phi_2}d\phi\int\limits_{|\vec{\chi}|>\rho}d^2\vec{\chi}_s\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta v\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi v\right)(g)}\right|^{1/2} \\
&\leqslant c_{\psi\zeta}^{-1}\left|\int\limits_{a\in[0,A_1]\cup a\geqslant A_2}\frac{da}{a^3}\int\limits_{\phi<\Phi_1\cup\phi>\Phi_2}d\phi\int\limits_{|\vec{\chi}|>\rho}d^2\vec{\chi}_s\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g)\overline{\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi f\right)(g)}\right|^{1/2}
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались тем, что для выражения в предпоследней строчке справедлива оценка $|...|^{1/2}\leqslant c_{\psi\zeta}^{-1/2}\|v\|^2\leqslant c_{\psi\zeta}^{-1/2}$. Так как интеграл по всей области изменения параметров g сходится в силу (23), то, переходя к пределу в последней оценке, получаем (49). □

Утверждение 3. *(О сходимости в среднем) Пусть функция* $F(\vec{\chi},y)\in\mathcal{H}_1$. *Пусть вейвлеты* $\zeta,\psi\in\mathcal{D}_1$ *– допустимы, а* $\Psi(\vec{\chi},y)\in\mathcal{H}_1$ *- решение, соответствующее* $\psi\in\mathcal{D}_1$. *Тогда*

(1) $\widetilde{F}(\vec{\chi})\in\mathcal{H}_1$, *где*

$$
\widetilde{F}(\vec{\chi},y)=\frac{1}{c_{\psi\zeta}}\int\limits_{A_1}^{A_2}\frac{da}{a^3}\int\limits_{\Phi_1}^{\Phi_2}d\phi\int\limits_{|\vec{\chi}_s|<\rho}d^2\vec{\chi}_s\left(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f\right)(g(a,\phi,\vec{\chi}_s))\Psi_{g(a,\phi,\vec{\chi}_s)}(\vec{\chi},y),
\tag{51}
$$

где $0<A_1<A_2<\infty$, $-\infty<\Phi_1<\Phi_2<\infty$, $|\vec{\chi}_s|^2=c^2t_s^2+x_s^2$, $0<\rho<\infty$,

(2)

$$
\lim_{\substack{A_1\to0,\,A_2\to\infty\\ \Phi_1\to-\infty,\,\Phi_2\to\infty\\ \rho\to\infty}}\left\|F(\vec{\chi},y)-\widetilde{F}(\vec{\chi},y)\right\|=0.
\tag{52}
$$

Доказательство следует из того, что между пространствами $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{D}_1$ есть изометрический изоморфизм.

§4. Приложение

Приведем здесь доказательство известных фактов, которые мы используем, см. [21].

Лемма 2. *Пусть* $\vec{\sigma} \in D_1$ *и* $\frac{f(\vec{\sigma})}{\|\vec{\sigma}\|_m^2} \in \mathcal{L}_1(D_1)$. *Тогда*

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}} d\phi f(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma}_0) = \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \frac{f(\vec{\sigma})}{\|\vec{\sigma}\|_m^2} \tag{53}$$

при любом $\vec{\sigma}_0 \neq 0$.

Доказательство. Действительно, всякий $\vec{\sigma}_0 \in D_1$ допускает представление $\vec{\sigma}_0 = \rho_0\mathbf{\Lambda}_{-\phi_0}\vec{e}_0$, где $\vec{e}_0 = \binom{1}{0}$. Тогда:

$$\begin{aligned} I = \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}} d\phi f(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma}_0) &= \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{\mathbb{R}} d\phi f(a\rho_0\mathbf{\Lambda}_{-\phi-\phi_0}\vec{e}_0) \\ &= \int_0^\infty d\rho\rho \int_{\mathbb{R}} d\widetilde{\phi} \frac{f(\rho\mathbf{\Lambda}_{-\widetilde{\phi}}\vec{e}_0)}{\rho^2} = \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \frac{f(\vec{\sigma})}{\|\sigma\|_m^2}, \end{aligned}$$

где в предпоследнем равенстве введены новые переменные $\rho = a\rho_0$, $\widetilde{\phi} = -\phi - \phi_0$, а в последнем равенстве переменные $\vec{\sigma} = \rho\mathbf{\Lambda}_{-\widetilde{\phi}}\vec{e}_0$. □

Докажем формулу (23).

Утверждение 4. *(Тождество изометрии)*
Пусть пара материнских вейвлетов $\zeta(\vec{\chi})$ *и* $\psi(\vec{\chi})$ *допустима:*

$$0 < c_{\psi\zeta} = \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \frac{\overline{\zeta(\vec{\sigma})}\psi(\vec{\sigma})}{\|\vec{\sigma}\|_m^2} < \infty, \tag{54}$$

и интеграл в (54) *сходится абсолютно. Тогда для любых* $f(\vec{\chi})$, $g(\vec{\chi}) \in \mathcal{D}_1$ *имеет место равенство:*

$$\begin{aligned} I &= \int d\mu(\nu)\ (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)(\nu)\overline{(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi g)(\nu)} \\ &\equiv \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}} d\phi \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{\chi}_s\, (\boldsymbol{\mathcal{W}}_\zeta f)(\nu)\overline{(\boldsymbol{\mathcal{W}}_\psi g)(\nu)} = c_{\psi\zeta}\langle f, g\rangle . \end{aligned} \tag{55}$$

Доказательство. Применим равенство Планшереля к интегралу по $\vec{\chi}_s$ и воспользуемся тем, что преобразование Фурье вейвлет-преобразования дается формулой (21), получим

$$I = \int_0^\infty \frac{da}{a} \int d\phi \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \widehat{f}(\vec{\sigma})\overline{\widehat{g}(\vec{\sigma})}\overline{\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})}\widehat{\psi}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma}) \tag{56}$$

Поменяем порядок интегрирования, найдем

$$I = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{D_1} d^2\vec{\sigma} \widehat{f}(\vec{\sigma})\overline{\widehat{g}(\vec{\sigma})} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int d\phi \overline{\widehat{\zeta}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma})}\widehat{\psi}(a\mathbf{\Lambda}_{-\phi}\vec{\sigma}) = c_{\psi\zeta}\,(f,g). \tag{57}$$

В последнем равенстве мы воспользовались леммой 2. Последний интеграл сходится абсолютно, так как по предположению интеграл $c_{\psi\zeta}$ сходится абсолютно, а также тем, что $f, g \in \mathcal{L}_2(D_1)$. Значит, замена порядка интегрирования была законна, согласно теореме Фубини. □

Следствие 1. *Представление квадратично интегрируемо тогда и только тогда, когда имеется ненулевая функция, удовлетворяющая условию* (18).

Литература

1. M. V. Perel, *Integral representation of solutions of the wave equation based on Poincaré wavelets.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, Saint-Petersburg 2009. p. 159–161.
2. E. Gorodnitskiy, M. V. Perel, *The Poincaré wavelet transform: implementation and interpretation.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, Saint-Petersburg 2011, pp. 72–77.
3. M. V. Perel, E. Gorodnitskiy, *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets.* — J. Phys. A: Math. Theor. **45**, No. 38 (2012), 385203; `http://stacks.iop.org/1751-8121/45/i=38/a=385203`.
4. G. Kaiser, *A Friendly Guide to Wavelets.* Birkhäuser 1994.
5. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet analysis for the solutions of the wave equation.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction, Saint-Petersburg 2006, pp. 208–217.
6. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *New physical wavelet 'Gaussian wave packet'.* — J. Phys. A: Math. Theor. **40**, No. 13 (2007) 3441; `http://stacks.iop.org/1751-8121/40/i=13/a=011`
7. M. V. Perel, M. S. Sidorenko, *Wavelet-based integral representation for solutions of the wave equation.* — J. Phys. A: Math. Theor. **42**, No. 37 (2009), 375211; `http://stacks.iop.org/1751-8121/42/i=37/a=375211`

8. A.P. Kiselev, M.V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **41**, No. 4 (2000), 1034–1955; https://doi.org/10.1063/1.533219.
9. А.П. Киселев, М.В. Перель, *Гауссовские волновые пакеты.* — Оптика и Спектроскопия **86**, No. 3 (1999), 357–359.
10. E. Gorodnitskiy, M. Perel, Yu Geng, R.-S. Wu, *Depth migration with Gaussian wave packets based on Poincaré wavelets.* — Geophys. J. International **205**, No. 1 (2016), 314–331; https://doi.org/10.1093/gji/ggv562.
11. В. М. Бабич, Ю. П. Данилов, *Построение асимптотики решения уравнения Шредингера, сосредоточенной в окрестности классической траектории.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **15** (1969), 47–65.
12. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и "квазифотоны".* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **117** (1981), 5–12.
13. А. П. Качалов, *Система координат при описании "квазифотона".* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **140** (1984), 73–76.
14. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод.* — Зап. научн. сем. ПОМИ **342** (2007), 5–13.
15. М. М. Попов, *Новый метод расчета волновых полей в высокочастотном приближении.* — Зап. научн. сем. ЛОМИ **104** (1981), 195–216.
16. M. Leibovich, E. Heyman, *Beam Summation Theory for Waves in Fluctuating Media. Part I: The Beam Frame and the Beam-Domain Scattering Matrix.* — IEEE Transactions on Antennas and Propagation **65**, No. 10 (2017), 5431–5442; https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2740970.
17. M. Leibovich, E. Heyman, *Beam Summation Theory for Waves in Fluctuating Media. Part II: Stochastic Field Representation.* — IEEE Transactions on Antennas and Propagation **65**, No. 10 (2017), 5443–5452. https://doi.org/10.1109/TAP.2017.2740971
18. A. .N. Norris, *Complex point-source representation of real point sources and the Gaussian beam summation method.* — J. Opt. Soc. Am. A **3**, No. 12 (1986) 2005–2010.
19. S. T. Ali, J.-P. Antoine, J. P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and Their Generalizations.* Springer-Verlag New York, 1999.
20. A. Grossmann, J. Morlet, T. Paul, *Transforms associated to square integrable group representations. I. General results.* — J. Math. Phys. **26**, No. 10 (1985), 2473–2479.
21. J.-P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, S. T. Ali, *Two-Dimensional Wavelets and their Relatives.* Cambridge University Press 2004.
22. I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM, 3600 Market Street, Floor 6, Philadelphia, PA 19104) (1992).

Gorodnitskiy E. A., Perel M. V. Justification of the wavelet-based integral representation of a solution of the wave equation.

We study the previously obtained integral representation of a solution of the wave equation. The integrand contains the weighted localized solutions of the wave equation, which depend on integration variables. We construct the parameterized family of the localized solutions from the chosen one by employing the transformations of shift, dilation and the Lorentz transform. We give the sufficient conditions of the pointwise convergence for the obtained improper integral. The convergence in the $\mathcal{L}_2$ sense is proven too.

Санкт-Петербургский
государственный университет
7/9 Университетеская наб.,
Санкт-Петербург 199034, Россия

E-mail: `eugy@yandex.ru`

E-mail: `m.perel@spbu.ru`

Поступило 1 ноября 2017 г.