Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

С. А. Вавилов, М. С. Лытаев

МОДЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ТОНКИХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

§1. Постановка задачи

В настоящей работе представлен подход к решению ряда задач рассеяния электромагнитных волн на диэлектрических препятствиях. Обозначим через $E \subset R^3$ электрическое поле, определяемое из уравнений Максвелла с переменным индексом преломления и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Электромагнитное поле порождается электрическим током, направленным вдоль оси y в декартовых координатах (x, y, z) с частотой ω. Далее предполагается, что среда является диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, z)$. При указанных предположениях уравнение относительно электрического поля $E = E_y(x, z)$ запишется следующим образом

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(j).$$

Можно заметить, что в данном случае $divE = 0$. Предполагая гармоническую зависимость электрического поля от времени, можно выписать уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k^2(1 + i\alpha + n(x, z))V = Q_0\delta(x)\delta(z), \qquad (1)$$

относительно компоненты поля $V(x, z)$, определенной на множестве $\Omega : \{-\infty < x < \infty, -\infty < z < \infty\}$, где x и z соответственно продольная и поперечная координаты, $k = \omega/c$ Ц длина волны в вакууме, $\alpha > 0$ Ц малый параметр. Волновое поле возбуждается точечным источником, определяемым δ-функцией Дирака, константа $Q_0 = \frac{4\pi\omega i}{c^2} j_0$ далее предполагается равной единице. $n(x, z) = \varepsilon(x, z) - 1$. Как будет показано далее, введение малого параметра α обеспечивает единственность решения в соответствии с принципом предельного поглощения. Таким

Ключевые слова: рассеяние, уравнение Гельмгольца, интегральное уравнение, приближенное решение, диэлектрики.

образом, препятствие задается за счет неоднородности индекса преломления, полагая, что $n(x,z)=0$ вне препятствия. Далее предполагается, что функция $n(x,z)$ является финитной и допускает разрывы первого рода как внутри препятствия, так и на его границе. Кроме того, вводятся безразмерные переменные, $x := xk$, $z := zk$.

Аналогичные задачи рассматривались во многих работах [1,2,4–6]. Тем не менее, постановка задачи и метод ее решения отличаются от используемых ранее. В большинстве исследований волновое поле возбуждается падающей плоской волной. Задача рассеяния затем формулируется при помощи уравнения Липпмана-Швингера для отраженной волны. Предлагаемый подход допускает выбор источника излучения, как функции в правой части уравнения Гельмгольца, весьма произвольного вида.

§2. Вывод модельного уравнения

Применяя к уравнению (1) преобразование Фурье по переменной x, приходим к следующему уравнению относительно функции $\widetilde{V}(\lambda,z)$

$$\frac{d^2\widetilde{V}}{dz^2}+(1-\lambda^2+i\alpha)\widetilde{V}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}R(z,\lambda'-\lambda)\widetilde{V}(\lambda',z)d\lambda'=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\delta(z), \quad (2)$$

где

$$\widetilde{V}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}V(x,z)e^{-i\lambda x}\,dx,$$

$$R(z,\lambda'-\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}n(x,z)e^{-ix(\lambda-\lambda')}\,dx.$$

Введем в рассмотрение функцию Грина $\hat{G}(z,z',\lambda)$, определяемую соотношениями

$$\frac{d^2\widehat{G}}{dz^2}+(1-\lambda^2+i\alpha)\widehat{G}=\delta(z-z'),$$

$$\widehat{G}\Big|_{z\to z'+}=\widehat{G}\Big|_{z\to z'-},$$

$$\left.\frac{d\widehat{G}}{dz}\right|_{z\to z'+} - \left.\frac{d\widehat{G}}{dz}\right|_{z\to z'-} = 1.$$

С учетом принципа предельного поглащения, функция Грина записывается в явном виде

$$\widehat{G}(z, z', \lambda) = -\frac{a - id}{2(a^2 + d^2)} e^{-(a+id)|z-z'|},$$

где $a = \sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\alpha^2}-(1-\lambda^2)}{2}}$, $d = -\sqrt{\frac{\sqrt{(\lambda^2-1)^2+\alpha^2}+(1-\lambda^2)}{2}}$, $a^2 + d^2 = \sqrt{(\lambda^2-1)^2+\alpha^2}$.

Отметим свойства параметра a, входящего в указанную функцию Грина, которые потребуются в дальнейшем

а) $a \geqslant \sqrt{\frac{\sqrt{1+\alpha^2}-1}{2}} > 0$

б) $a \sim \frac{|\lambda|}{2}$ as $\lambda \to \pm\infty$

С учетом введенной в рассмотрение функции $\widehat{G}(z, z', \lambda)$ исходная задача рассеяния может быть сведена к интегральному уравнению

$$\widetilde{V}(\lambda, z)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{G}(z, z', \lambda)R(z', \lambda'-\lambda)\widehat{V}(\lambda', z')d\lambda' dz' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{G}(z, 0, \lambda). \tag{3}$$

Предположим, что зависимость $n(x, z)$ может быть представлена следующим образом

$$n(x, z) = \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\eta_j(z), \tag{4}$$

где функции $\eta_j(z)$ являются финитными и обращающимися в ноль вне некоторой полосы $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, при этом величина $h = z_2 - z_1$ далее обозначает толщину препятствия. В этом случае, функция R примет следующий вид

$$R(z, \lambda' - \lambda) = \sqrt{2\pi}\sum_{j=1}^{n}\widehat{b}_j(\lambda' - \lambda)\eta_j(z),$$

где $\widehat{b}_j(\lambda' - \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} b_j(x)e^{-ix(\lambda'-\lambda)}\,dx$.

В дальнейшем для краткости изложения, но без потери общности, будем полагать $n = 1$ и, соответственно, $b_1(x) = b(x)$, $\eta_1(z) = \eta(z)$. Дальнейшие результаты переносятся на случай произвольного n очевидным образом.

Будем исходить из того, что толщина препятствия h много меньше длины волны как внутри препятствия, так и вне его. Тогда естественно предположить, что на интервале $[z_1, z_2]$ функция $\widehat{V}(\lambda, z)$ не меняет знак по переменной z. Исходя из теоремы о среднем, внутренний интеграл уравнения (3) можно заменить на приближенный

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G}(z, z', \lambda)\eta(z')\widehat{V}(\lambda', z')dz' \approx \widehat{G}(z, z_c, \lambda) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(z')\widehat{V}(\lambda', z')dz' \qquad (5)$$

где z_c произвольное число на интервале $[z_1, z_2]$. Чтобы получить приближенную формулу (5), необходимо разделить вещественную и мнимую части функций $\widehat{G}$ и $\widehat{V}$ в левой части (5) и применить теорему о среднем к каждому из четырех слагаемых.

Теперь можно заменить уравнение (3) на приближенное

$$\widetilde{V}(\lambda, z) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{G}(z, z_c, \lambda) \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{b}(\lambda' - \lambda)\eta(z')\widetilde{V}(\lambda', z')d\lambda' dz' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{G}(z, 0, \lambda). \qquad (6)$$

Введем в рассмотрение новую функцию

$$\varphi(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{b}(\lambda' - \lambda)\eta(z')\widetilde{V}(\lambda', z')d\lambda'\, dz'.$$

Приближенное уравнение (6) может быть переписано при помощи функции $\varphi(\lambda)$ следующим образом

$$\widetilde{V}(\lambda, z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{G}(z, z_c, \lambda)\varphi(\lambda) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{G}(z, 0, \lambda). \qquad (7)$$

В силу выражения (7) тело рассеяния можно рассматривать как совокупность точечных источников, расположенных вдоль оси $z = z_c$ с плотностью распределения, задаваемой функцией $\varphi(\lambda)$.

Подставляя (7) в зависимость (6), приходим к уравнению относительно $\varphi(\lambda)$

$$\varphi(\lambda) - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda, \lambda')\varphi(\lambda')d\lambda' = g(\lambda), \tag{8}$$

где

$$K(\lambda, \lambda') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{b}(\lambda' - \lambda)\chi(\lambda'),\ \chi(\lambda') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(z')\widehat{G}(z', z_c, \lambda')\,dz',$$

$$g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{b}(\lambda' - \lambda)\gamma(\lambda')d\lambda',\ \gamma(\lambda') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(z')\widehat{G}(z', 0, \lambda')\,dz'.$$

§3. Свойства модельного уравнения

В дальнейшем будем исходить из следующих предположений

$$|\widehat{b}(\lambda_1) - \widehat{b}(\lambda_2)| \leqslant c_1|\lambda_1 - \lambda_2|, \tag{9}$$

$$\sup_{\xi} |\widehat{b}(\xi)| \leqslant c_2, \tag{10}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\eta(\xi)|^2 d\xi \leqslant c_3, \tag{11}$$

где c_1, c_2, c_3 – некоторые константы.

Заметим, что условие (9) выполняется в случае сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |xb(x)|\,dx$. Из сходимости интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |b(x)|\,dx < +\infty$ следует страведливость условия (10), а условие (11) автоматически выполняется благодаря условию финитности функции $\eta(\xi)$.

Решение уравнения (8) ищется в банаховом пространстве $\mathcal{B}$ ограниченных функций с нормой $\|\varphi\| = \sup\limits_{|\lambda|<+\infty} |\varphi(\lambda)|$. Выбор указанного пространства обусловлен тем, что в силу структуры функции Грина интегралы $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{G}(z, z_c, \lambda)|d\lambda$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{G}(z, 0, \lambda)|$ сходятся за исключением значений $z = z_c$ и $z = 0$, отвечающих, соответственно, осям расположения мнимых источников и источника излучения. Соответственно, искомый прообраз функции $\widetilde{V}(\lambda, z)$, определяемой соотношением

(7), для указанного класса функций φ существует и ограничен, за исключением определенных выше значений переменной z.

Лемма 1. *Имеет место сходимость следующих интегралов*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\lambda')| d\lambda' < +\infty, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\lambda')| d\lambda' < +\infty.$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения докажем для функции $\chi(\lambda)$. Для $\gamma(\lambda)$ доказательство аналогично. В силу неравенства Коши–Буняковского и условия (11) имеет место неравенство

$$|\chi(\lambda')| \leqslant \sqrt{c_3} \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{G}(z', z_c, \lambda')|^2 dz'}$$

В свою очередь, исходя из явного вида функции Грина, можно записать

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{G}(z', z_c, \lambda')|^2 dz' = \frac{|a - id|^2}{4(a^2 + d^2)^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|z' - z_c|} dz' \leqslant \frac{1}{4(a^2 + d^2)a}.$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\lambda')| d\lambda' \leqslant \frac{\sqrt{c_3}}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{(1 - \lambda'^2)^2 + \alpha^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a(\lambda')}} d\lambda'. \tag{12}$$

Несобственный интеграл в правой части соотношения (12) сходится в силу свойств а) и б) функции Грина. □

Лемма 2. *Функция $g(\lambda)$ в правой части уравнения (8) ограничена.*

Доказательство. Утверждение вытекает из условия (10) и Леммы 1, поскольку

$$|g(\lambda)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\xi} |\widehat{b}(\xi)| \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\gamma(\lambda')| d\lambda'.$$

□

Лемма 3. *Интегральный оператор в уравнении (8) отображает равномерно ограниченные функции в равномерно ограниченные.*

Доказательство. Положим $y(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(\lambda,\lambda')\varphi(\lambda')d\lambda'$. Справедливость утверждения вытекает из свойства (10), Леммы 1 и следующих оценок

$$\|y\| \leqslant \sup_{\lambda} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(\lambda,\lambda')|d\lambda'\|\varphi\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{\xi} |\widehat{b}(\xi)| \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\lambda')|d\lambda'\|\varphi\|.$$

□

Лемма 4. *Интегральный оператор в уравнении (8) отображает равномерно ограниченные функции в равностепенно непрерывные.*

Доказательство. В силу свойства (9) и Леммы 1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&|y(\lambda_1) - y(\lambda_2)| \\
&= |\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (K(\lambda_1,\lambda') - K(\lambda_2,\lambda'))\varphi(\lambda')d\lambda'| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |K(\lambda_1,\lambda') - K(\lambda_2,\lambda')|d\lambda' \cdot \|\varphi\| \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{b}(\lambda'-\lambda_1) - \widehat{b}(\lambda'-\lambda_2)| \cdot |\chi(\lambda')|d\lambda' \cdot \|\varphi\| \\
&\leqslant \frac{c_1}{\sqrt{2\pi}} |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\lambda')|d\lambda' \cdot \|\varphi\|, \quad \square
\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказываются следующие утверждения.

Лемма 5.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sup_{|\lambda|<+\infty} |K(\lambda,\lambda')|d\lambda' < c_4 < +\infty.$$

Лемма 6. *Функция $g(\lambda)$ непрерывна.*

Отметим, что построенная модель не допускает выбора бесконечно тонкого поперечного размера тела рассеивания. В частности, если заменить функцию $\eta(\xi)$ на дельта-функцию Дирака $\delta(\xi)$, то $\chi(\lambda') = \widehat{G}(z_c, z_c, \lambda')$ и, соответственно, основная Лемма 1 перестает быть справедливой.

§4. Разрешимость модельного уравнения

Наряду с уравнением (8), рассмотрим приближенное к нему уравнение

$$\varphi(\lambda)-\int_{-n}^{+n}K(\lambda,\lambda')\varphi(\lambda')d\lambda'=g(\lambda), \tag{13}$$

где n –натуральное число. Рассмотрим соответствующий интегральный оператор

$$A_n\cdot=\int_{-n}^{+n}K(\lambda,\lambda')\cdot d\lambda' \tag{14}$$

определенный в банаховом пространстве $\mathcal{C}_n[-n,n]$ непрерывных на интервале $[-n,n]$ функций с нормой $\|\varphi\|=\max_{|\lambda|\leqslant n}|\varphi(\lambda)|$. Отметим, что $A_n:\mathcal{C}_n\to\mathcal{C}_n$ по Лемме 4.

Теорема 1. *Зафиксируем некоторое n. Предположим, что единица не является собственным числом оператора* (14). *Тогда уравнение* (13) *имеет единственное решение $\mathcal{C}_n$ для произвольной функции $g(\lambda)$ из $\mathcal{C}_n$.*

Доказательство. Из Лемм 1–4 и теоремы Арцела следует компактность оператора A_n. Соответственно, искомый результат непосредственно вытекает из теории Рисса–Шаудера. □

Замечание 1. Далее будет показано, что условие Теоремы 1 для достаточно больших n эквивалентно проверяемому условию Теоремы 2.

Обозначим указанное в Теореме 1 решение через $\varphi_n(\lambda)$. Рассмотрим уравнение (13) относительно фиксированного n при $\lambda\in(-\infty,+\infty)$. Соответственно, его решение $F_n(\lambda)$ в указанном выше пространстве $\mathcal{B}$ может быть записано следующим образом

$$F_n(\lambda)=\begin{cases}\varphi_n(\lambda), & \lambda\in[-n,n],\\ \widetilde{\varphi}_n(\lambda), & \lambda\notin[-n,n],\end{cases}$$

где $\widetilde{\varphi}_n(\lambda)=\int\limits_{-n}^{n}K(\lambda,\lambda')\varphi_n(\lambda')d\lambda'+g(\lambda)$, при этом ограниченность $F_n(\lambda)$ вытекает из ограниченности $\varphi_n(\lambda)$ и Леммы 5. Отметим также, что функции $F_n(\lambda)$ непрерывны по переменной λ благодаря свойствам ядра $K(\lambda,\lambda')$.

Введем в рассмотрение последовательность $\mathcal{D}_n(1)$, определяемую соотношением

$$\mathcal{D}_n(1) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{m!} A_m^n,$$

где

$$A_m^n = \int\limits_{-n}^{n} \dots \int\limits_{-n}^{n} \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_m) \\ & \dots & \\ K(t_m, t_1) & \dots & K(t_m, t_m) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_m.$$

Лемма 7. *Последовательность $\mathcal{D}_n(1)$ сходится.*

Доказательство. Следуя Лемме 5, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon) > 0$ такое, что верны следующие оценки

$$\int\limits_{-\infty}^{-N(\varepsilon)} \sup_{|\lambda|<\infty} |K(\lambda, \lambda')| d\lambda' + \int\limits_{N(\varepsilon)}^{+\infty} \sup_{|\lambda|<\infty} |K(\lambda, \lambda')| d\lambda' < \varepsilon.$$

Для $n_1, n_2 > N(\varepsilon)$ запишем равенство

$$|\mathcal{D}_{n_1}(1) - \mathcal{D}_{n_2}(1)| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} |A_m^{n_1} - A_m^{n_2}|.$$

В силу Леммы Адамара и Леммы 5 справедливы оценки

$$|\mathcal{D}_{n_1}(1) - \mathcal{D}_{n_2}(1)|$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\prod_{i=1}^{m} \int\limits_{-\infty}^{-N(\varepsilon)} \sqrt{m \sup_{|t|<\infty} K^2(t, t_i)} dt_i + \prod_{i=1}^{m} \int\limits_{N(\varepsilon)}^{+\infty} \sqrt{m \sup_{|t|<\infty} K^2(t, t_i)} dt_i \right]$$

$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m!} \sqrt{m^m} \varepsilon^m.$$

Последний ряд сходится. Таким образом, последовательность $\mathcal{D}_n(1)$ является фундаментальной и, следовательно, сходится. □

Теорема 2. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} \mathcal{D}_n(1) \neq 0$. *Тогла последовательность* $F_n(\lambda)$ *равномерно ограничена по* n*:* $\sup\limits_{n} ||F_n|| < c_5 < +\infty$, *где* c_5 *– некоторая константа.*

Доказательство. Выразим $\varphi_n(\lambda)$ через резольвенту Фредгольма [3] $\Gamma_n(\lambda,\lambda',1)=\frac{\mathcal{D}_n(\lambda,\lambda',1)}{\mathcal{D}_n(1)}$

$$\varphi_n(\lambda)=g(\lambda)+\frac{1}{\mathcal{D}_n(1)}\int\limits_{-n}^{+n}\mathcal{D}_n(\lambda,\lambda',1)g(\lambda')d\lambda'$$

при условии $\mathcal{D}_n(1)\neq 0$.

$$\mathcal{D}_n(\lambda,\lambda',1)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}B_m^n(\lambda,\lambda'),$$

$$B_m^n(\lambda,\lambda')=\int\limits_{-n}^{n}\dots\int\limits_{-n}^{n}\begin{vmatrix} K(\lambda,\lambda') & K(\lambda,t_1) & \dots & K(\lambda,t_m)\\ K(t_1,\lambda') & K(t_1,t_1) & \dots & K(t_1,t_m)\\ & & \dots & \\ K(t_m,\lambda') & K(t_m,t_1) & \dots & K(t_m,t_m)\end{vmatrix}dt_1\dots dt_m. \tag{15}$$

Раскладывая определитель в формуле (15) по первому столбцу, приходим к оценкам

$$|\mathcal{D}_n(\lambda,\lambda',1)|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}|B_m^n(\lambda,\lambda')|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sup_{|t|<\infty}|K(t,\lambda')|\sqrt{m^m}c_4^m(m+1).$$

В силу Леммы 5 приходим к неравенству

$$\sup_{|\lambda|<\infty}\int\limits_{-n}^{+n}|\mathcal{D}_n(\lambda,\lambda',1)|d\lambda'\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sqrt{m^m}c_4^{m+1}(m+1).$$

Последний ряд сходится. Таким образом, в силу ограниченности $g(\lambda)$, $\varphi_n(\lambda)$ и Леммы 5 последовательность $F_n(\lambda)$ ограничена. □

Вернемся теперь к уравнению (8) и поставим вопрос о его разрешимости.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 уравнение (8) имеет единственное решение. Более того, решение непрерывно и может с любой точностью приближено последовательностью $F_n(\lambda)$ при $n\to\infty$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы T и T_n

$$T\varphi=\varphi(\lambda)-\int\limits_{-\infty}^{+\infty}K(\lambda,\lambda')\varphi(\lambda')d\lambda', \tag{16}$$

$$T_n\varphi = \varphi(\lambda) - \int\limits_{-n}^{n} K(\lambda,\lambda')\varphi(\lambda')d\lambda', \tag{17}$$

где $T, T_n : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Легко заметить, что $|||T - T_n||| \to 0$ при $n \to \infty$, где через $|||\cdot|||$ обозначена операторная норма.

Запишем уравнение относительно функции h

$$T_n h = h(\lambda) - \int\limits_{-n}^{n} K(\lambda,\lambda')h(\lambda')\lambda' = g(\lambda).$$

По теореме 2 решение этого уравнения $h = (T_n)^{-1}g$ удовлетворяет неравенству $||h|| \leqslant \delta||g||$, где δ Ц некоторая не зависящая от n константа и соотвественно $|||(T_n)^{-1}||| \leqslant \delta$.

Следовательно, для достаточно больших n имеет место неравенство

$$|||T - T_n||| \cdot |||\,(T_n)^{-1}\,||| < 1,$$

из которого следует непрерывная обратимость оператора T. Таким образом выполняется предельное соотношение $|||T^{-1} - T_n^{-1}||| \to 0$, при n стремящемся к бесконечности. □

§5. Заключение

Разработанный метод может быть легко распространен на случай рассеяния электромагнитных волн одновременно на нескольких аналогичных препятствиях, в том числе и при отсутствии определенной симметрии в их расположении. При помощи предложенного метода можно эффективно строить численное решение задач дифракции на пластине произвольной конечной длины при наличии в ней щелей, расположенных произвольным образом. Кроме того, на основе указанного подхода возможно моделирование рассеяния вдали от вытянутых непроницаемых препятствий путем одновременного уменьшения их толщины и искусственного увеличения отвечающего им индекса преломления. Таким образом, например, может быть рассмотрена задача рассеяния гауссова пучка на тонких непроницаемых ребрах, расположенных перпендикулярно непроницаемой плоскости.

Литература

1. D. M. Ambrose, J. Gopalakrishnan, S. Moskow, S. Rome, *Scattering of electromagnetic waves by thin high contrast dielectrics* II: *asymptotics of the electric field and a method for inversion.* — Commun. Math. Sci. **15**, No. 4 (2017), 1041–1053.
2. D. M. Ambrose, S. Moskow, *Scattering of electromagnetic waves by thin high contrast dielectrics*: *Effects of the object boundary.* — Comm. Math. Sci. **11** (2013), 293–314.
3. W. V. Lovitt, *Linear integral equations.* — Dover Publications INC, New York, first edition, 1950.
4. S. Moskow, Santosa Fadil, J. Zhang, *An approximate method for scattering by thin structures.* — SIAM J. Appl. Math. **66**, No. 1 (2005), 187–205.
5. I. O. Sukharevsky, O. V. Shapoval, Altintas Ayhan, A. I. Nosich, *Validity and limitations of the median-line integral equation technique in the scattering by material strips of sub-wavelength thickness.* — IEEE Trans. Antennas Propag. **62**, No. 7 (2014), 3623–3631.
6. Zeev Noam, Cakoni Fioralba, *The identification of thin dielectric objects from far field or near field scattering data.* — SIAM J. Appl. Math. **69**, No. 4 (2009), 1024–1042.

Vavilov S. A., Lytaev M. S. Modelling equation of electromagnetic scattering on thin dielectric structures.

In this research we study the scattering of electromagnetic waves by the dielectric impediment in 2D geometry. The impediment is determined through the inhomogeneous component of the refractive index in the Helmholtz equation. It is supposed that the characteristic gauge of one of the two impediment sizes is much less in comparison with the length of the waves generated by the monochromatic point source. Nevertheless, we don't neglect the structure of the impediment in the process of calculation of the scattered field. The scattered field is defined by the derived model integral equation whose unique solvability is proved.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская набережная, д. 7–9
199034, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: savavilov@inbox.ru

Поступило 29 октября 2017 г.

С.-Петербургский
государственный университет
телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича
пр. Большевиков д. 22, к. 1,
193232, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mikelytaev@gmail.com