Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

А. М. Будылин , Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

§1. Введение

Дифракционный подход в задачах квантового рассеяния нескольких тел был предложен ранее в работах [1, 2] для системы трех одномерных нейтральных квантовых частиц и развит позднее в работах [5–8] для систем нескольких одномерных и трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц. В данной работе мы собираемся рассмотреть в рамках того же дифракционного подхода задачу рассеяния трех трехмерных заряженных квантовых частиц при наличии парных потенциалов кулоновского притяжения. Первые шаги в этом направлении уже были сделаны в работе [7]. Отметим, что именно этот случай является наиболее интересным и богатым с физической точки зрения, поскольку связан в частности с перекластеризацией заряженных квантовых комплексов. В то же время по ряду причин задача продолжает оставаться до конца не исследованной несмотря на значительные усилия, предпринимавшиеся с середины прошлого века в этом направлении. При этом одной из главных трудностей наряду с медленным убыванием парных потенциалов, и, тем самым, со сложностью построения равномерного по всем угловым переменным в конфигурационном пространстве асимптотического граничного условия, продолжает оставаться корректный учет бесконечного числа уровней возбуждения в парных подсистемах. С математической точки зрения это связано с наличием точки накопления дискретного спектра оператора Шредингера, отвечающего парным подсистемам с потенциалом кулоновского притяжения.

Ключевые слова: квантовая задача рассеяния трех тел, кулоновские парные потенциалы, точка накопления дискретного спектра, асимптотики собственных функций.

Я. К. благодарит Российский Национальный Фонд за поддержку в рамках гранта РНФ 17-11-01003.

Проблема заключается не столько в проведении самих квантовых расчетов характеристик рассеяния в таких многочастичных системах. Это безусловно делается, например, с помощью ограничения количества учитываемых при рассеянии связанных состояний в подсистемах с притяжением или с помощью выбора некоторого (большого) набора базисных функций, хорошо описывающих экспериментальные данные в некотором диапазоне энергий. Трудности связаны с определением набора критериев, которые могли бы регулировать точность проведения таких расчетов в различных диапазонах энергий (или в зависимости от энергии). Это, в свою очередь, зависит от количества уровней возбуждения в парных подсистемах, которое должно быть учтено для расчета характеристик рассеяяния с требуемой точностью в зависимости от энергии системы.

В данной работе мы предлагаем метод, позволяющий учитывать явно определенный набор уровней возбуждения в парных подсистемах (набор определяется начальными даными задачи рассеяния). При этом остальные уровни возбуждения учитываются в рамках совокупного вклада при построении асимптотики собственных функций непрерывного спектра трехчастичного оператора Шредингера. Построения проведены в рамках упомянутого выше диффракционного подхода.

§2. Описание модели

Первоначальное конфигурационное пространство системы есть $\mathbf{R}^9$. Остановив движение центра инерции, приходим к системе на конфигурационном пространстве

$$\Gamma = \big\{\mathbf{z} : \ \mathbf{z} \in \mathbf{R}^9,\ \mathbf{z} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\},\ \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 = 0\big\}.$$

На Γ имеется скалярное произведение $\langle \mathbf{z}, \mathbf{z}' \rangle$, индуцированное скалярным произведением на $\mathbf{R}^9$. Система на Γ описывается уравнением

$$H\Psi = \lambda\Psi, \quad \Psi = \Psi(\mathbf{z}) \in \mathbf{C}, \qquad \mathbf{z} \in \Gamma,$$
$$H = -\Delta_{\mathbf{z}} + V(\mathbf{z}), \quad V(\mathbf{z}) = v_1(\mathbf{x}_1) + v_2(\mathbf{x}_2) + v_3(\mathbf{x}_3), \quad \mathbf{x}_j \in \mathbf{R}^3.$$

Здесь $\Delta_{\mathbf{z}}$ – оператор Лапласа на Γ,

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_3 - \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_3), \quad \mathbf{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_1).$$

Ясно, что $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 = 0$. Введем также $\mathbf{y}_j = \sqrt{\frac{3}{2}}\mathbf{z}_j$. Нетрудно убедиться, что на Γ справедливо уравнение $\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2 + \mathbf{y}_3 = 0$, а также

$$\mathbf{z}^2 = \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{y}_j, \mathbf{y}_j \rangle, \quad j = 1, 2, 3, \quad \Delta_{\mathbf{z}} = \Delta_{\mathbf{x}} + \Delta_{\mathbf{y}}.$$

Вместе с $\mathbf{z} \in \Gamma$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^3$ будем рассматривать двойственные переменные, импульсы $\mathbf{q} \in \Gamma$, $\mathbf{k}, \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3$. Мы будем считать, что

$$v_l(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_l}{x}, \quad \alpha_l = \sqrt{2\mu_{ij}} Z_i Z_j,$$

где $\{ijl\}$ – фиксированная четная перестиновка чисел $1, 2, 3$, $\mu_{ij} = \frac{m_i m_j}{m_i + m_j}$ – приведенная масса в паре частиц с индексами i, j, Z_i Z_j – заряды i-й и j-й частиц. Возможно также обобщение на случай

$$v_l(\mathbf{x}) = \frac{\alpha_l}{x} + w_l(\mathbf{x}), \quad x w_l(\mathbf{x}) \to 0, \quad x \to \infty, \quad l = 1, 2, 3.$$

Мы будем полагать массы частиц одинаковыми, однако заряды будем рассматривать произвольными по модулю и разного знака.

§3. Модифицированное ВВК-приближение

Плоская волна при асимптотическом (при $z \to \infty$) описании функции $\Psi(\mathbf{z}, \mathbf{q})$ вне малых угловых окрестностей областей $\sigma_j = \{\mathbf{z} \in \Gamma, \mathbf{x}_j = 0\}$, $j = 1, 2, 3$ (в дальнейшем мы будем называть эти области экранами), должна быть заменена ВВК-приближением $\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q})$. Это приближение было исследовано в [11], см. также [12], хотя использовалось и ранее (см., например, [13, 14]). Оно имеет вид:

$$\Psi^{\text{ВВК}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z}, \mathbf{q} \rangle} D(\mathbf{x}_1, \mathbf{k}_1) D(\mathbf{x}_2, \mathbf{k}_2) D(\mathbf{x}_3, \mathbf{k}_3). \tag{1}$$

Здесь

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \Phi(-i\eta, 1, ixk - i\langle \mathbf{x}, \mathbf{k} \rangle), \ \mathbf{x}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^3, \quad \eta = \frac{\alpha}{2k}, \tag{2}$$

Φ – вырожденная гипергеометрическая функция, см. [16]. Постоянная $N_0 = \prod_{j=1}^{3} N_c^{(j)}$ является произведением нормировочных постоянных трех двухчастичных состояний рассеяния

$$N_c^{(j)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\pi \eta_j}{2}} \Gamma(1 + i\eta_j).$$

Переменные $\mathbf{k}_j$, $\mathbf{p}_j$; $j = 1, 2, 3$ являются соответственно сопряженными по Фурье якобиевым переменным $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_j$.

Стоит отметить, что функция

$$\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}) = N_c e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{k}\rangle} D(\mathbf{x},\mathbf{k}) \tag{3}$$

удовлетворяет уравнению

$$-\Delta_{\mathbf{x}}\psi_c + \frac{\alpha}{x}\psi_c = k^2\psi_c. \tag{4}$$

Решение ψ_c является точным решением задачи рассеяния квантовой частицы на кулоновском потенциале. В дальнейшем для удобства мы будем пользоваться еще одним кратким обозначением

$$\Phi_i \equiv \Phi(-i\eta_i, 1, ix_ik_i - i\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{k}_i\rangle), \quad i = 1,2,3. \tag{5}$$

Заметим также, что ВВК приближение справедливо лишь в области, в которой обе якобиевы координаты, отвечающие выбранной парной подсистеме, оказываются велики. Точнее, [5, 8, 11, 12] мы введем область

$$\Omega_\mu = \bigcup_{j=1}^{3} \Omega_j, \tag{6}$$

$$\Omega_j = \left\{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j), \quad y_j^\mu < x_j < y_j, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1, \ y_j \to \infty\right\} \tag{7}$$

Отметим, что классическое ВВК-приближение перестает быть справедливым в асимптотических (при $r = \sqrt{x_j^2 + y_j^2} \to \infty, \quad j = 1,2,3$) областях конфигурационного пространства, в которых якобиева координата $\mathbf{x}_j, \quad j = 1,2,3$ становится ограниченной. Основной результат работ [5, 8–10] заключается как раз в построении непрерывного продолжения ВВК приближения в асимптотические области конфигурационного пространства при ограниченных и в том числе малых значениях якобиевой координаты $\mathbf{x}_j, \quad j = 1,2,3$.

Несмотря на то, что эти результаты были получены в предположении одинаковости знака заряда всех частиц входящих в систему, то есть только для случая парных потенцаалов отталкивания, область их применимости значительно шире. Рассмотрим для определенности асимптотическую область конфигурационного пространства Ω_1, введенную в уравнении (7). Следуя результатам работы [8], легко видеть, что и в случае парных кулоновских потенциалов притяжения предложенная модификация ВВК-приближения позволяет получить невязку уравнения Шредингера, убывающую заведомо быстрее потенциала.

Модификация состоит в следующем: в области Ω_1 выражение (1) заменяется выражением

$$\Psi^{\text{BBK}}_{\text{mod}}(\mathbf{z},\mathbf{q})|_{\Omega_1} \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z},\mathbf{q}\rangle} D(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1) D(\widetilde{\mathbf{x}}_2,\mathbf{k}_2) D(\widetilde{\mathbf{x}}_3,\mathbf{k}_3). \tag{8}$$

При этом большие ($y_1 \to \infty$) парные координаты

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_3 = -\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1$$

в выражениях $D(\mathbf{x}_2,\mathbf{k}_2)$ и $D(\mathbf{x}_3,\mathbf{k}_3)$ в уравнении (1) заменяются выражениями

$$\widetilde{\mathbf{x}_2} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1 \quad \text{и} \quad \widetilde{\mathbf{x}_3} = -\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y}_1, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{v}_1 = -i\frac{\nabla_{\mathbf{k}_1}\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)}{\psi_c(\mathbf{x}_1,\mathbf{k}_1)}. \tag{10}$$

Аналогичная замена должна быть произведена в каждой асимптотической области Ω_j, где структура модифицированного ВВК-приближения имеет вид

$$\Psi^{\text{BBK}}_{\text{mod}}(\mathbf{z},\mathbf{q})|_{\Omega_j} \sim N_0 e^{i\langle \mathbf{z},\mathbf{q}\rangle} D(\mathbf{x}_j,\mathbf{k}_j) D(\widetilde{\mathbf{x}}_m,\mathbf{k}_m) D(\widetilde{\mathbf{x}}_n,\mathbf{k}_n). \tag{11}$$

Здесь (j,m,n) является четной перестановкой индексов $1,2,3$. Модификация векторов $\mathbf{x}_m \to \widetilde{\mathbf{x}_m}$, $\mathbf{x}_n \to \widetilde{\mathbf{x}}_n$ связана с заменой в выражениях

$$\mathbf{x}_m = c_{jm}\mathbf{x}_j + s_{jm}\mathbf{y}_j, \quad \mathbf{x}_n = c_{jn}\mathbf{x}_j + s_{jn}\mathbf{y}_j \tag{12}$$

вектора $\mathbf{x}_j$ на аналитическое выражение

$$\mathbf{x}_j \to -i\frac{\nabla_{\mathbf{k}_j}\psi_c(\mathbf{x}_j,\mathbf{k}_j)}{\psi_c(\mathbf{x}_j,\mathbf{k}_j)}. \tag{13}$$

Коэффициенты c_{jm}, s_{jm}, c_{jn}, s_{jn} имеют смысл коэффициентов преобразований поворота, связывающих вектора в различных якобиевых парах координат.

Отметим, что сама структура подстановки аналитической функции от парного решения уравнения Шредингера вместо координаты в другом решении позволяет сделать предположение об эффективном учете в модифицированном приближении $\Psi^{\text{BBK}}_{\text{mod}}$ двукратных перерассеяний, вопрос о которых поднимался, например, в [12] и является принципиальным для возможности проведения численных расчетов. При этом скорость убывания невязки выражения $\Psi^{\text{BBK}}_{\text{mod}}$ в трехчастичном уравнении Шредингера, полученная в работе [8], подтверждает это предположение.

Случай, который мы собираемся рассматривать в данной работе предполагает наличие в некоторых парных подсистемах (с кулоновским притягивающим парным потенциалом) бесконечного набора уровней возбуждения или, иными словами, бесконечного числа асимптотических каналов рассеяния. Это означает, что влияние таких каналов уже при достаточно больших по модулю значениях парных координат (в парах с притяжением) должно проявиться в структуре трехчастичной собственной функции непрерывного спектра. Нашей целью является установление этой взаимосвязи в рамках дифракционного подхода.

Мы начнем с того, что вновь, как и в случае парных потенциалов отталкивания, воспользуемся идеями "почти разделения переменных".

§4. Асимптотическое почти разделение переменных

Заметим, что в асимптотической "параболической" окрестности каждого экрана $\sigma_j = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) : x_j = 0\}$, $j = 1, 2, 3$ уравнение Шредингера допускает серьезное упрощение, после которого становится возможным разделение переменных. Например, полный потенциал

$$V(\mathbf{z}) = v_1(\mathbf{x}_1) + v_2(\mathbf{x}_2) + v_3(\mathbf{x}_3), \quad v_i(\mathbf{x}_i) = \frac{\alpha_i}{x_i}, \quad i = 1, 2, 3$$

в асимптотической окрестности экрана σ_1 $(y \gg 1)$ упрощается за счет формул

$$\mathbf{x}_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \ \ \mathbf{x}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}, \ \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_1, \ \ \mathbf{y} = \mathbf{y}_1.$$

В окрестности σ_1 при $y \gg 1$, $y \gg x$ справедливо

$$\begin{aligned} &V = V_{\text{sep}} + O\left(\frac{x}{y^2}\right), \quad V_{\text{sep}} = v_1(x_1) + v^{\text{eff}}(y_1), \\ &v^{\text{eff}} = \frac{\alpha_{\text{eff}}}{y_1}, \quad \alpha_{\text{eff}} = 2(\alpha_2 + \alpha_3)/\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{14}$$

(Мы будем в дальнейшем для упрощения опускать индекс 1 у соответствующих Якобиевых координат, поскольку сама процедура согласования приближений будет проводиться в качестве примера в параболической окрестности экрана 1.) Тем самым, первое слагаемое в выражении (14) хорошо описывают потенциал V до тех пор, пока поправка $O\left(\frac{x}{y^2}\right)$ убывает быстрее кулоновского потенциала. Таким образом,

нас интересует асимптотическая область

$$\Omega_1^+ : \{x \le y^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \quad y \to \infty\}. \tag{15}$$

Очевидно, аналогичные утверждения о почти разделении переменных справедливы во всех асимптотических областях

$$\Omega_j^+ : \{x_j \le y_j^\nu, \quad 0 < \nu < 1, \quad y_j \to \infty\} \tag{16}$$

в окрестностях экранов σ_j при $y_j \gg x_j$.

Возвращаясь к области Ω_1^+, отметим, что уравнение с приближенным потенциалом $V_{\rm sep}$ допускает разделение переменных

$$\left[-\Delta_{\mathbf{z}} + v_1(x) + v^{\rm eff}(y)\right] \Psi^{\rm sep} = E\Psi^{\rm sep}.$$

Поскольку мы заинтересованы в ограниченных решениях, для $\Psi^{\rm sep}$ естественно возникает следующее представление

$$\begin{aligned}\Psi^{\rm sep}(\mathbf{z},\mathbf{q}) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}')\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(k'^2 + p'^2 - E) \\ \times R(\mathbf{q},\mathbf{q}') \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{m=-l}^{l} \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_{\rm nlm}(x) Y_l^m(\widehat{\mathbf{x}})\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(p'^2 - \frac{|\alpha_1|^2}{4n^2} - E) \\ \times R_{\rm nlm}(\mathbf{q},\mathbf{p}').\end{aligned} \tag{17}$$

Мы используем здесь обозначения

$$\mathbf{q} = (\mathbf{k},\mathbf{p})^t, \quad \mathbf{q}' = (\mathbf{k}',\mathbf{p}')^t, \quad q^2 = E.$$

При этом $\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k})$ – собственная функция непрерывного спектра двухчастичного оператора Шредингера с потенциалом v_1, $\psi_{\rm nlm}(x)Y_l^m(\widehat{\mathbf{x}})$ – собственная функция дискретного спектра того же оператора (по предположению кулоновский потенциал v_1 является притягивающим), Y_l^m – некоторая сферическая функция, $\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p})$ – собственная функция непрерывного спектра двухчастичного оператора Шредингера с потенциалом $v^{\rm eff}$ (14)

$$\begin{aligned}(-\Delta_{\mathbf{x}} + v_1(x))\,\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}) = k^2\psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}), \\ \left(-\Delta_{\mathbf{y}} + v^{\rm eff}(y)\right)\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}) = p^2\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}).\end{aligned}$$

Функции моментов $R(\mathbf{q},\mathbf{q}')$ и $R_{\rm nlm}(\mathbf{q},\mathbf{p}')$ – некоторые плотности, которые будут определены ниже.

Мы начнем с того, что выберем асимптотические области в конфигурационном пространстве, в которых одновременно справедливо представление для асимптотики собственных функций непрерывного спектра оператора Шредингера, записанное в терминах разделения переменных и работающее вблизи экрана с индексом 1, и ВВК–представление. Введем область

$$\Omega_{\mu\nu} = \left\{ y^\mu < x < y^\nu,\ \frac{1}{2} < \mu < \nu < 1,\ y \to \infty \right\}, \tag{18}$$

которая возникает как пересечение областей Ω_1 (7) и Ω_1^+ (15). В этой области оба приближения $\Psi^{\rm sep}$ и $\Psi^{\rm BBK}_{\rm mod}$ для собственной функции непрерывного спектра оператора Шредингера системы трех частиц оказываются одновременно справедливыми.

В этой области мы собираемся согласовать два упомянутых выше представления. При этом, как будет показано ниже, фиксируется произвол, возникающий при разделении переменных. Этот произвол заключатся в структуре ядер $R(\mathbf{q},\mathbf{q}')$, $R_{\rm nlm}(\mathbf{q},\mathbf{p}')$, а также в структуре сферических функций Y_l^m.

Отметим здесь, что в разложении (17) мы принебрегаем формальным разложением по собственным функциям дискретного спектра двухчастичного оператора Шредингера с потенциалом $v^{\rm eff}$ вследствие специфики параболической области согласования $\Omega_{\mu\nu}$, то есть неравноправности координат $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в этой области (переменная $\mathbf{y}$ может быть сделана неограниченно большой при сихранении условия $x \ll y$). Фактически мы пишем в каждой параболической области спектральное разложение лишь по тем асимптотическим каналам, которые в ней реализуются.

§5. Фиксация "произвола" и производящий интеграл

Для того, чтобы зафиксировать произвол в представлении спектрального разложения $\Psi^{\rm sep}(\mathbf{z},\mathbf{q})$ (17), нам понадобится некоторая конструкция, которую мы будем назыать производящим интегралом.

Суть этой конструкции заключается в том, что мы предьявляем некоторую функцию $g_n(\mathbf{x},\widehat{\omega})$, для которой существует функция R_n $(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\omega})$, такая, что справедливо следующее уравнение

$$\int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\omega} g_n(\mathbf{x},\widehat{\omega}) R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\omega}) = \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=-l}^{l} \psi_{\rm nlm}(x) Y_l^m(\widehat{\mathbf{x}}) R_{\rm nlm}(\mathbf{q},\mathbf{p}'). \tag{19}$$

Мы предъявим здесь явный вид функции $g_n(\mathbf{x}, \widehat{\omega})$

$$g_n(\mathbf{x}, \widehat{\omega}) = e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} \Phi \left(1 - n, 1, \frac{|\alpha|}{2n} x(1 - \langle \widehat{\omega}, \widehat{\mathbf{x}} \rangle)\right). \tag{20}$$

Подставим определенную в уравнении (20) функцию в уравнение (19). Нетрудно видеть, что если мы определим ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \widehat{\omega})$, то в его терминах мы определим ядра $R_{\mathrm{nlm}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}')$, имеющие смысл коэффициентов разложения трехчастичной собственной функции непрерывного спектра оператора Шредингера по собственным функциям дискретного спектра парной подсистемы в представлении типа спектрального разложения (17). Именно, если мы определим радиальную часть собственных функций двухчастичного кулоновского оператора $\psi_{\mathrm{nlm}}(x)$ стандартным образом [17]

$$\psi_{\mathrm{nlm}}(x) = N_{\mathrm{nlm}} e^{-\frac{|\alpha|}{2n}x} x^l \Phi \left(-n + l + 1, 2l + 2, \frac{|\alpha|}{n} x\right),$$

где N_{nlm} – нормировочная постоянная, зависящая только от квантовых чисел, то согласно (19) и (20) мы получим следующие выражения для ядер R_{nlm}:

$$R_{\mathrm{nlm}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}') = \frac{1}{N_{\mathrm{nlm}}} \beta_{nl} \frac{1}{(2l+1)!} (-\frac{|\alpha|}{n})^l \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\omega} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \widehat{\omega}) Y_l^m(\widehat{\omega}). \tag{21}$$

Определив, таким образом, “производящую” функцию $g_n(\mathbf{x}, \widehat{\omega})$, мы заменяем в спектральном разложении тройную бесконечную сумму по трем квантовым числам на однократную сумму и интеграл по единичной сфере. Такое упрощение оказывается весьма существеннум, поскольку позволяет заменить поиск набора из n^2 неизвестных коэффициентов $R_{\mathrm{nlm}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}')$ при каждом фиксированном главном квантовом числе n поиском одной неизвестной функции $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}', \widehat{\omega})$. Мы будем в дальнейшем использовать для “производящей” функции $g_n(\mathbf{x}, \widehat{\omega})$ обозначение $\psi_n^d(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}})$ в знак того, что эта функция содержит информацию о наборе базисных функций дискретного спектра, отвечающих главному квантовому числу n. Мы будем использовать также связь полиномов Лагерра и вырожденной гипергеометрической функции с

целым отрицательным первым аргументом в следующей форме

$$\begin{aligned} \psi_n^d(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}) &= g_n(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}) = e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} L_{n-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{n} x \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \\ \sin^2\theta/2 &= \frac{1-\langle\widehat{\mathbf{k}},\widehat{\mathbf{x}}\rangle}{2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $L_n(y)$ – полиномы Лагерра.

Таким образом, представление для функции $\Psi^{\rm sep}(\mathbf{z},\mathbf{q})$ (17) в новых терминах принимает вид

$$\begin{aligned} \Psi^{\rm sep}(\mathbf{z},\mathbf{q}) =& \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}')\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(k'^2+p'^2-E)R(\mathbf{q},\mathbf{q}') \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_n^d(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}')\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(p'^2-\frac{\alpha_1^2}{4n^2}-E)R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \tag{23}$$

Теперь мы готовы перейти к процедуре восстановления ядер $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\mathbf{k}}')$. Мы будем интересоваться лишь большими значениями главного квантового числа $n \geq M \gg 1$, то есть окрестностью точки накопления дискретного кулоновского спектра оператора Шредингера, отвечающего подсистеме с индексом 1. Здесь M – некоторое большое целое число, определяемое начальными данными задачи рассеяния.

§6. Восстановление ядер $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\mathbf{k}}')$ при $n \geq M \gg 1$

Для восстановления ядер $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\mathbf{k}}')$ мы воспользуемся процедурой согласования приближений $\Psi_{\rm mod}^{\rm BBK}$ (1) и $\Psi^{\rm sep}$ (23) для собственной функции непрерывного спектра трехчастичного оператора в области $\Omega_{\mu\nu}$ (18), где оба приближения справедливы.

Нам понадобится предположение о "несингулярном поведении", интегрируемости собственной функции непрерывного спектра трехчастичного оператора $\Psi_c(\mathbf{z},\mathbf{q})$ в области

$$x < \infty, \quad y \gg 1.$$

Рассмотрим представление для $\Psi_c(\mathbf{z},\mathbf{q})$ в виде спектрального разложения в асимптотической области Ω_1^+ (15)

$$\Psi_c(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{k}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}' \psi_c(\mathbf{x},\mathbf{k}')\psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(k'^2+p'^2-E)R(\mathbf{q},\mathbf{q}')$$

$$+\sum_{n'=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{p}'\psi_{n'}^{d}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}')\psi_c^{\mathrm{eff}}(\mathbf{y},\mathbf{p}')\delta(p'^2-\frac{\alpha_1^2}{4n'^2}-E) \\ \times R_{n'}(\mathbf{q},\mathbf{p}',\widehat{\mathbf{k}}'), \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Omega_1^+. \tag{24}$$

Домножим левую и правую часть равенства (24) на $\psi_n^{d\,*}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}'')$ и проинтегрируем по переменной $\mathbf{x}$ в $\mathbf{R}^3$. Мы воспользуемся ортогональностью собственных функций двухчастичного оператора $h=-\Delta_{\mathbf{x}}+\frac{\alpha_1}{x}$, отвечающих различным спектральным точкам.

Разобьем область изменения радиальной переменной x, $0\le x<\infty$ на три части

$$\begin{array}{llll} D_I: & 0\le x\le y^{\mu}, & \frac{1}{2}<\mu<1, & y\gg 1,\\ D_{II}: & y^{\mu}\le x\le y^{\nu}, & \mu<\nu<1, & y\gg 1,\\ D_{III}: & y^{\nu}\le x<\infty, & & y\gg 1. \end{array}$$

Отметим, что все функции $\psi_n^d(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}})$ (22) экспоненциально затухают на бесконечности для любого фиксированного n. В то же время показатель экспоненты (иными словами, скорость затухания) зависит от главного квантового числа как $\frac{1}{n}$, $n\ge M\gg 1$, то есть для больших значений главного квантового числа затухание происходит лишь при асимптотически больших значениях x. Отсюда можно сделать вывод, что область D_{III} не дает вклада в интегрирование уравнения (24) с функциями $\psi_n^{d\,*}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}'')$. Определим отношение объемов областей D_{II} и D_I:

$$\frac{V_{D_{II}}}{V_{D_I}}=\frac{y^{\nu}-y^{\mu}}{y^{\mu}}=y^{\nu-\mu}\left(1-O\left(\frac{1}{y^{\nu-\mu}}\right)\right)\xrightarrow[y\to\infty]{}\infty.$$

В совокупности с предположением о несингулярном характере функции $\Psi_c(\mathbf{X},\mathbf{P})$ во всей области интегрирования указанные выше рассуждения приводят к выводу о том, что основной и определяющий вклад в обсуждаемое скалярное произведение

$$\langle\Psi_c,\psi_n^d\rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}} \tag{25}$$

вносит именно область D_{II}. Отметим, что

$$\Omega_1^+|_{D_{II}}=\Omega_{\mu\nu}.$$

В свою очередь, на области $\Omega_{\mu\nu}$ функция Ψ_c хорошо описывается ВВК-приближением. Последнее заключение дает нам право переопределить

скалярное произведение (25)

$$\langle \Psi_c, \psi_n^d \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}} \sim \langle \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}, \psi_n^d \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}}. \tag{26}$$

здесь обозначение $\widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}$ введено для функции $\Psi^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}$, продолженной регулярным образом в область ограниченных значений переменной $\mathbf{x}$ с учетом вклада дискретного спектра. Это означает, что уравнение (24) ведет к выражению

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}, \psi_n^d \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') &\sim \frac{1}{2\sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}} \\ &\times \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}}'_n \Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') \psi_c^{\mathrm{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}'), \end{aligned} \tag{27}$$

$$p'_n = \sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}, \qquad n \geq M \gg 1.$$

Мы использовали здесь обозначение

$$\Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') \equiv \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \psi_n^d(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}') \psi_n^{d\,*}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}'') \tag{28}$$

Полученное уравнение (27) представляет из себя интегральное уравнение для ядра R_n. Для решения этого уравнения нам нужно вначале определить объект Σ_n, который мы будем называть в дальнейшем нормировочным интегралом.

6.1. Нормировочный интеграл. Таким образом, мы приходим к вычислению нормировочного интеграла в соответствии с выражениями (28) и (22)

$$\begin{aligned}\Sigma_m(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') &= \int\limits_{\mathbf{R}^3} d\mathbf{x} \psi_m^d(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}') \psi_m^{d\,*}(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}'') \\ &= \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{x}} \int\limits_0^\infty dx x^2 e^{-\frac{|\alpha_1|}{m}x} L_{m-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{m} x \sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) \\ &\qquad \times L_{m-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{m} x \sin^2\frac{\theta}{2}\right), \quad m \gg 1.\end{aligned} \tag{29}$$

Здесь использованы обозначения $\cos\widetilde{\theta} = \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}'' \rangle, \quad \cos\theta = \langle \widehat{\mathbf{x}}, \widehat{\mathbf{k}}' \rangle$.

После замены переменной $t = \frac{|\alpha_1|}{m}x$ уравнение (29) сводится к следующему виду

$$\Sigma_m(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') = \frac{m^3}{|\alpha_1|^3} \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{x}} \int\limits_0^\infty dt t^2 e^{-t} L_{m-1}\left(t \sin^2 \frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) L_{m-1}\left(t \sin^2 \frac{\theta}{2}\right), \quad m \gg 1. \quad (30)$$

Для вычисления интеграла по полуоси в уравнении (30) воспользуемся асимптотикой полинома Лагерра $L_n(x)$ по значку n [19]. В зависимости от значений аргумента x выделяется четыре режима поведения такой асимптотики: окрестность нуля, область колебаний, окрестность точки перехода

$$\upsilon = 4n + 2$$

и область монотонности. Рассмотрим вклад области колебаний в интеграл (30).

6.1.1. Режимы поведения асимптотики по значку полиномов Лагерра. Область колебаний. Следуя работе [19] в области колебаний $0 < x < \upsilon = 4n + 2$ введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} x &= \upsilon \cos^2 \theta_*, \quad 0 < \theta_* < \frac{\pi}{2}, \\ 4\Theta &= \upsilon(2\theta_* - \sin 2\theta_*) + \pi. \end{aligned} \quad (31)$$

При фиксированном θ_* Трикоми доказал, что справедливо разложение

$$\begin{aligned} e^{-\frac{x}{2}} L_n(x) &= 2(-1)^n (\pi \upsilon \sin 2\theta_*)^{-1/2} \\ &\times \left[\sum_{m=0}^{K-1} A_m(\theta_*) \left(\frac{\upsilon}{4} \sin 2\theta_*\right)^{-m} \sin\left(\Theta + \frac{3m\pi}{2}\right) + O(n^{-K})\right], \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$A_0(\theta_*) = 1, \quad A_1(\theta_*) = \frac{1}{12}\left[\frac{5}{4\sin^2\theta_*} - \sin^2\theta_* - 1\right].$$

В терминах обозначений (31)

$$\sin 2\theta_* = 2 \sin\theta_* \cos\theta_* = 2\left(\frac{x}{\upsilon}\right)^{1/2} \sqrt{1 - \frac{x}{\upsilon}}.$$

При этом старший член асимптотического ряда (32) принимает вид

$$e^{-\frac{x}{2}}L_n(x) = 2(-1)^n(2\pi\upsilon)^{-1/2}\left(\frac{x}{\upsilon}\right)^{-1/4}\left(1-\frac{x}{\upsilon}\right)^{-1/4} \times\left(\sin\left(\frac{\upsilon\theta_*}{2}-\frac{\upsilon}{4}\sin 2\theta_*+\frac{\pi}{4}\right)+O(1/\upsilon)\right). \quad (33)$$

В наших расчетах мы ограничимся приближением (33).

Возвращаясь к нормировочному интегралу (30), мы положим $n = m-1 \gg 1$ и рассмотрим асимптотику выражения вида

$$\begin{aligned} e^{-t}L_n\left(t\sin^2\frac{\theta}{2}\right)L_n\left(t\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) &\sim \frac{1}{\pi\sqrt{\upsilon t}}\frac{e^{-t\left(1-\frac{1}{2}(\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2})\right)}}{\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\widetilde{\theta}}{2}}} \\ &\times\left(1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/4}\left(1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right)^{-1/4} \\ &\times\left\{\cos\left(\frac{\upsilon}{2}(\theta_*-\widetilde{\theta}_*)-\frac{\upsilon}{4}(\sin 2\theta_*-\sin 2\widetilde{\theta}_*)\right)\right. \\ &\left.-\cos\left(\frac{\upsilon}{2}(\theta_*+\widetilde{\theta}_*)-\frac{\upsilon}{4}(\sin 2\theta_*+\sin 2\widetilde{\theta}_*)+\frac{\pi}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Мы пользуемся здесь обозначениями

$$\theta_* = \arccos\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad \widetilde{\theta}_* = \arccos\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sin\frac{\widetilde{\theta}}{2}.$$

Таким образом, нормировочный интеграл (30) принимает вид

$$\begin{aligned} \Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}',\widehat{\mathbf{k}}'') &\sim \frac{2^6n^3}{\pi\sqrt{\upsilon}|\alpha_1|^3}\int\limits_{\Delta}^{\upsilon-\Delta}dt t^{3/2}\int\limits_{\mathbf{S}^2}d\widehat{\mathbf{x}}e^{-t\left(1-\frac{1}{2}(\sin^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2})\right)} \\ &\times\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\widetilde{\theta}}{2}}}\left(1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{-1/4}\left(1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right)^{-1/4} \quad (34) \\ &\times\left\{\cos\left(\frac{\upsilon}{4}\left(2(\theta_*-\widetilde{\theta}_*)-(\sin 2\theta_*-\sin 2\widetilde{\theta}_*)\right)\right)\right. \\ &\left.+\sin\left(\frac{\upsilon}{4}\left(2(\theta_*+\widetilde{\theta}_*)-(\sin 2\theta_*+\sin 2\widetilde{\theta}_*)\right)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Здесь параметр Δ в пределах интегрирования связан с определением пределов области колебаний: $\Delta = O(\upsilon^{\varrho})$, $0 < \varrho < \frac{1}{3}$. В декартовой системе координат (x, y, z) единичный вектор $\widehat{\mathbf{k}}''$ направлен вдоль оси

z, единичный вектор $\widehat{\mathbf{x}}$ характеризуется парой углов $(\theta,\ \varphi)$ в соответствующей сферической системе координат. Единичный вектор $\widehat{\mathbf{k}}'$ характеризуется парой углов $(\theta_{k'},\ \varphi_{k'})$. При этом

$$\cos\widetilde{\theta} = \sin\theta\sin\theta_{k'}\cos(\varphi-\varphi_{k'}) + \cos\theta\cos\theta_{k'}, \tag{35}$$

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \theta_{k'} \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \varphi_{k'} \le 2\pi,$$

Рассмотрим интеграл по угловым переменным (интеграл по $d\widehat{\mathbf{x}}$) как интеграл, зависящий от внешней переменной t как от параметра. Рассмотрим аргумент синуса, являющийся множителем при большом параметре $\frac{\upsilon}{4}$ или, иначе говоря, фазовую функцию

$$\begin{aligned} S(\theta,\varphi) = {} & 2\arccos\left(\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sin\frac{\theta}{2}\right) + 2\arccos\left(\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sin\frac{\widetilde{\theta}}{2}\right) \\ & - 2\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sqrt{1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\theta}{2}}\sin\frac{\theta}{2} - 2\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}\sqrt{1-\frac{t}{\upsilon}\sin^2\frac{\widetilde{\theta}}{2}}\sin\frac{\widetilde{\theta}}{2}. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что при малых аргументах $(0 < \frac{t}{\upsilon} < 1)$ функция arccos ведет себя следующим образом

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{t}{\upsilon}}f\right) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{\frac{t}{\upsilon}}f + O\left(\left(\frac{t}{\upsilon}\right)^{3/2} f^{3/2}\right).$$

Таким образом, зависящая от углов функция в аргументе синуса и косинуса умножается на большой параметр $\sqrt{\upsilon t}$, где

$$\Delta < t < \upsilon - \Delta, \quad \Delta = O(\upsilon^{\varrho}). \tag{37}$$

В то же время зависящая от углов функция в убывающей экспоненте умножается на параметр t. Очевидно, для того, чтобы большие параметры в показателях осциллирующей и убывающей экспонент как коэффициенты при выражениях, зависящих от угловых переменных, оказались равными (и в интеграле по угловым переменным возник бы единый большой параметр), мы должны потребовать

$$t = O(\upsilon), \quad \upsilon \to \infty. \tag{38}$$

Это условие, однако, как следует из структуры угловой функции в показателе убывающей экспоненты в выражении (34) - неотрицательная и обращающаяся в ноль только в точке на плоскости (θ,φ), определяемой условием

$$\theta = \widetilde{\theta} = \pi \tag{39}$$

- может реализовываться только внутри сколь угодно малой окрестности точки, определяемой условием (39).

В свою очередь, условие (39) в точке может реализоваться только при выполнении дополнительного условия уже на внешние параметры

$$\widehat{\mathbf{k}}' = \widehat{\mathbf{k}}''.$$

В противном случае сходимость внешнего интеграла по переменной t в выражении (34) наступит значительно раньше, чем начнет выполняться условие (38) вследствие экспоненциального убывания подынтегрального выражения.

Отметим также, что в исходном представлении нормировочного интеграла (30) точка (39) в угловом подпространстве заведомо не является сингулярной для любого значения индекса m. Таким образом, выделим сколь угодно малую окрестность точки, определяемой условием (39), и будем понимать выражение (34) как интеграл по внешности этой окрестности там, где это потребуется.

Мы пришли к выводу, что большой параметр в интеграле по угловым переменным в выражении (34) содержится только в быстро осциллирующих функциях. Исходя из этих соображений, вычислим этот интеграл:

$$\Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') \sim \mathrm{Im}\left\{ \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int\limits_0^1 ds s e^{-4ns\sin^2\frac{\theta_{k'}}{4}} \right.$$
$$\left. \times \frac{e^{inS(\theta_0,\varphi_0)+i\frac{\pi}{2}}}{\cos\frac{\theta_{k'}}{4}\sqrt{\cos\frac{\theta_{k'}}{2}}\sqrt{1-s\cos^2\frac{\theta_{k'}}{4}}\sqrt{1-s\cos\frac{\theta_{k'}}{2}}} \right\}. \quad (40)$$

Возвращаясь к уравнению (27), мы можем теперь в силу возникших упрощений перейти к следующему шагу и вычислить интеграл по единичной сфере $d\widehat{\mathbf{k}}'$:

$$T_n(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) \equiv \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}'). \quad (41)$$

Для этого перейдем к переменной α, $\cos\alpha = \langle \widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'' \rangle$:

$$T_n(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \frac{d\alpha \sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{4}\sqrt{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$
$$\times \int\limits_0^1 dss \frac{\cos(nS(\theta_0, \varphi_0)) e^{-4ns\sin^2\frac{\alpha}{4}}}{\sqrt{1 - s\cos^2\frac{\alpha}{4}}\sqrt{1 - s\cos\frac{\alpha}{2}}} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}'), \tag{42}$$
$$\widehat{\mathbf{k}}' = (\alpha, \varphi),$$

где

$$S(\theta_0, \varphi_0) = 4\arccos\left(\sqrt{s}\cos\frac{\alpha}{4}\right) - 4\sqrt{s}\sqrt{1 - s\cos^2\frac{\alpha}{4}}\cos\frac{\alpha}{4}.$$

Отметим, что вычисление интеграла (42) связано с корректным учетом вклада окрестности особой точки $(0, 1)$ на плоскости (α, s). Для этого потребуется переход к полярной системе координат в этой окрестности, которая, как будет показано ниже и вносит основной вклад в интеграл.

6.2. Вычисление нормировочного интеграла. Основная идея следующего шага заключается в том, чтобы ввести наиболее удобным образом новые переменные на плоскости (α, s) так, чтобы описать вклад в интеграл окрестности этой точки. С помощью замены

$$s = 1 - \frac{\zeta^2}{16}, \qquad 0 \le \zeta \le 4 \tag{43}$$

мы переведем в начало координат $(0, 0)$ на плоскости (α, ζ) точку $(0, 1)$ на плоскости (α, s) и введем полярную систему координат в единичной окрестности точки $(0, 0)$

$$\alpha = \rho\sin\omega, \qquad \zeta = \rho\cos\omega, \tag{44}$$

$$0 \le \rho \le 1, \quad 0 \le \omega \le \frac{\pi}{2}.$$

Нетрудно показать, что интеграл по внешности указанной окрестности точки $(0, 0)$ будет вносить в выражение (42) вклад следующего порядка малости. Отметим также, что при $\rho \ll 1$ выражение (42)

имеет вид

$$T_n^\delta(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}_n', \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\delta} \rho d\rho$$
$$\times \int\limits_0^{\pi/2} d\omega \sin\omega \cos\omega \left(1 - \frac{\rho^2}{16}\cos^2\omega\right) \tag{45}$$
$$\times \frac{\cos(n\rho^3 A(\omega))}{\sqrt{1+\sin^2\omega}} \exp\left\{-n\rho^2 \sin^2\omega (1 - \frac{\rho^2}{16}\cos^2\omega)\right\}$$
$$\times \widetilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}_n', \rho\sin\omega, \varphi),$$

где $A(\omega) = \frac{1}{32}(1 - \frac{1}{2}\sin^2\omega\cos^2\omega)$. Два последних аргумента функции $\widetilde{R}_n$ соответствуют угловым переменным вектора $\widehat{\mathbf{k}}'$ в сферической системе координат, в которой ноль первой угловой переменной отвечает коллиниарности векторов $\widehat{\mathbf{k}}'$ и $\widehat{\mathbf{k}}''$. Значок $\widetilde{}$ в обозначении $\widetilde{R}_n$ связан с переходом к угловым переменным, характеризующим третью векторную переменную функции R_n.

Мы не будем проводить указанную в (44) замену переменных явно, но проведем указанные выкладки в общем виде, переформулировав выражение (42) в следующей форме:

$$T_n(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}_n', \mathbf{q}) = \frac{2^4 n^4}{|\alpha_1|^3} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} du$$
$$\times \int\limits_0^{1} dv e^{-4n\beta uv f(u,v)} \cos(4nu^{3/2} g(u,v)) F(u,v). \tag{46}$$

Здесь

$$u = \rho^2, \qquad v = \sin^2\omega, \qquad \beta = \frac{1}{16}. \tag{47}$$

Использованы также обозначения

$$f(u,v) = (1 + \phi(u,v))(1 - \beta u(1-v)), \quad \phi(u,v) \underset{u,v\to 0}{=} O(uv),$$

$$g(u,v) = \frac{13}{6} + v(1-v) + \sigma(u,v), \quad \sigma(u,v) \underset{u\to 0}{=} O(u^{1/2}).$$

Функции $F(u,v)$, $f(u,v)$ и $g(u,v)$ возникают в результате двух последовательных замен переменных (43)–(44) и (47) в выражении (42). Функции $F(u,v)$, $\phi(u,v)$ и $\sigma(u,v)$ – ограниченные, дважды непрерывно дифференцируемые функции своих аргументов. Мы полагаем здесь, что функция $F(u,v)$ содежит также ядро $\widetilde{R}_n$,

$$F(u,v) = \widehat{F}(u,v)\widetilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \sqrt{uv}, \varphi), \tag{48}$$

которое в свою очередь обладает ограниченными производными по всем переменным интегрирования. При этом выражение $\widehat{F}(u,v)$ возникает собственно в связи с заменой переменных в ядре в интеграле (42). Как уже было сказано выше, два последних аргумента функции $\widetilde{R}_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \sqrt{uv}, \varphi)$ соответствуют угловым переменным вектора $\widehat{\mathbf{k}}'$ в сферической системе координат, в которой ноль первой угловой переменной отвечает коллиниарности векторов $\widehat{\mathbf{k}}'$ и $\widehat{\mathbf{k}}''$.

Опуская подробные вычисления, приведем лишь результат. Структура выражения $T_n(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q})$ принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} T_n(\widehat{\mathbf{k}}'', \mathbf{p}'_n, \mathbf{q}) &= \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' \Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}') \\ &= n^3(B_2 \ln n + B_1 + o(1)) \frac{2^5\pi}{|\alpha_1|^3} R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}''), \end{aligned} \tag{49}$$

где B_1, B_2 – некоторые числа, явный вид которых мы здесь не приводим. Это означает, что уравнение (27) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}, \psi^d_n \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') \sim n^3 \frac{(B_2 \ln n + B_1)}{2\sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}} \frac{2^5\pi}{|\alpha_1|^3} \\ \times \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}}'_n \psi^{\mathrm{eff}}_c(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n) R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}''). \end{aligned} \tag{50}$$

$$p'_n = \sqrt{E + \frac{\alpha_1^2}{4n^2}}, \quad n \geq M \gg 1.$$

Уравнение (49) демонстрирует эффективно сингулярную по угловой переменной $\widehat{\mathbf{k}}'$ структуру нормировочного интеграла (29). Иными словами, мы можем сказать, что

$$\Sigma_n(\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}'') \sim \delta(\widehat{\mathbf{k}}'', \widehat{\mathbf{k}}'). \tag{51}$$

Результат этот на первый взгляд является удивительным, поскольку в выражении (29) мы нормируем функции дискретного спектра. Объяснение этого факта связано с тем условием, что мы нормируем в выражении (29) функции из спектральной окрестности точки накопления дискретного спектра двухчастичного кулоновского оператора Шредингера ($n \gg 1$). Следовательно, в спектральном смысле эти функции близки функциям непрерывного спектра, которые нормированы именно на δ-функцию и являются обобщенными функциями угловой переменной.

Рассмотрим теперь поведение левой части уравнения (50)

6.3. Поведение свободного члена уравнения для ядра R_n. Мы исследуем здесь асимптотику скалярного произведения

$$\langle \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}, \psi^d_n \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') \tag{52}$$

при больших значениях переменной $y \gg 1$ и больших значениях индекса $n \gg 1$.

Вновь, опукая подробные выкладки, приведем лишь результат. Структура асимптотического выражения (52) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\langle \widetilde{\Psi}^{\mathrm{BBK}}_{\mathrm{mod}}, \psi^d_n \rangle|_{\mathbf{R}^3_{\mathbf{x}}}(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') \\ \sim iB_0^{\mathrm{in}}(\mathbf{q})\frac{2\pi}{iyp}\delta(\widehat{\mathbf{y}}, -\widehat{\mathbf{p}})\frac{1}{y}e^{-iyp+i\omega\ln y}Z^{\mathrm{in}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') \\ - iB_0^{\mathrm{out}}(\mathbf{q})\frac{2\pi}{iyp}\delta(\widehat{\mathbf{y}}, \widehat{\mathbf{p}})\frac{1}{y}e^{iyp+i\omega\ln y}Z^{\mathrm{out}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'').\end{aligned} \tag{53}$$

Здесь

$$\begin{aligned}Z^{\mathrm{in(out)}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') = -\frac{N_c^{(1)}\Gamma(3+i\eta)}{k^{4+i\eta}}\Big[e^{\frac{\pi\eta}{2}}\langle \widehat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\mathrm{in(out)}}(\mathbf{q})\rangle\Phi \\ \times\left(3+i\eta, 1, i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1+\langle \widehat{\mathbf{k}}'', \widehat{\mathbf{k}}\rangle)\right) - e^{-\frac{\pi\eta}{2}}H^{\mathrm{in(out)}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'')\Big],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{in(out)}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'') \equiv \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{x}}\langle \widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{L}_{\mathrm{in,(out)}}(\mathbf{q})\rangle \\ \times\Phi\left(3+i\eta, 1, -i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1-\langle \widehat{\mathbf{k}}'', \widehat{\mathbf{x}}\rangle)\right)s_c(\widehat{\mathbf{x}}, \mathbf{k}).\end{aligned}$$

Здесь использованы обозначения

$$B_0^{\rm in}(\mathbf{q}) = A_0\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)e^{-\frac{\pi\omega}{2}}(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3}) \\ \times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{\rm in}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\eta_2\frac{\widehat{\mathbf{k}}_2-\widehat{\mathbf{p}}}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\widehat{\mathbf{k}}_3+\widehat{\mathbf{p}}}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right),$$

$$B_0^{\rm out}(\mathbf{q}) = A_0\Gamma(-i\eta_2)\Gamma(-i\eta_3)e^{-\frac{\pi\omega}{2}}(1-e^{2\pi\eta_2})(1-e^{2\pi\eta_3}) \\ \times\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_2(1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle)\right]^{i\eta_2}\left[\frac{\sqrt{3}}{2}k_3(1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle)\right]^{i\eta_3},$$

$$\mathbf{L}_{\rm out}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\eta_2\frac{\widehat{\mathbf{k}}_2+\widehat{\mathbf{p}}}{1+\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_2\rangle}+\eta_3\frac{\widehat{\mathbf{k}}_3-\widehat{\mathbf{p}}}{1-\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{k}}_3\rangle}\right).$$

Здесь использованы обозначения $\omega=\eta_2+\eta_3$, $A_0=-\frac{1}{4\pi^2}N_0^{(23)}$, где ψ_c обозначает двухчастичное состояние рассеяния. Постоянная $N_0^{(23)} = N_c^{(2)}N_c^{(3)}$ выражается через составляющие

$$N_c^{(j)} = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}e^{-\frac{\pi\eta_j}{2}}\Gamma(1+i\eta_j).$$

Таким образом выражение (53) описывает поведение левой части уравнения (50) для ядра $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}'')$.

6.4. Анзатц для ядра $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}')$ и решение уравнений для ядер $r_n^{\rm in,out}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)$. В соответствии со структурой выражения (53) будем искать структуру ядра $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}')$ в виде суммы двух слагаемых, соотносящихся соответственно со сходящейся и расходящейся волнами. Будем искать ядро $R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}')$ в следующем виде

$$R_n(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}') = r_n^{\rm in}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)Z^{\rm in}(\mathbf{q},\widehat{\mathbf{k}}'')+r_n^{\rm out}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)Z^{\rm in}(\mathbf{q},\widehat{\mathbf{k}}'). \qquad (54)$$

Перепишем уравнение (50) в виде системы двух уравнений для ядер $r_n^{\rm in}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)$ и $r_n^{\rm out}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)$

$$w_n \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}} \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}}'_n \psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}'_n) r_n^{\rm in}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n) = iB_0^{\rm in}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iyp} \delta(\widehat{\mathbf{y}},-\widehat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{-iyp+i\omega\ln y}, \quad (55)$$

$$w_n \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}} \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{p}}'_n \psi_c^{\rm eff}(\mathbf{y},\mathbf{p}'_n) r_n^{\rm out}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n) = iB_0^{\rm out}(\mathbf{q}) \frac{2\pi}{iyp} \delta(\widehat{\mathbf{y}},\widehat{\mathbf{p}}) \frac{1}{y} e^{iyp+i\omega\ln y}, \quad (56)$$

где введено обозначение

$$w_n \equiv n^3 \frac{(B_2 \ln n + B_1)}{2\sqrt{E+\frac{\alpha_1^2}{4n^2}}} \frac{2^5\pi}{|\alpha_1|^3}.$$

Начнем с решения уравнения (55). Введем декартову систему координат, в которой вектор $\widehat{\mathbf{p}}$ направлен вдоль оси Z. Пусть напрвление оси X совпадает с напавлением проекции вектора $\mathbf{k}$ на плоскость, ортогональную вектору $\mathbf{p}$. Полагая $y \gg 1$, перепишем левую часть уравнения (55) в сферической системе координат, соответствующей данной декартовой системе:

$$L^{\rm in} \equiv w_n \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-1}^{1} dt e^{iy\sqrt{E}(t\cos\theta_{yp}+\sqrt{1-t^2}\sin\theta_{yp}\cos(\varphi-\varphi_{yk}))} \times e^{i\eta^{\rm eff}\ln y} \widetilde{r}_n^{\rm in}(\mathbf{q},t,\varphi). \quad (57)$$

Здесь введены обозначения $t=\cos\theta=\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}}'_n\rangle$, $\cos\theta_{yp}=\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{y}}\rangle$. Углы φ и φ_{yk} – азимутальные углы, соответствующие векторам $\widehat{\mathbf{p}}'_n$ и $\widehat{\mathbf{y}}$ соответственно. Ядро $\widetilde{r}_n^{\rm in}(\mathbf{q},t,\varphi)$ порождается ядром $r_n^{\rm in}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n)$ при переходе к сферическим координатам вектора $\widehat{\mathbf{p}}'_n$. Будем искать функцию $\widetilde{r}_n^{\rm in}(\mathbf{q},t,\varphi)$ в следующем виде

$$\widetilde{r}_n^{\rm in}(\mathbf{q},t,\varphi) = \kappa_0^{(\rm in)} \left(t-\frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} {\rm ce}_{2l}(\varphi,s). \quad (58)$$

Здесь $\kappa_0^{(\mathrm{in})}$ – нормировочная постоянная, b – параметр, $b = \eta^{\mathrm{eff}} - \omega$. Обозначение $\left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib}$ введено для обобщенной функции χ_+^λ [20]. Функция $\mathrm{ce}_{2l}(\varphi, s)$ – функция Матье [18]:

$$\mathrm{ce}_{2l}(\varphi, s) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2l)} \cos 2r\varphi, \tag{59}$$

коэффициенты разложения $A_{2r}^{(2l)}$ определяются рекурентным образом согласно (8.60) [16], s – некоторый вещественный параметр. Отметим, что возникновение функций Матье в структуре ядра (58) связано с необходимостью погасить высокочастотные колебания, порожденные несовпадением направлений единичных векторов $\widehat{\mathbf{p}}'_n$ и $\widehat{\mathbf{p}}$. Это отклонение, в свою очередь, связано с тем, что двухчастичные базисные функции $\psi^{\mathrm{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n))$, отвечающие "большой" переменной $\mathbf{y}$, соответствуют спектральной окрестности точки ${\mathbf{p}'_n}^2 = E$. В то же время абсолютная величина момента, сопряженного переменной $\mathbf{y}$ в выражении трехчастичной искаженной волны Ψ^{BBK}, равна p $(p^2 < E)$. Как мы видели выше, функции $\psi^{\mathrm{eff}}(\mathbf{y}, \mathbf{p}'_n))$, отвечающие екрестности точки накопления кулоновского спектра дают вклад в приближение трехчастичной волны Ψ^{BBK} лишь поправочного порядка ($\frac{1}{y^2}$ в обобщенном смысле). Для выделения этого вклада оказывается необходимым провести усреднение по азимутальному углу с функциями Матье. Отметим, что функции Матье, согласно (59) представляют собой разложения в том числе по быстро осциллирующим функциям.

Подставим ядро (58) в уравнение (57) и проинтегрируем по переменной φ, воспользовавшись уравнениями [16] (6.925.1)–(6.925.2):

$$\int_0^{2\pi} \sin[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \mathrm{ce}_{2l}(\varphi, s) d\varphi = 0, \tag{60}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos[z_1 \cos(\varphi - \alpha)] \mathrm{ce}_{2l}(\varphi, s) d\varphi$$
$$= \frac{2\pi A_0^{(2l)}}{\mathrm{ce}_{2l}(0, s)\mathrm{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2}, s)} \mathrm{Ce}_{2l}(\zeta, s)\mathrm{ce}_{2l}(\vartheta, s). \tag{61}$$

Здесь использованы обозначения $\mathrm{Ce}_{2l}(\zeta, s) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2l)} \operatorname{ch} 2r\varphi$,

$$z_1 = 2\sqrt{s}\sqrt{\operatorname{ch}^2\zeta - \sin^2\vartheta}, \qquad \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{th}\zeta \operatorname{tg}\vartheta. \tag{62}$$

Функция $\mathrm{Ce}_{2l}(\zeta, s)$ – присоединенная функция Матье первого рода. Вводя обозначения

$$z_1 = y\sqrt{E}\sqrt{1-t^2}\sin\theta_{yp}, \quad \alpha = \varphi_{yk}, \tag{63}$$

мы фиксируем параметры ζ и ϑ в соответствии с уравнениями (62). Сделав в уравнении (57) замену переменной $\sigma = t - \frac{p}{\sqrt{E}}$, перепишем (57) в виде

$$L^{\mathrm{in}} \sim \kappa_0^{(\mathrm{in})} y^{i\eta^{\mathrm{eff}}} \frac{2\pi w_n A_0^{(2l)}}{\mathrm{ce}_{2l}(0,s)\mathrm{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2},s)} e^{iyp\cos\theta_{yp}} \times \int\limits_0^{\infty} d\sigma \sigma^{ib} e^{iy\sqrt{E}\sigma\cos\theta_{yp}} \mathrm{Ce}_{2l}(\widetilde{\zeta}, s)\mathrm{ce}_{2l}(\widetilde{\vartheta}, s). \tag{64}$$

Переменные $\widetilde{\zeta}$ и $\widetilde{\vartheta}$ порождаются исходными переменными ζ и ϑ при замене $\sigma = t - \frac{p}{\sqrt{E}}$.

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (64) с бесконечнодифференцируемой функцией $H(\widehat{\mathbf{p}})$, заданной на единичной сфере

$$\langle L^{\mathrm{in}}, H\rangle_{\mathbf{S}^2_{\widehat{\mathbf{p}}}} \sim \kappa_0^{(\mathrm{in})} y^{i\eta^{\mathrm{eff}}} \frac{2\pi w_n A_0^{(2l)}}{\mathrm{ce}_{2l}(0,s)\mathrm{ce}_{2l}(\frac{\pi}{2},s)} \times \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_{yp} \int\limits_0^{\pi} d\theta_{yp} \sin\theta_{yp} \widetilde{H}(\theta_{yp}, \varphi_{yp}) e^{iyp\cos\theta_{yp}} \times \int\limits_0^{\infty} d\sigma \sigma^{ib} e^{iy\sqrt{E}\sigma\cos\theta_{yp}} \mathrm{Ce}_{2l}(\widetilde{\zeta}, s)\mathrm{ce}_{2l}(\widetilde{\vartheta}, s). \tag{65}$$

Учитывая, что $\mathrm{Im}(p) < 0$, найдем, что старший вклад в интеграл по $d\theta_{yp}$ определяется точкой $\theta_{yp} = \pi$.

В соответствии с уравнением (63) в этом случае $z_1 = 0$. Из уравнения (62) следует, что

$$\zeta = 0, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

и, как следствие, $\alpha = \varphi_{yk} = \frac{\pi}{4}$ или $\alpha = \frac{5\pi}{4}$. Последние утверждение позволяет делать выводы о геометрии проведенного усреднения.

Таким образом, уравнение (65) принимает вид

$$\langle L^{\text{in}}, H\rangle_{\mathbf{S}^2_{\mathbf{p}}} \sim \kappa_0^{(\text{in})} y^{i\eta^{\text{eff}}} \frac{4\pi^2 w_n A_0^{(2l)}}{-ipy} H(-\widehat{\mathbf{y}}) e^{-iyp} \int\limits_0^\infty d\sigma \sigma_+^{ib} e^{-iy\sqrt{E}\sigma}. \quad (66)$$

После замены переменной $\rho = y\sigma$ получаем согласно (3.381.4) [16]

$$\langle L^{\text{in}}, H\rangle_{\mathbf{S}^2_{\mathbf{p}}} \sim \kappa_0^{(\text{in})} \frac{4\pi^2 w_n A_0^{(2l)}}{-ip} \frac{\Gamma(1+ib)}{(i\sqrt{E})^{1+ib}} \frac{e^{-iyp+i\omega \ln y}}{y^2} H(-\widehat{\mathbf{y}}). \quad (67)$$

Сравнивая полученное уравнение и уравнение (55), находим нормировочную постоянную $\kappa_0^{(\text{in})}$

$$\kappa_0^{(\text{in})} = \frac{B_0^{\text{in}}(\mathbf{q})\sqrt{E}^{1+ib} e^{\frac{\pi b}{2}}}{2\pi w_n A_0^{(2l)} \Gamma(1+ib)}.$$

Мы приходим к выводу, что в смысле обобщенных функций ядро (58) удовлетворяет уравнению (55). Аналогичным образом мы можем определить ядро $r_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n)$

$$\widetilde{r}_n^{\text{out}}(\mathbf{q}, t, \varphi) = \kappa_0^{(\text{out})} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s). \quad (68)$$

и показать, что оно удовлетворяет уравнению (56).

Сформулируем окончательный результат в следующей форме. Ядро $R_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}')$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_n(\mathbf{q}, t, \varphi, \widehat{\mathbf{k}}') = {} & \frac{\varpi_0^{(\text{in})(\mathbf{q})}}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{in}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}') \\ & + \frac{\varpi_0^{(\text{out})}(\mathbf{q})}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} \left(t - \frac{p}{\sqrt{E}}\right)_+^{ib} \text{ce}_{2l}(\varphi, s) Z^{\text{out}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'). \end{aligned} \quad (69)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} Z^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}') = {} & -\frac{N_c^{(1)} \Gamma(3+i\eta)}{k^{4+i\eta}} \Big[e^{\frac{\pi\eta}{2}} \langle \widehat{\mathbf{k}}, \mathbf{L}_{\text{in(out)}}(\mathbf{q})\rangle \Phi \\ & \times \left(3+i\eta, 1, i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1 + \langle \widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{k}}\rangle)\right) - e^{-\frac{\pi\eta}{2}} H^{\text{in(out)}}(\mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}') \Big], \end{aligned}$$

где

$$H^{\mathrm{in(out)}}(\mathbf{q},\widehat{\mathbf{k}}') \equiv \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{x}}\langle\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{L}_{\mathrm{in,(out)}}(\mathbf{q})\rangle\Phi \times \left(3+i\eta,1,-i\frac{|\alpha_1|}{2k}(1-\langle\widehat{\mathbf{k}}',\widehat{\mathbf{x}}\rangle)\right)s_c(\widehat{\mathbf{x}},\mathbf{k}).$$

Здесь $t=\langle\widehat{\mathbf{p}},\widehat{\mathbf{p}}'_n\rangle$, переменная φ – угол между векторами $[\widehat{\mathbf{p}}\times\widehat{\mathbf{k}}]$ и $[\widehat{\mathbf{p}}\times\widehat{\mathbf{p}}'_n]$, отсчитываемый в положительном направлении при условии, что тройка векторов $[\widehat{\mathbf{p}}\times\widehat{\mathbf{k}}]$, $[\widehat{\mathbf{p}}\times\widehat{\mathbf{p}}'_n]$ и $\widehat{\mathbf{p}}$ является положительно ориентированной,

$$\varpi_0^{(\mathrm{in,out})}(\mathbf{q}) = B_0^{\mathrm{in,out}}(\mathbf{q})\frac{|\alpha_1|^3E^{1+i\frac{b}{2}}e^{\frac{\pi b}{2}}}{2^5\pi^2A_0^{(2l)}\Gamma(1+ib)}.$$

§7. Выводы и результаты

Сформулируем окончательные выводы. Вернемся к спктральному разложению (24) в области Ω_1^+ и выделим вклад окрестности точки накопления дискретного спектра парного кулоновского оператора. При этом вклад непрерывный спектр парного кулоновского оператора не дает вклад в спектральное разложение. Вклад дискретного спектра ограничивается суммированием по главному квантовому числу в выражении (24), от некоторого значения M, $M\gg 1$ до бесконечности. Значение параметра M диктуется распределением энергии между подсистемами в начальных условиях (соотношением значений k^2 и p^2):

$$\Psi_c^{\mathrm{acc}}(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim \sum_{n'=M}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{E+\frac{|\alpha_1^2|}{4n'^2}}}\int\limits_{\mathbf{S}^2}d\widehat{\mathbf{k}}' \times \int\limits_{\mathbf{S}^2}d\widehat{\mathbf{p}}'_n\psi^d_{n'}(\mathbf{x},\widehat{\mathbf{k}}')\psi_c^{\mathrm{eff}}(\mathbf{y},\mathbf{p}'_n)R_{n'}(\mathbf{q},\mathbf{p}'_n,\widehat{\mathbf{k}}'), \quad (70)$$

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})\in\Omega_1^+, \qquad p'_n=\sqrt{E+\frac{|\alpha_1^2|}{4n'^2}}.$$

Выражение для ядра $R_{n'}(\mathbf{q}, \mathbf{p}'_n, \widehat{\mathbf{k}}')$ определено в уравнении (69). В соответствии с выражением (22)

$$\psi_n^d(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}) = g_n(\mathbf{x}, \widehat{\mathbf{k}}) = e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} L_{n-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{n} x \sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

$$\sin^2\theta/2 = \frac{1 - \langle\widehat{\mathbf{k}}, \widehat{\mathbf{x}}\rangle}{2},$$

где $L_n(y)$ – полиномы Лагерра.

Эффективно выражение (70) сводится к следующему виду

$$\Psi_c^{\mathrm{acc}}(\mathbf{z}, \mathbf{q}) \sim \sum_{n=M}^{\infty} \frac{1}{n^3(B_2 \ln n + B_1)} e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x} \times \int\limits_{\mathbf{S}^2} d\widehat{\mathbf{k}}' L_{n-1}\left(\frac{|\alpha_1|}{2n} x(1 - \langle\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{x}}\rangle)\right) U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}'), \quad (71)$$

где $U(\mathbf{y}, \mathbf{q}, \widehat{\mathbf{k}}')$ – гладкая функция переменной $\widehat{\mathbf{k}}'$, а параметр x принимает произвольные значения на положительной полуоси ($x \in [0, \infty)$. Введем новый параметр $t_n = \frac{x}{n^2}$. Пусть при этом значения параметра t_n таковы, что аргумент полинома Лагерра может быть достаточно велик

$$0 < \frac{n|\alpha_1|}{2} t_n(1 - \langle\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{x}}\rangle) < 4n + 2, \qquad n \geq M \gg 1.$$

Иными словами, мы хотим рассматривать асимптотику полинома Лагерра в области колебаний. Эта асимптотика согласно сказанному выше описывается выражениями (31)-(33). Согласно выражению (33)

$$e^{-\frac{r}{2}} L_n(r) = 2(-1)^n (2\pi\upsilon)^{-1/2} \left(\frac{r}{\upsilon}\right)^{-1/4} \left(1 - \frac{r}{\upsilon}\right)^{-1/4} \times \left(\sin\left(\frac{\upsilon\theta_*}{2} - \frac{\upsilon}{4}\sin 2\theta_* + \frac{\pi}{4}\right) + O(1/\upsilon)\right), \quad (72)$$

$$\upsilon = 4n + 2, \qquad r = \upsilon\cos^2\theta_*, \qquad 0 < \theta_* < \frac{\pi}{2}$$

в области колебаний асимптотика полиномов Лагерра содержит экспоненциальный рост и быстро осциллирующую функцию. При этом, если мы находимся вне окрестности стационарной точки (при интегрировании по $d\widehat{\mathbf{k}}'$ в уравнении (71)), точка

$$\langle\widehat{\mathbf{k}}', \widehat{\mathbf{x}}\rangle = -1$$

соответствует одной из границ области инитегрирования и, следовательно, дает один из основных вкладов в интеграл (71). Вместе с тем эта точка (в области колебаний полинома Лагерра) полностью компенсирует экспоненциальное убывание $e^{-\frac{|\alpha_1|}{2n}x}$, присутствующее в уравнении (71) и отвечающее кулоновским функциям дискретного спектра. Это означает, что в области колебаний полиномов Лагерра совокупный вклад окрестности точки накопления дискретного спектра определяется лишь степенным убыванием по главному квантовому числу и содержит лишь осциллирующие (но не убывающие экспоненциально при достаточно больших аргументах) функции. Соответствующий вклад имеет вид:

$$\begin{aligned}\Psi_c^{\mathrm{acc}}(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y},\mathbf{q},-\widehat{\mathbf{x}}) \sum_{n=M}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4(B_2\ln n + B_1)} \\ \times (8\pi n|\alpha_1|t_n)^{-1/2}\left(\frac{|\alpha_1|t_n}{4}\right)^{-1/4}\left(1-\frac{|\alpha_1|t_n}{4}\right)^{-1/4} \\ \times \cos\left(2n\left[\arccos\sqrt{\frac{|\alpha_1|t_n}{4}} - \sqrt{\frac{|\alpha_1|t_n}{4}}\sqrt{1-\frac{|\alpha_1|t_n}{4}}\right]\right).\end{aligned} \tag{73}$$

Это объясняет медленную сходимость ряда вычислительных результатов, связанных с рассеянием заряженных кластеров выше порога развала.

Отметим, что формула суммирования по Пуассону приводит сходящийся ряд (73) к следующему виду

$$\begin{aligned}\Psi_c^{\mathrm{acc}}(\mathbf{z},\mathbf{q}) \sim U(\mathbf{y},\mathbf{q},-\widehat{\mathbf{x}})\frac{1}{2\sqrt{\pi}(|\alpha_1|x)^{3/4}} \\ \times \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int\limits_0^{\frac{|\alpha_1|x}{4M^2}} \frac{ds}{B_1+\frac{1}{2}B_2\ln\frac{|\alpha_1|x}{4s}} \frac{1}{(1-s)^{1/4}} \exp\left\{i\pi(l+\frac{1}{2})\sqrt{\frac{|\alpha_1|x}{s}}\right\} \\ \times \cos\left(\sqrt{\frac{|\alpha_1|x}{s}}\left[\arccos\sqrt{s} - \sqrt{s}\sqrt{1-s}\right]\right).\end{aligned} \tag{74}$$

Более подробное исследование этого ряда будет дано в отдельной работе.

Литература

1. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц.* — Пробл. Мат. Физ. Ленинград. Унив. **9** (1979), 14–30.
2. В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **84** (1979), 16–22.
3. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Asymptotic Behavior of the Eigenfunctions of the Many-particle Shrödinger Operator. I. One-dimentional Particles.* — Amer. Math. Soc. Transl. **225** (2008), 55–71.
4. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Асимптотическое поведение собственных функций трехчастичного оператора Шредингера. II Одномерные заряженные частицы.* — Алгебра и анализ **22**, No. 3 (2010), 60–79.
5. В. С. Буслаев, С. Б. Левин, *Система трех трехмерных заряженных квантовых частиц: асимптотическое поведение собственных функций непрерывного спектра на бесконечности.* — Функ. анализ прилож. **46**, No. 2 (2012), 83–89.
6. Я. Ю. Коптелов, С. Б. Левин, *Об асимптотике задачи рассеяния нескольких заряженных квантовых частиц с отталкивательными парными потенциалами.* — Ядерная физика **77**, No. 4 (2014), 557–565.
7. A. M. Budylin, Ya. Yu. Koptelov, S. B. Levin, *On continuous spectrum eigenfunctions asymptotics of three three-dimensional unlike-charged quantum particles scattering problem.* — In: Days on Diffraction, Proceedings of the International Conference. (2016), 89–94.
8. С. Б. Левин, *Об асимптотическом поведении собственных функций непрерывного спектра на бесконечности для системы трех трехмерных одноименно заряженных квантовых частиц.* — Зап. Научн. Сем. ПОМИ, **451** (2016), 79–115.
9. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, *Asymptotic solution of the Schroedinger equation for three charged particles.* — JETP Lett. **56**, No. 9 (1992), 435–438.
10. E. O. Alt, A. M. Mukhamedzhanov, *Asymptotic solution of the Schroedinger equation for three charged particles.* — Phys. Rev. A **47**, No. 3 (1993) 2004–2022.
11. M. Brauner, J. S. Briggs, H. Klar, *Triply-differential cross sections for ionisation of hydrogen atoms by electrons and positrons.* — J. Phys. B **22** (1989), 2265–2287
12. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц.* М., Наука 1985.
13. G. Garibotti, J. E. Miraglia, *Ionization and electron capture to the continuum in the H+-hydrogen-atom collision.* — Phys. Rev.A, **21** (1980), 572–580.
14. A. L. Godunov , Sh. D. Kunikeev, V. N. Mileev, V. S. Senashenko, Proc. 13th Int. Conf. on Physics of electronic and atomic collisions (Berlin), ed. J.Eichler (Amsterdam: Noth holland), Abstracts (1983) p. 380
15. L. D. Faddeev, *Mathematical aspects of the three-body problem of the quantum scattering theory.* Daniel Davey and Co., Inc., Jerusalem 1965.
16. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* Москва (1963).

17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.* Квантовая Механика, Москва, Наука, **3** (1989).
18. Н. Мак-Лахлан, *Теория и приложения функций Матье.* М., ИЛ, 1953.
19. F. Tricomi, *Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre.* — Ann. Mat. Pura Appl. No. 4, **28** (1949), 263–289.
20. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Москва, 1959.

Budylin A. M., Koptelov Ya. U., Levin S. B. Some aspects of the scattering problem for the system of three charged particles.

The influence aspects of the spectral vicinity accumulation point of pair subsystem bound energies on the Hamiltonian continuous spectrum eigenfunctions structure of three charged particles system is discussed. The cumulative contribution of pair highly excited states is separated in the coordinate asymptotics of these functions.

Ст.-Петербургский
Государственный университет,
Университетская наб. 7/9,
Ст.-Петербург, Россия
E-mail: a.budylin@spbu.ru
E-mail: kopya239@yandex.ru
E-mail: s.levin@spbu.ru

Поступило 30 октября 2017 г.