Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

М. И. Белишев

ЛОКАЛЬНАЯ ГРАНИЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ В КЛАССАХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

§1. Введение

В работе изучается *локальная приближенная граничная управляемость* динамических систем, описываемых волновым уравнением. Это свойство означает, что состояния системы (волны), инициированные граничными источниками (управлениями), составляют L_2-плотные множества в областях, заполняемых волнами. Такой результат выводится из фундаментальной теоремы единственности Хольмгрена-Йона–Татару по схеме, предложенной Д. Л. Расселлом в [9]. L_2-управляемость – ключевой факт в методе граничного управления (BC-метод), который является подходом к обратным задачам, основанным на их связях с теорией управления и систем [1, 2].

В данной работе мы показываем, что полнота волн имеет место и в некоторых классах дифференцируемых функций.

Первая версия работы была опубликована как препринт [3], основанный на дипломной работе А. Н. Долгобородова, выполненной под руководством автора в 1997 г. на физическом факультете С.Петербургского Государственного Университета. В официальных изданиях она, однако, не публиковалась. Данный вариант – исправленная и дополненная версия препринта [3]. Недавно проф. Г. Накамура сообщил автору об определенном интересе к подобным результатам. Именно это послужило поводом вновь обратиться к данному предмету.

Приношу благодарность А. И. Назарову за полезные консультации.

§2. Динамические системы

Все классы функций и пространства вещественны.

Ключевые слова: динамическая система, гиперболическое уравнение второго порядка, граничная управляемость, классы дифференцируемых функций.

Поддержано грантом РФФИ 17-01-00529-a и Volks-Wagen Foundation.

Начально-краевая задача. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ есть ограниченная область с C^∞-гладкой границей Γ; $T > 0$, $Q^T := \Omega \times (0,T)$, $\Sigma^T := \Gamma \times [0,T]$. Рассмотрим задачу

$$u_{tt} + Au = 0 \qquad \text{in } Q^T \tag{2.1}$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} \qquad \text{in } \overline{\Omega} \tag{2.2}$$

$$u|_{\Sigma^T} = f\,, \tag{2.3}$$

где f есть *граничное управление*, A – дифференциальное выражение вида

$$A \,=\, -\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x^i} a^{ij}(x) \partial_{x^j}$$

с коэффициентами $a^{ij} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, удовлетворяющими условиям

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x)\,; \ \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega},\, \xi = \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \in \mathbb{R}^n \tag{2.4}$$

с постоянной $\mu > 0$. Пусть $u = u^f(x,t)$ есть решение (*волна*); перечислим его известные свойства.

(i) Пусть

$$\mathscr{M}^T \,:=\, \left\{ f \in C^\infty(\Sigma^T) \mid \operatorname{supp} f \subset \Gamma \times (0,T] \right\}$$

есть класс гладких управлений, аннулирующихся вблизи $t = 0$. Этот класс плотен в $L_2(\Sigma^T)$. При $f \in \mathscr{M}^T$, задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое решение $u^f \in C^\infty(\overline{Q^T})$. Так как оператор A, определяющий эволюцию волн, не зависит от t и выполнено $\partial_t \mathscr{M}^T = \mathscr{M}^T$, это решение удовлетворяет соотношениям

$$u^{f_t} \,=\, u^f_t\,; \qquad u^{f_{tt}} \,=\, u^f_{tt} \overset{(2.1)}{=} -Au^f\,. \tag{2.5}$$

(ii) Отображение $f \mapsto u^f$, определенное на $\mathscr{M}^T$, является непрерывным из $L_2(\Sigma^T)$ в $C([0,T]; L_2(\Omega))$ [6]. Как таковое, оно расширяется на все $L_2(\Sigma^T)$. С этого момента, для $f \in L_2(\Sigma^T)$ мы определяем (обобщенное) решение u^f класса $C([0,T]; L_2(\Omega))$ как образ f при расширения.

(iii) Через $H^s(\dots)$ обозначаются классы Соболева. Для $f \in H^{2p}(\Sigma^T)$ при условиях $(\partial_t)^j f|_{t=0}$, $j = 0, 1, \dots, 2p-1$, имеем $u^f \in C([0,T]; H^{2p}(\Omega))$ [6,7].

(iv) Обратная матрица $\{a_{ij}\} := \{a^{ij}\}^{-1}$ задает риманову метрику $d\tau^2 = \sum\limits_{ij} a_{ij}dx^i dx^j$ в Ω и соответствующее расстояние dist_A. Обозначим $\tau(x) := \operatorname{dist}_A(x, \Gamma)$ и

$$\Omega^r := \{x \in \overline{\Omega} \mid \tau(x) < r\}, \quad r > 0\,.$$

Известный принцип конечности области влияния для гиперболической задачи (2.1)–(2.3) выполняется и приводит к следующим соотношениям

$$\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,, t) \subset \overline{\Omega^t}, \quad t > 0\,; \quad \operatorname{supp} u^f \subset \{(x,t) \in \overline{Q^T} \mid t \geqslant \tau(x)\} \tag{2.6}$$

(см., например, [5]). Таким образом, Ω^T есть подобласть, заполненная волнами к финальному моменту $t = T$. При наших условиях на Ω и a^{ij}, величина

$$T_{\rm fill} := \inf\{T > 0 \mid \Omega^T = \Omega\}$$

конечна; мы называем ее *временем заполнения.*

Двойственная задача. Задача

$$v_{tt} + Av = 0 \qquad \text{in } \ Q^T \tag{2.7}$$

$$v|_{t=T} = 0, \ \ v_t|_{t=T} = y \qquad \text{in } \ \overline{\Omega} \tag{2.8}$$

$$v|_{\Sigma^T} = 0 \tag{2.9}$$

называется *двойственной* к задаче (2.1)–(2.3); пусть $v = v^y(x,t)$ есть ее решение. Приведем его известные свойства.

(i*) При $y \in C_0^\infty(\Omega)$ задача (2.7)–(2.9) имеет единственное классическое решение $v^y \in C^\infty(\overline{Q^T})$. Отображение $y \mapsto v^y$ действует непрерывно из $L_2(\Omega)$ в $C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ [6, 7].

(ii*) Пусть $\partial_{\nu_A} := \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{ij}\cos(\nu, x^j)\partial_{x^i}$ есть производная по конормали к границе Γ (здесь ν – евклидова нормаль). Отображение $y \mapsto \partial_{\nu_A} v^y|_{\Sigma^T}$ непрерывно из $L_2(\Omega)$ в $L_2(\Sigma^T)$ [6, 7].

(iii*) В силу конечности области влияния в гиперболической задаче (2.7)–(2.9), след $\partial_{\nu_A} v^y|_{\Sigma^T}$ определяется значениями $y|_{\Omega^T}$ (не зависит от $y|_{\Omega\setminus\Omega^T}$). В частности, если $y|_{\Omega^T} = 0$ то выполнено $\partial_{\nu_A} v^y|_{\Sigma^T} = 0$.

Пространства и операторы. Здесь введенные ранее задачи рассматриваются как динамические системы и оснащаются стандартными атрибутами теории управления и систем.

• Гильбертово пространство управлений $\mathscr{F}^T := L_2(\Sigma^T)$ есть *внешнее* пространство системы (2.1)–(2.3).

Гильбертово пространство $\mathscr{H} := L_2(\Omega)$ называется *внутренним* пространством. Оно содержит подпространство функций $\mathscr{H}^T := \{y \in \mathscr{H} \mid \operatorname{supp} y \subset \overline{\Omega^T}\}$, которые локализованы в подобласти, заполняемой волнами к финальному моменту $t = T$.

• Отображение $W^T : \mathscr{F}^T \to \mathscr{H}$, $W^T f := u^f(\,\cdot\,, T)$ есть *оператор управления*. В силу свойства (ii) он непрерывен.

Отображение $O^T : \mathscr{H} \to \mathscr{F}^T$, $O^T y := \partial_{\nu_A} v^y|_{\Sigma^T}$, связанное с системой (2.7)–(2.9) есть *оператор наблюдения*. Известным фактом является соотношение двойственности

$$O^T = (W^T)^*, \tag{2.10}$$

которое выводится интегрированием по частям (см., например, [1,2]).

• Множество волн

$$\mathscr{U}^T := \{u^f(\,\cdot\,, T) \mid f \in \mathscr{F}^T\} = W^T \mathscr{F}^T = \operatorname{Ran} W^T \subset \mathscr{H} \tag{2.11}$$

называется *достижимым* (к моменту $t = T$). Согласно первому из соотношений (2.6), имеет месть вложение

$$\mathscr{U}^T \subset \mathscr{H}^T, \qquad T > 0 \tag{2.12}$$

. Из известного соотношения теории операторов следует

$$\operatorname{Ker} O^T = \mathscr{H} \ominus \overline{\operatorname{Ran}\,(O^T)^*} \overset{(2.10)}{=} \mathscr{H} \ominus \overline{\operatorname{Ran} W^T} = \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}^T}$$

(см., например, [4]); при этом (2.12) ведет к

$$\operatorname{Ker} O^T \supset \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}^T, \qquad T > 0, \tag{2.13}$$

что соответствует свойству (iii*).

§3. Управляемость

L_2-управляемость. Один из центральных результатов теории граничного управления, играющий ключевую роль в BC-методе, состоит в том, что вложение (2.12) является плотным:

$$\overline{\mathscr{U}^T} = \mathscr{H}^T, \qquad T > 0 \tag{3.1}$$

(см. [1,2]). В частности, при $T > T_{\rm fill}$ выполнено $\overline{\mathscr{U}^T} = \mathscr{H}$. Как отмечалось во Введении, (3.1) выводится из Хольмгрена–Йона–Татару о единственности продолжения решений волнового уравнения через нехарактеристические поверхности [10]. Этот результат означает, что любую функцию, локализованную в заполненной волнами области Ω^T, можно приблизить (в L_2-метрике) волной $u^f(\,\cdot\,,T)$ с надлежащим образом подобранным управлением $f \in \mathscr{F}^T$. В теории управления об этом свойстве говорят как о *локальной приближенной граничной управляемости* системы (2.1)–(2.3).

В силу $\operatorname{Ker} O^T = \mathscr{H} \ominus \overline{\mathscr{U}^T}$ свойство (3.1) ведет к равенству

$$\operatorname{Ker} O^T = \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}^T\,, \qquad T > 0\,, \tag{3.2}$$

которое усиливает (2.13) и интерпретируется как *наблюдаемость* двойственной системы (2.7)–(2.9). Оно означает, что волна v^y не наблюдается на границе в течение интервала $0 \leqslant t \leqslant T$ если и *только если* возмущение скорости y, которое инициирует волновой процесс, удалено от границы на достаточное расстояние: $\operatorname{dist}_A(\operatorname{supp} y, \Gamma) \geqslant T$. В частности, если $T > T_{\rm fill}$, то выполняется $\operatorname{Ker} O^T = \{0\}$. Двойственность ‘управляемость–наблюдаемость’ это очень общий факт теории систем.

Ниже мы воспользуемся следующим вполне очевидным следствием управляемости (3.2).

Предложение 1. *Пусть $0 < \delta < T$. Из соотношения $O^T y|_{\Gamma\times[\delta,T]} = 0$ следует $y \in \mathscr{H} \ominus \mathscr{H}^{T-\delta}$, что эквивалентно $\operatorname{supp} y \subset \Omega \setminus \Omega^{T-\delta}$.*

Пространства $\mathscr{D}_s$. Как известно, оператор

$$A_0 : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, \;\; \operatorname{Dom} A_0 = H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega), \;\; A_0 y := A y$$

положительно определен в $\mathscr{H}$ и имеет чисто дискретный спектр $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1} : 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \dots;\ \lambda_k \to \infty$. Пусть $\{e_k\}_{k\geqslant 1} : A_0 e_k = \lambda_k e_k$ есть базис его собственных функций, нормированных условиями $(e_k, e_l)_{\mathscr{H}} = \delta_{kl}$.

Для $s > 0$ определим гильбертово пространство функций

$$\mathscr{D}_s := \operatorname{Dom} A_0^{s/2}\,, \qquad (y,w)_{\mathscr{D}_s} := (A_0^{s/2} y, A_0^{s/2} w)_{\mathscr{H}}$$

и отметим соотношения: $\mathscr{D}_s \subset H^s(\Omega)$ и $\mathscr{D}_s \supset \mathscr{D}_{s'}$ при $s < s'$ (см. [8]). Это пространство содержит подпространства

$$\mathscr{D}_s^T := \overline{\{y \in \mathscr{D}_s \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \cup \Gamma\,\}} \tag{3.3}$$

функций, локализованных в заполненных областях. Из определения легко следует

$$\mathscr{D}_s^T = \overline{\bigcup_{0<\delta<T} \mathscr{D}_s^{T-\delta}}\,. \tag{3.4}$$

Введем (под)класс гладких управлений

$$\mathscr{M}_0^T := \{f \in \mathscr{M} \mid \ \partial_t^{2p} f|_{t=T} = 0, \ p = 0, 1, 2, \dots\}$$

и заметим, что $\partial_t^{2p}\mathscr{M}_0^T \subset \mathscr{M}_0^T$ выполнено при всех $p \geqslant 0$. Пусть

$$\mathscr{U}_0^T := \{u^f(\,\cdot\,, T) \mid \ f \in \mathscr{M}_0^T\} = W^T \mathscr{M}_0^T$$

есть соответствующее достижимое множество.

Предложение 2. *Вложение $\mathscr{U}_0^T \subset \mathscr{D}_s^T$ имеет место при всех $s > 0$ и $T > 0$.*

В самом деле, если $f \in \mathscr{M}_0^T$, то $u^f(\,\cdot\,, T) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $u^f(\,\cdot\,, T)|_\Gamma \overset{(2.3)}{=} f|_{t=T} = 0$ и, следовательно, $u^f(\,\cdot\,, T) \in \operatorname{Dom} A_0$. Поэтому

$$A_0 u^f(\,\cdot\,, T) = A u^f(\,\cdot\,, T) \overset{(2.5)}{=} -u^{f_{tt}}(\,\cdot\,, T) \in \operatorname{Dom} A_0\,,$$

так как $f_{tt} \in \mathscr{M}_0^T$. Таким образом, мы имеем $u^f(\,\cdot\,, T) \in \operatorname{Dom} A_0^2$. Продолжая очевидным образом, получаем $u^f(\,\cdot\,, T) \in \operatorname{Dom} A_0^p$ с любым целым $p \geqslant 1$. Значит, $u^f(\,\cdot\,, T) \in \mathscr{D}_s$ при всех $s > 0$. В то же время, $\operatorname{supp} u^f(\,\cdot\,, T) \subset \Omega^T \cup \Gamma$ и, следовательно, $u^f(\,\cdot\,, T) \in \mathscr{D}_s^T$. Предложение доказано.

$\mathscr{D}_s$-управляемость. Следующий результат интерпретируется как приближенная граничная $\mathscr{D}_s$-управляемость системы (2.1)–(2.3).

Теорема 1. *Справедливо соотношение*

$$\overline{\mathscr{U}_0^T} = \mathscr{D}_s^T\,, \qquad s > 0, \ T > 0 \tag{3.5}$$

(замыкание в $\mathscr{D}_s$). В частности, при $T > T_{\mathrm{fill}}$ выполнено $\overline{\mathscr{U}_0^T} = \mathscr{D}_s$.

Доказательство

1. *Спектральное представление.* Напомним, что $\{\lambda_k\}_{k\geqslant 1}$ и $\{e_k\}_{k\geqslant 1}$ суть спектр и базис (в $\mathscr{H}$) собственных функций оператора A_0. Легко видеть, что система

$$\{e_k^s\}_{k\geqslant 1}: \quad e_k^s := \lambda_k^{-s/2} e_k$$

составляет ортонормированный базис в $\mathscr{D}_s$.

Система

$$v_{tt} + Av = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega \times \mathbb{R} \tag{3.6}$$

$$v|_{t=T} = 0, \;\; v_t|_{t=T} = y \qquad \text{in} \quad \overline{\Omega} \tag{3.7}$$

$$v|_{\Gamma \times \mathbb{R}} = 0 \tag{3.8}$$

является расширением двойственной системы на все времена. Для $y \in C_0^\infty(\Omega)$ она имеет единственное классическое решение $v^y \in C^\infty(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Применяя метод Фурье к задаче (2.7)–(2.9), нетрудно вывести

$$v^y(\,\cdot\,, t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \, \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k}} \, e_k \, ; \qquad \alpha_k = (y, e_k)_{\mathscr{H}} \, . \tag{3.9}$$

Заметим, что $v^y(\,\cdot\,, t)$ нечетно относительно $t = T$.

2. *Регуляризация.* При произвольном $y \in \mathscr{H}$ (обобщенное) решение $v^y(\,\cdot\,, t)$ также представляется правой частью (3.9), но может не войти в классы $\mathscr{D}_s$. Здесь мы приводим процедуру, улучшающую гладкость решений двойственной системы.

• Роль сглаживающего ядра выполняет функция

$$\phi_\varepsilon(t) \;:=\; \varepsilon^{-1} \phi(\varepsilon^{-1} t) \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} \delta(t) \, ,$$

где $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ удовлетворяет условиям

$$\phi \geqslant 0; \quad \phi(-t) = \phi(t); \quad \operatorname{supp} \phi \subset [-1, 1]; \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(t) \, dt \;=\; 1 \, .$$

Пусть $y \in C_0^\infty(\Omega)$. Функция

$$v_\varepsilon^y(\,\cdot\,, t) \;:=\; [\phi_\varepsilon * v^y](\,\cdot\,, t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \phi_\varepsilon(\eta) v^y(\,\cdot\,, t - \eta) \, d\eta \, , \qquad t \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

(свертка – по времени) также является C^∞-гладкой в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ и нечетной относительно. $t = T$. Интегрируя в (3.9), легко получаем ее спектральное представление:

$$v_\varepsilon^y(\,\cdot\,, t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^\varepsilon \alpha_k \, \frac{\sin \sqrt{\lambda_k}(t-T)}{\sqrt{\lambda_k}} \, e_k \, ; \qquad \alpha_k = (y, e_k)_{\mathscr{H}} \, ,$$

$$\beta_k^\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi_\varepsilon(\eta) \, \cos \sqrt{\lambda_k} \eta \, d\eta = \int_{-1}^{1} \phi(t) \, \cos \varepsilon \sqrt{\lambda_k} t \, dt \tag{3.11}$$

с $|\beta_k^\varepsilon| \leqslant 1$. Учитывая свойства ϕ, легко вывести

$$\beta_k^\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 1\,, \quad k \geqslant 1; \qquad \lambda_k^{s/2}\beta_k^\varepsilon \underset{k\to\infty}{\to} 0\,, \quad s \geqslant 0,\ \varepsilon > 0\,. \tag{3.12}$$

Сравнивая (3.9) с (3.11), мы видим, что v_ε^y есть решение задачи (3.6)–(3.8), удовлетворяющее

$$v_\varepsilon^y|_{t=T} = 0\,, \quad (v_\varepsilon^y)_t|_{t=T} \,=\, \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^\varepsilon \alpha_k\, e_k \,=:\, y_\varepsilon\,. \tag{3.13}$$

Итак, мы имеем $v_\varepsilon^y = v^{y_\varepsilon}$. К этому заметим, что $y_\varepsilon \in \mathscr{D}^s$ при всех $s > 0$ по второму из соотношений (3.12).

• В силу сказанного выше, оператор (*регуляризатор*) $R_\varepsilon : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, $R_\varepsilon y := y_\varepsilon$ корректно определен на $C_0^\infty(\Omega)$. Оценивая

$$\|y_\varepsilon\|^2_{\mathscr{D}_s} \,=\, \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s (\beta_k^\varepsilon)^2 \alpha_k^2 \overset{(3.12)}{\leqslant} \text{const} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \,=\, \text{const}\, \|y\|^2_{\mathscr{H}} \qquad (\varepsilon > 0)\,,$$

мы видим, что R_ε действует непрерывно из $\mathscr{H}$ в $\mathscr{D}_s$.

Из представления (3.13) следует

$$R_\varepsilon e_k \,=\, \beta_k^\varepsilon\, e_k\,, \tag{3.14}$$

т.е. регуляризатор диагонален в собственном базисе A_0. Следовательно, мы имеем $R_\varepsilon e_k^s \,=\, \beta_k^\varepsilon\, e_k^s$ in $\mathscr{D}_s$. Так как β_k^ε равномерно ограничены, R_ε непрерывен как оператор в $\mathscr{D}_s$ и его норма ограничена равномерно по ε. В то же время, по первому соотношению в (3.12), регуляризатор сходится к тождественному оператору I на плотном множестве $\operatorname{span}\{e_k^s\}_{k\geqslant 1}$ при $\varepsilon \to 0$. В результате, имеет место сходимость $R_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0}{\to} I$ в сильной операторной топологии в $\mathscr{D}_s$.

• Фиксируем $\delta \in (0, T)$ и положительное $\varepsilon < \delta$. Для управлений $f \in \mathscr{F}^T$ с условием $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [\delta, T]$ оператор $f \mapsto f_\varepsilon$:

$$f_\varepsilon(\,\cdot\,, t) := \int_0^T [\phi_\varepsilon(t-\eta) - \phi_\varepsilon(2T - t - \eta)]\, f(\,\cdot\,, \eta)\, d\eta, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{3.15}$$

корректно определен. С учетом определения класса $\mathscr{M}_0^T$ и свойств ядра ϕ_ε легко проверить, что $f_\varepsilon \in \mathscr{M}_0^T$. Заметим, что из последнего следует

$$W^T f_\varepsilon = u^{f_\varepsilon}(\,\cdot\,, T) \in \mathscr{U}_0^T \subset \mathscr{D}_s^T\,.$$

Предложение 3. *Для любого допустимого $f \in \mathscr{F}^T$ и $y \in \mathscr{H}$ справедливо соотношение*

$$(f_\varepsilon, O^T y)_{\mathscr{F}^T} = (f, O^T R_\varepsilon y)_{\mathscr{F}^T}. \tag{3.16}$$

В самом деле, пусть $y \in C_0^\infty(\Omega)$, так что v^y – классическое и гладкое в $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}$. Применяя ∂_{ν_A} в (3.10), имеем

$$\partial_{\nu_A} v_\varepsilon^y = \phi_\varepsilon * \partial_{\nu_A} v^y \qquad \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}.$$

По четности/нечетности ϕ_ε и v^y, при временах $t < T$ правую часть можно записать в виде

$$[\phi_\varepsilon * \partial_{\nu_A} v^y](\,\cdot\,, t) = \int_{-\infty}^{T} [\phi_\varepsilon(t-\eta) - \phi_\varepsilon(2T-t-\eta)]\, \partial_{\nu_A} v^y(\,\cdot\,, \eta)\, d\eta. \tag{3.17}$$

Учитывая (3.15), (3.17) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned}
(f_\varepsilon, O^T y)_{\mathscr{F}^T} &= \int_{\Sigma^T} f_\varepsilon(\gamma, t)\, \partial_{\nu_A} v^y(\gamma, t)\, d\Gamma dt \\
&= \int_{\Sigma^T} f(\gamma, t) \left[\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \phi_\varepsilon(\eta) \partial_{\nu_A} v^y(\gamma, t-\eta)\, d\eta \right] d\Gamma dt \\
&= \int_{\Sigma^T} f(\gamma, t) \partial_{\nu_A} v_\varepsilon^y(\gamma, t-\eta)\, d\Gamma dt \\
&= \int_{\Sigma^T} f(\gamma, t) \partial_{\nu_A} v^{y_\varepsilon}(\gamma, t-\eta)\, d\Gamma dt = (f, O^T R_\varepsilon y)_{\mathscr{F}^T}.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем (3.16) для данного y. Поскольку такие y составляют плотное множество в $\mathscr{H}$, а оператор $O^T R_\varepsilon$ непрерывен, мы распространяем (3.16) на все $y \in \mathscr{H}$. Предложение доказано.

3. *Завершение доказательства теоремы.* Пусть $z \in \mathscr{D}_s^T \ominus \overline{\mathscr{U}_0^T}$ (ортогональность в $\mathscr{D}_s$); мы собираемся показать, что $z = 0$. Напомним, что скалярное произведение в $\mathscr{D}_s$ есть

$$(y, w)_{\mathscr{D}_s} = (A_0^{s/2} y, A_0^{s/2} w)_{\mathscr{H}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s\, (y, e_k)_{\mathscr{H}} (w, e_k)_{\mathscr{H}}.$$

Пусть $\alpha_k = (z, e_k)_{\mathscr{H}}$. Фиксируем $\delta \in (0, T)$ и положительное $\varepsilon < \delta$. В силу выбора z, для $f \in \mathscr{F}^T$ с условием $\operatorname{supp} f \subset \Gamma \times [\delta, T]$ имеем выкладки

$$\begin{aligned}
0 &= (W^T f_\varepsilon, z)_{\mathscr{D}_s} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s (W^T f_\varepsilon, e_k)_{\mathscr{H}} (z, e_k)_{\mathscr{H}} \\
&\overset{(2.10)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k (f_\varepsilon, O^T e_k)_{\mathscr{F}^T} \\
&\overset{(3.16)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k (f, O^T R_\varepsilon e_k)_{\mathscr{F}^T} \\
&\overset{(3.14)}{=} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k \beta_k^s (f, O^T e_k)_{\mathscr{F}^T} = \left(f,\ O^T \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \alpha_k \beta_k^s e_k\right)_{\mathscr{F}^T} \\
&\overset{(3.13)}{=} (f, O^T A_0^s z_\varepsilon)_{\mathscr{F}^T},
\end{aligned}$$

в ходе которых использована непрерывность $O^T : \mathscr{H} \to \mathscr{F}^T$. Поскольку f произвольно на $\Gamma \times [\delta, T]$, мы видим, что

$$(O^T A_0^s z_\varepsilon)\big|_{\Gamma \times [\delta, T]} = 0 .$$

По предложению 1, из последнего следует

$$A_0^s z_\varepsilon = 0 \qquad \text{in } \Omega^{T-\delta} . \tag{3.18}$$

Далее, для $y \in \mathscr{D}_s^{T-\delta}$ выполнено

$$(y, z_\varepsilon)_{\mathscr{D}_s} = (A_0^{s/2} y, A_0^{s/2} z_\varepsilon)_{\mathscr{H}} = (y, A_0^s z_\varepsilon)_{\mathscr{H}} \overset{(3.18)}{=} 0 ,$$

т.е. $z_\varepsilon \in \mathscr{D}_s^T \ominus \mathscr{D}_s^{T-\delta}$. Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем $z_\varepsilon = R_\varepsilon z \to z$ in $\mathscr{D}_s$ и заключаем, что $(y, z)_{\mathscr{D}_s} = 0$ для любых $y \in \mathscr{D}_s^{T-\delta}$ и $\delta \in (0, T)$. Со ссылкой на (3.4), приходим к $z = 0$ и, таким образом, доказываем теорему 1.

H_0^1-управляемость. В оставшейся части работы мы рассматриваем некоторые приложения теоремы 1.

В терминах римановой геометрии в Ω, определяемой метрикой $d\tau^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j$, подобласть Ω^T есть приграничный слой толщины T. Он расширяется с ростом T. Напомним, что $\tau(x) = \mathrm{dist}_A(x, \Gamma)$. При $T < T_{\mathrm{fill}}$ граница слоя состоит из двух частей: $\partial\Omega^T = \Gamma \cup \Gamma^T$, где

$$\Gamma^T := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = T\}$$

есть поверхность, эквидистантная границе Γ.

В силу гладкости Γ выполнено $\mathscr{D}_1 = H_0^1(\Omega)$, т.е. эти пространства содержат один и тот же запас функций, а нормы $\|\cdot\|_{\mathscr{D}_1}$ и $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$ эквивалентны. Значит, выполнено

$$\mathscr{D}_1^T \overset{(3.3)}{=} \overline{\{y \in H_0^1(\Omega) \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \cup \Gamma)\}} = H_0^1(\Omega^T)$$

(замыкание в H^1-метрике), причем последнее равенство справедливо в силу плотности функций с компактным носителем в $H_0^1(\Omega^T)$. Как результат, мы приходим к

$$\overline{\mathscr{U}_0^T} = H_0^1(\Omega^T), \qquad T > 0. \tag{3.19}$$

H^1-управляемость. Используя более широкий класс управлений $\mathscr{M}^T$ вместо $\mathscr{M}_0^T$, мы расширяем соответствующее достижимое множество с $\mathscr{U}_0^T$ до

$$\mathscr{U}_*^T := \{u^f(\,\cdot\,,T) \mid f \in \mathscr{M}^T\} = W^T \mathscr{M}^T,$$

так что выполнено $\mathscr{U}_0^T \subset \mathscr{U}_*^T \subset \mathscr{U}^T$.

Для $T > 0$ определим класс

$$H_*^1(\Omega^T) := \overline{\{y \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \cup \Gamma\}}$$

(замыкание в $H^1(\Omega)$). Его элементы отличаются от элементов $H_0^1(\Omega)$ тем, что условие $y|_\Gamma = 0$ снято: $H_0^1(\Omega) = \{y \in H_*^1(\Omega^T) \mid \; y|_\Gamma = 0\}$.

Лемма 1. *Для любого $T > 0$ справедливо соотношение*

$$\overline{\mathscr{U}_*^T} = H_*^1(\Omega^T)$$

(замыкание $H^1(\Omega)$). В частности, при $T > T_{\rm fill}$ выполнено $\overline{\mathscr{U}_*^T} = H^1(\Omega)$.

Доказательство.

• Известный геометрический факт, который обычно относят к вариантам 'теоремы о воротнике', состоит в том, что существует область $\dot\Omega \Supset \Omega$ с приводимыми ниже свойствами. Относящиеся к ней объекты мы помечаем точкой.

(1) Граница $\partial\dot\Omega =: \dot\Gamma$ является C^∞-гладкой. Коэффициенты $\dot a^{ij} \in C^\infty(\,\overline{\dot\Omega}\,)$ подчинены условиям эллиптичности (2.4) с постоянной $\dot\mu > 0$ и таковы, что $\dot a^{ij}|_\Omega = a^{ij}$.

(2) Расстояние $\operatorname{dist}_{\dot A}$ в $\dot\Omega$ таково, что $\dot\Gamma^\eta = \Gamma$ для некоторого $\eta > 0$ и, соответственно, $\dot\Gamma^{T+\eta} = \Gamma^T \;\; (T > 0)$.

• Пусть $y \in H^1_*(\Omega^T)$. Чтобы доказать лемму, достаточно построить последовательность $\{f_j\}_{j\geqslant 1} \subset \mathscr{M}^T_*$, такую что $u^{f_j}(\,\cdot\,,T) \to y$ in $H^1(\Omega)$. Мы делаем это следующим образом.

Продолжим y до функции $\dot{y} \in H^1_0(\dot{\Omega}^{T+\eta}) : \dot{y}|_\Omega = y$. Такое продолжение существует благодаря гладкости Γ: см. например, [8].

Рассмотрим задачу (2.1)–(2.3) в $\dot{\Omega} \times (0, T+\eta)$. В силу (3.19) можно выбрать управления $\{\dot{f}_j\} \subset \dot{\mathscr{M}}^{T+\eta}_0$ так, что $u^{\dot{f}_j}(\,\cdot\,,T+\eta) \to \dot{y}$ в $H^1(\dot{\Omega})$. Соответственно, сходимость $u^{\dot{f}_j}(\,\cdot\,,T+\eta)|_\Omega \to \dot{y}|_\Omega = y$ имеет место в $H^1(\Omega)$.

• Вернемся к задаче (2.1)–(2.3) в $\Omega \times (0,T)$ и положим $\{f_j\} \subset \mathscr{F}^T$: $f_j(\,\cdot\,,t) := u^{\dot{f}_j}(\,\cdot\,,t+\eta)|_\Gamma$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Вспоминая свойства (2.5) и (2.6), легко убедиться, что $f_j \in \mathscr{M}^T_*$ выполнено и ведет к $u^{f_j}(\,\cdot\,,t) = u^{\dot{f}_j}(\,\cdot\,,t+\eta)|_\Omega \to y$. Лемма доказана.

H^p- и C^m-управляемость. Результат леммы 1 легко обобщается следующим образом.

• В пространстве $H^p(\Omega)$ для $p = 0,1,2,\ldots$ определим подпространства

$$H^p_*(\Omega^T) := \overline{\{y \in H^p(\Omega) \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \cup \Gamma\}}, \qquad T > 0\,.$$

Соотношение

$$\overline{\mathscr{U}^T_*} = H^p_*(\Omega^T)\,, \qquad T > 0$$

(замыкание в $H^1(\Omega)$) выполнено при всех $T > 0$.

• Пусть $m = 0,1,2,\ldots$. В пространствах $C^m(\overline{\Omega})$ определим подпространства

$$C^m_*(\Omega^T) := \overline{\{y \in C^m(\overline{\Omega}) \mid \operatorname{supp} y \subset \Omega^T \cup \Gamma\}}, \qquad T > 0\,.$$

По теоремам вложения Соболева, при $s \geqslant m + 1 + \left[\frac{n}{2}\right]$ выполнено $H^s(\Omega) \subset C^m(\overline{\Omega})$ [8]. Отсюда легко следует

$$\overline{\mathscr{U}^T_*} = C^m_*(\Omega^T)\,, \qquad T > 0$$

(замыкание в $C^m(\overline{\Omega})$).

• Отметим в заключение, что все приведенные выше результаты остаются справедливыми в случае $A = -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_{x^i} a^{ij}(x) \partial_{x^j} + q$ с $q \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Литература

1. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems **13**, No. 5 (1997), R1–R45.
2. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
3. М. И. Белишев, А. Н. Долгобородов, *Локальная граничная управляемость в классах гладких функций для волнового уравнения.* — PDMI PREPRINT – 1/1997, (1997), 1–9.
4. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* С.-Петербург, Москва, Краснодар, Издательство Лань, 2010.
5. M. Ikawa, *Hyperbolic PDEs and Wave Phenomena*, Translations of Mathematical Monographs, v. 189 AMS; Providence. Rhode Island, 1997.
6. I. Lasiecka, J-L. Lions, R. Triggiani, *Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators.* — J. Math. Pures Appl, **65**, no. 3 (1986), 142–192.
7. I. Lasiecka, R. Triggiani, *Recent advances in regularity of second-order hyperbolic mixed problems, and applications.* In Christopher K. R. T. (ed.) et al. Jones, editor, *Dynamics reported. Expositions in dynamical systems*, vol. 3, 104–162. Berlin: Springer-Verlag, 1994.
8. Ж.-Л. Лионс, Е. Madженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения.* Москва, Мир, 1971.
9. D. L. Russell, *Boundary value control theory of the higher-dimensional wave equation.* — SIAM J. Control **9** (1971), 29–42.
10. D. Tataru, *Unique continuation for solutions to PDE's: between Hormander's and Holmgren's theorem.* — Comm. PDE, **20** (1995), 855–884.

Belishev M. I. Local boundary controllability in classes of differentiable functions for the wave equation.

The well-known fact following from the Holmgren-John-Tataru uniqueness theorem is a local approximate boundary L_2-controllability of the dynamical system governed by the wave equation. Generalizing this result, we establish the controllability in certain classes of differentiable functions in the domains filled up with waves.

С.-Петербургское Отделение Математического института е им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 4 июля 2017 г.

С.-Петербургский Государственный университет
Университетская наб 7/9, С.-Петербург, 199034, Россия
E-mail: m.belishev@spbu.ru