

И. В. Байбулов, А. М. Будылин, С. Б. Левин

**ЗАДАЧА РАССЕЙНИЯ НЕСКОЛЬКИХ  
ОДНОМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ ЧАСТИЦ.  
СТРУКТУРА И АСИМПТОТИКА ПРЕДЕЛЬНЫХ  
ЗНАЧЕНИЙ ЯДРА РЕЗОЛЬВЕНТЫ.**

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [6] были впервые предложены асимптотические формулы на бесконечности для собственных функций абсолютно непрерывного спектра, равномерные по угловым переменным, в случае квантовой системы трёх одномерных короткодействующих отталкивающихся частиц с парными потенциалами. Упомянутые асимптотические формулы были получены нестрого в рамках достаточно тонкого эвристического анализа. Тем не менее значимость таких формул в условиях отсутствия доказательств теоремы существования и единственности решения для данной задачи рассеяния была столь существенной, что в работе [5] была предпринята вполне успешная попытка численного «подтверждения» результатов работы [6].

Собственные функции непрерывного спектра содержат асимптотические вклады различного происхождения. Как было показано (пусть и на эвристическом уровне) в [6], в случае одномерных частиц эти вклады разного происхождения имеют в смысле слабых асимптотик одинаковую скорость убывания на бесконечности в конфигурационном пространстве. Различие заключается лишь в наличии или отсутствии сингулярного по угловой переменной коэффициента. Поэтому строгий математический анализ такой ситуации представляется особенно сложным.

Именно, как было показано в [6], волна, порожденная трехчастичным процессом (рассеяние на центре) убывает как  $x^{-1/2}$  с гладкой амплитудой. Вклады, порожденные двухчастичными процессами рассеяния (в том числе многократного перерассеяния) убывают по-прежнему

---

*Ключевые слова:* асимптотики ядра резольвенты, квантовая задача рассеяния нескольких тел, асимптотики собственных функций.

И.Б. благодарит Российский Национальный Фонд за поддержку в рамках гранта РФФ 17-11-01003.

как  $x^{-1/2}$ , но уже с сингулярной по угловой переменной (в смысле слабых асимптотик) амплитудой.

Наша задача заключается в описании этих вкладов на математическом уровне строгости. С этой целью мы ставим во главу угла изучение предельных значений резольвенты на абсолютно непрерывном спектре.

В связи с тематикой данной задачи мы должны упомянуть работы [2] и [4], из результатов которых вытекает отсутствие сингулярного непрерывного спектра оператора Шрёдингера для широкого класса потенциалов парных взаимодействий. Это означает, в частности, что предельные значения резольвенты

$$w\text{-}\lim_{\varepsilon \searrow 0} R(E \pm i\varepsilon), \quad E \in (0, \infty)$$

рассматриваемого здесь оператора существуют как абсолютно непрерывные функции переменной  $E$ . Однако, техника Мура не позволяет найти эти предельные значения и, тем более, вычленивать из них полную систему собственных функций абсолютно непрерывного спектра.

В рамках нашего подхода, который по существу близок к основополагающей работе [3], упомянутые выше предельные значения вычисляются явно.

Следует подчеркнуть, что ограничение рассмотрений на случай конечных потенциалов не приводит к упрощению задачи по существу, поскольку потенциал взаимодействия всех трёх частиц остаётся неубывающим на бесконечности, но позволяет отвлечься от некоторого числа технических деталей.

Подчеркнем, что в основном тексте работы рассматривается случай частиц равных масс. При этом важную роль играют оценки количества возможных перерассеяний частиц в приближении геометрической оптики. В рассматриваемом случае оно равно трем, что позволяет нам ограничить рассмотрение тремя итерациями операторов отражений (3.8), (4.2).

В случае частиц разных масс и, тем более, большего числа частиц в системе количество возможных в приближении геометрической оптики перерассеяний возрастает, однако, остается конечным. Это будет показано отдельно в Приложении С. Таким образом, использованный в работе подход распространяется, хотя и с определенными техническими осложнениями, на общий случай  $N$ -частичного рассеяния одномерных квантовых частиц.

## §2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**2.1. Якобиевы координаты. Редукция задачи.** В исходной постановке рассматривается нерелятивистский гамильтониан  $H$

$$H\psi = -\Delta\psi + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq 3} v(z_i - z_j)\psi, \quad (2.1)$$

$$z_i \in \mathbb{R}, \mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3, \psi = \psi(\mathbf{z}) \in \mathbb{C},$$

$\Delta$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ ,  $v$  – чётная<sup>1</sup> функция  $\mathbb{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$ , определяющая двухчастичное взаимодействие<sup>2</sup>.

Для большей наглядности мы будем считать функцию  $v$  финитной (и интегрируемой). В этом случае существенная самосопряжённость оператора  $H$  в пространстве квадратично интегрируемых функций хорошо известна, см., например, [3]. Более точные требования к  $v$  мы опишем чуть позже. Распространение полученных здесь результатов на случай произвольных быстро убывающих на бесконечности парных потенциалов, равно как и кулоновских потенциалов мы рассчитываем обсудить в последующих публикациях. Следует, однако, подчеркнуть, что предположение о финитности парных потенциалов не является упрощением по существу, поскольку потенциал взаимодействия всех трёх частиц остаётся не убывающим на бесконечности.

Для отделения движения центра масс мы ограничиваем гамильтониан на поверхность  $\Pi$ , определяемую соотношением  $\sum z_i = 0$ . Допуская здесь некоторую небрежность мы в дальнейшем через  $\Delta$  будем обозначать оператор Лапласа–Бельтрами на плоскости  $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ . При этом на  $\Pi$  удобно использовать любую пару  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , так называемых якобиевых координат, однозначно определяемых соотношениями

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k - z_j), \quad y_i = \sqrt{\frac{3}{2}}z_i,$$

индексы  $(i, j, k)$  здесь образуют чётные перестановки. Ввиду ортонормальности якобиевых координат и инвариантности оператора Лапласа–Бельтрами имеем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

<sup>1</sup>Требование чётности не является существенным, но диктуется физической постановкой задачи.

<sup>2</sup>В этой постановке рассматривается система трёх квантовых частиц равных масс

и наш оператор принимает вид

$$H = -\Delta + V, \quad V = \sum_{i=1}^3 v_i, \quad v_i = v(x_i). \quad (2.2)$$

Заметим, что носитель потенциала  $\sum v_i$  лежит в бесконечной крестовой области, компактная часть которой показанна на рисунке 2.1.



Рис. 1. Компактная часть носителя потенциала оператора  $H$ .

Определим резольвенту оператора  $H$

$$R(\lambda) = (H - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \notin [0, +\infty),$$

здесь и далее  $I$  – тождественный оператор. Резольвенту  $(H_0 - \lambda I)^{-1}$  невозмущённого оператора  $H_0 = -\Delta$  будем обозначать через  $R_0(\lambda)$ .

**2.2. Принцип предельного поглощения.** Мы интересуемся задачей рассеяния в рамках так называемого стационарного подхода. В этом случае изучение волновых операторов заменяется на изучение предельных значений  $R(E \pm i0)$  резольвенты рассматриваемого оператора, когда спектральный параметр  $\lambda$  садится на вещественную ось ( $\lambda \rightsquigarrow E \pm i0$ ,  $E \in (0, +\infty)$ ). Доказательство существования таких предельных значений в подходящей топологии как раз и составляет суть принципа предельного поглощения. Коль скоро существование предельных значений резольвенты установлено, исследование собственно волновых операторов проходит по известной стандартной схеме, см., например, [10, 13].

Собственные функции  $\psi^\pm(x, E)$  абсолютно непрерывного спектра могут быть восстановлены по формуле

$$R(x, y|E \pm i0) \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \psi^\pm(x, E) \cdot \frac{e^{\pm i\sqrt{E}|y|}}{\sqrt{|y|}},$$

см., например, [15].

**2.3. Метод оснащенного гильбертова пространства.** Речь идёт как раз об одном из основных способов введения топологии, в которой рассматриваются предельные значения резольвенты  $R(E \pm i0)$ , см. [11, 13]. В этом случае в основное гильбертово пространство  $\mathcal{H}$  непрерывно вкладывается некоторое банахово пространство  $\mathcal{B}$ , что в свою очередь позволяет вложить  $\mathcal{H}$  в сопряженное к  $\mathcal{B}$  пространство  $\mathcal{B}^*$  и далее доказать, что  $R(E \pm i\varepsilon) : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}^*$  имеет непрерывное продолжение при  $\varepsilon \downarrow 0$ . Таким образом, обобщённые собственные функции в этом случае трактуются как элементы пространства  $\mathcal{B}^*$ , а основным объектом изучения становится скалярное произведение  $(R(E \pm i\varepsilon)\varphi, \varphi)$ ,  $\varphi \in \mathcal{B}$ , при  $\varepsilon \downarrow 0$ .

В дальнейшем для определённости мы ограничимся рассмотрением лишь случая  $\text{Im}\lambda \downarrow 0$ .

**2.4. Модель Фридрикса–Фаддеева.** В модели Фридрикса–Фаддеева, см. [3, 10], в рамках принципа предельного поглощения невозмущённый оператор трактуется как оператор умножения на независимую переменную, в то время как возмущение представляет собой интегральный оператор с гладким ядром. Для приложений это как правило связано с переходом в импульсное представление. Изучение аналитических особенностей резольвенты в импульсном представлении может оказаться проще изучения её координатных асимптотик. В целом, на эту точку зрения становимся и мы.

Одной из основных черт подхода Фаддеева [3] к многочастичным задачам рассеяния является переход от резольвенты оператора к так называемому  $t$ -оператору  $T(\lambda)$ , связанному с резольвентой  $R(\lambda)$  тождеством

$$T(\lambda) = V - VR(\lambda)V,$$

где  $V$  – возмущение оператора  $H_0$ . Для изучения оператора  $T(\lambda)$  исследуется уравнение

$$T(\lambda) = V - VR_0(\lambda)T(\lambda),$$

при этом резольвента восстанавливается согласно равенству

$$R(\lambda) = R_0(\lambda) - R_0(\lambda)T(\lambda)R_0(\lambda).$$

В модели Фридрихса–Фаддеева невозмущённая резольвента «на непрерывном спектре» выступает как оператор умножения на функцию, имеющую полюс. Как следствие, ядро оператора  $T(\lambda)$  предполагается непрерывным по Гёльдеру. Дело в том, что при описании предельных значений упомянутого выше скалярного произведения  $(R(E \pm i0)\varphi, \varphi)$ , естественно возникает сингулярный интеграл Гильберта и гёльдеровы функции, в отличие от функций лишь непрерывных, образуют алгебру функций, на которой сингулярный интеграл Гильберта определён как ограниченный оператор.

Именно этим обстоятельством будет определяться и наш выбор вспомогательного пространства, в топологии которого будут рассматриваться предельные в слабом смысле значения резольвенты. Таким пространством в импульсном представлении будет пространство  $H^{\mu, \theta}(\mathbb{R}^2)$  ( $\frac{1}{2} < \theta < 1, \frac{1}{2} < \mu < 1$ ) гёльдеровых функций с нормой

$$\|f\|_{\mu, \theta} = \sup_{\xi, \eta} (1 + |\xi|^{1+\theta}) \left( |f(\xi)| + \frac{|f(\xi + \eta) - f(\xi)|}{|\eta|^\mu} \right). \quad (2.3)$$

Пространство функций в координатном представлении, образы Фурье которых лежат в  $H^{\mu, \theta}(\mathbb{R}^2)$ , мы будем обозначать через  $\widehat{H}^{\mu, \theta}$ .

В работе [3] учёт вкладов от частичных возмущений в полную резольвенту был проведён на основе анализа так называемых уравнений Фаддеева.

Анализ особенностей резольвенты в импульсном представлении удобно провести в рамках так называемого альтернирующего метода Шварца, см. [12, 1, 9]. Отметим, что известные уравнения Фаддеева, см. [3], также можно интерпретировать как вариант альтернирующего метода.

**2.5. Альтернирующий метод Шварца.** Естественно, прежде всего обращает на себя внимание возможность деления переменных для частичного гамильтониана

$$H_i = -\Delta + v_i. \quad (2.4)$$

Тем самым, существование предельных значений резольвенты  $R_i(\lambda) = (H_i - \lambda I)^{-1}$  легко контролируется, впрочем, см. далее пункт 4.1.

Как следствие, встаёт вопрос об учёте таких вкладов в резольвенту  $R(\lambda)$  полного гамильтониана  $H$  с суммарным потенциалом  $\sum v_i$ .

Схема такого учёта известна в литературе под названием альтернирующего метода Шварца, см. [12, 9]. Напомним основные положения абстрактного варианта этой схемы, поскольку многие детали её играют важную роль для понимания наших вычислений.

Обозначим через  $\{G_i\}_{i=1}^n$  некоторый набор линейных операторов в комплексном векторном пространстве  $\mathcal{X}$ . Определим оператор

$$G = \sum_{i=1}^n G_i.$$

Предполагая, что все операторы  $I - G_i$  биективны, положим

$$I - \Gamma_i = (I - G_i)^{-1}. \quad (2.5)$$

Операторы  $\Gamma_i$  носят название операторов отражения.

Суть альтернирующего метода Шварца сводится к следующему.

**1):** Если операторная матрица

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} I & \Gamma_1 & \dots & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & I & \dots & \Gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma_n & \Gamma_n & \dots & I \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

является биекцией пространства  $\mathcal{X}^n$ , то оператор  $I - G$  — биекция пространства  $\mathcal{X}$ .

**2):** Обозначая через  $\text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  соответствующую диагональную матрицу, в условиях биективности (2.6) определим  $\gamma$  как решение уравнения

$$\mathbf{L} \cdot \gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) \quad (2.7)$$

и введём линейные операторы  $\gamma_{ij}$  в  $\mathcal{X}$  как компоненты матрицы  $\gamma$ . Последние могут быть также охарактеризованы соотношениями

$$\gamma_{ij} = \Gamma_i \left( \delta_{ij} I - \sum_{k \neq i} \gamma_{kj} \right) = \left( \delta_{ij} I - \sum_{k \neq j} \gamma_{ik} \right) \Gamma_j. \quad (2.8)$$

Тогда оператор отражения  $\Gamma$ , определяемый соотношением

$$I - \Gamma = (I - G)^{-1}, \quad (2.9)$$

даётся в терминах  $\gamma_{ij}$  формулой

$$\Gamma = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \gamma_{ij}. \quad (2.10)$$

**3):** Особое значение имеет тот факт, что компоненты  $\gamma_{ij}$  могут быть восстановлены по оператору  $\Gamma$  по формулам

$$\gamma_{ij} = -\delta_{ij}G_j - G_i(I - \Gamma)G_j. \quad (2.11)$$

**4):** При  $n = 2$  оператор  $\mathbf{L}$  будет биекцией  $\mathcal{X}^2$  тогда и только тогда, когда оператор  $(I - \Gamma_1\Gamma_2)$  будет биекцией  $\mathcal{X}$ . При этом

$$I - \Gamma = (I - \Gamma_2)(I - \Gamma_1\Gamma_2)^{-1}(I - \Gamma_1). \quad (2.12)$$

Подробные доказательства всех этих фактов можно найти, например, в [9].

Отметим еще одно свойство, которое не было описано в [9]. Именно, утверждение четвёртого пункта можно обобщить и на случай произвольного числа возмущений:

**5):** если оператор  $I - G$  вместе с операторами  $I - G_i$  является биекцией пространства  $\mathcal{X}$ , то оператор  $\mathbf{L}$  будет биекцией пространства  $\mathcal{X}^n$  (со всеми вытекающими отсюда последствиями).

Действительно, компоненты обратного к  $\mathbf{L}$  оператора, обозначим их через  $\omega_{ij}$ , должны удовлетворять соотношению

$$\omega_{ij} + \Gamma_i \sum_{k \neq i} \omega_{kj} = \delta_{ij}I,$$

которое можно переписать в виде

$$\omega_{ij} = (I - G_i)\delta_{ij} + G_i \sum_k \omega_{kj}.$$

Но сумма  $\omega_j = \sum_k \omega_{kj}$  однозначно определена уравнением

$$(I - G)\omega_j = I - G_j,$$

откуда

$$\omega_{ij} = (I - G_i)\delta_{ij} + G_i(I - \Gamma)(I - G_j).$$

Отметим, что если операторная матрица  $\gamma$  в подходящем банаховом пространстве ограничена и норма её меньше единицы, то

$$\Gamma = \sum_{i \neq j} \Gamma_i - \sum_{i \neq j} \Gamma_i \Gamma_j + \sum_{i \neq j \neq k} \Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k - \dots$$



где ряд сумм понимается как сходящийся по норме. Эта формула как раз объясняет название метода.

Для вложения нашей задачи в данную схему нам нужно отделить свободную резольвенту

$$R_0(\lambda) = (-\Delta - \lambda I)^{-1}. \quad (2.13)$$

При этом

$$R(\lambda) = R_0(\lambda)(I + \sum v_i R_0(\lambda))^{-1}. \quad (2.14)$$

### §3. ОПИСАНИЕ СХЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ

**3.1. Аналитические причины существования предела.** Для определённости, в рамках принципа предельного поглощения мы будем следить лишь за предельным переходом  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ .

Как нетрудно заключить из (2.14), мы намерены определить  $G_j(\lambda) = -v_j R_0(\lambda)$ . Полагая

$$\begin{aligned} R_j(\lambda) &= (-\Delta + v_j - \lambda I)^{-1} = R_0(\lambda)(I + v_j R_0(\lambda))^{-1} \\ &= R_0(\lambda)(I - G_j(\lambda))^{-1} = R_0(\lambda)(I - \Gamma_j(\lambda)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

в силу  $\Gamma_j(\lambda) = -G_j(\lambda)(I - G_j(\lambda))^{-1}$ , находим

$$\Gamma_j(\lambda) = v_j R_j(\lambda). \quad (3.2)$$

Следует иметь в виду, что ряд Неймана

$$I - \Gamma_j(\lambda) = I + G_j(\lambda) + G_j^2(\lambda) + \dots$$

не пригоден для изучения предельного перехода  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ , поскольку степени  $G_j(\lambda)$  в импульсном представлении наращивают особенность в пределе при посадке спектрального параметра  $\lambda$  на вещественную ось. Действительно, оператор  $v_j$  в импульсном представлении имеет ядро вида

$$v_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \widehat{v}(k_j - k'_j) \delta(p_j - p'_j),$$

где  $\mathbf{q} = (k_j, p_j)$  – двойственная к  $\mathbf{z}_j = (x_j, y_j)$  переменная,  $\widehat{v}$  – в нашем случае целая функция и  $\delta(\cdot)$  – дельта-функция Дирака. Ясно, что ядро оператора  $G_j^2(\lambda)$  будет уже иметь особенности вида

$$\pi i \frac{\widehat{v}(k_j - \sqrt{\lambda - p_j^2}) \widehat{v}(\sqrt{\lambda - p_j^2} - k'_j) \delta(p_j - p'_j)}{\sqrt{\lambda - p_j^2} (k_j'^2 + p_j'^2 - \lambda)}$$

(при надлежащем выборе ветви корня), причём ситуация с корневой особенностью в знаменателе будет ухудшаться с каждой новой итерацией. В этом как раз и кроется основная трудность в математической теории рассеяния для случая неубывающих потенциалов.

Вместе с тем, операторы  $\Gamma_j(\lambda)$ , включая их предельные значения на непрерывном спектре, могут быть описаны явно, поскольку относятся к задаче, допускающей разделение переменных и редукцию к одномерной задаче рассеяния.

Полезно вскрыть механизм, который обеспечивает существование слабого предела произведения  $R_j(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma_j(\lambda))$  при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ . Свободная резольвента в импульсном представлении на пространстве гёльдеровых функций  $H^{\mu, \theta}(\mathbb{R}^2)$  имеет рассматриваемый слабый предел. Если бы функция  $v_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  была гладкой (достаточно гёльдеровости) функцией (случай быстро убывающего потенциала в координатном представлении), оператор  $\Gamma_j(\lambda)$  имел бы сильный предел и тогда произведение  $R_0(\lambda)(I - \Gamma_j(\lambda))$  (напомним, что порядок множителей для данного утверждения важен) – имело бы соответствующий слабый предел.

Однако в нашем случае упомянутого сильного предела у оператора  $\Gamma_j(\lambda)$  нет. Как мы покажем далее (раздел 4.1), произведение  $\Gamma_j(\lambda)\varphi$ , где  $\varphi \in H^{\mu, \theta}(\mathbb{R}^2)$  в импульсном представлении, имеет особенность следующего вида

$$\Gamma_j(\lambda)\varphi(\mathbf{q}) \sim \frac{f(\mathbf{q})}{\sqrt{p_j^2 - \lambda}}, \quad (3.3)$$

где  $f$  – гёльдерова функция вплоть до вещественных значений параметра  $\lambda$ . Соответствующий вклад в  $(R_j(\lambda)\varphi, \varphi)$  примет вид

$$\int dp_j \int dk_j \frac{f(\mathbf{q})\varphi(\mathbf{q})}{(p_j^2 + k_j^2 - \lambda)\sqrt{p_j^2 - \lambda}} \sim \int \frac{g(p_j) dp_j}{p_j^2 - \lambda}, \quad (3.4)$$

где  $g$  – некоторая гёльдерова функция вплоть до вещественных значений параметра  $\lambda$  (в этой формуле позволили себе следить лишь за особенностью интеграла). Последний интеграл, как известно, имеет предельное значение при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ .

Понятно, что в описанной выше процедуре важен аналитический характер корня  $\sqrt{p_j^2 - \lambda}$ .

Мы покажем в этой работе, что и в случае полной резольвенты  $R(\lambda)$  принцип предельного поглощения опирается на аналогичную аналитическую процедуру. Причём именно в рамках альтернирующей схемы удаётся избежать наращивания особенности, которое наблюдается в ряде Неймана.

**3.2. Руководящая идея: координатная асимптотика на бесконечности ядра произведения  $G_i G_j$ .** Сразу подчеркнем, что переходя к точным обоснованиям в разделе 4, нам придется подправить конструкции, описанные ниже в данном пункте, увеличив длину цепочек итерлируемых операторов до трех. Однако, выяснение причины этого усложнения анализа как раз и проясняется в данном пункте.

Мы вводим представление резольвенты  $R(\lambda)$  в виде  $R(\lambda) = R_0(\lambda)(I - \Gamma(\lambda))$ , где  $R_0(\lambda)$  – свободная резольвента, а оператор  $\Gamma$  определяется равенством

$$I - \Gamma(\lambda) = (I - G(\lambda))^{-1}, \quad G(\lambda) = \sum G_i(\lambda), \quad G_i(\lambda) = v_i R_0(\lambda).$$

Построение оператора  $\Gamma(\lambda)$  мы проведём по схеме Шварца, см. выше.

Прежде всего заметим, что представление оператора  $(I - G)^{-1}$  в виде ряда Неймана (когда такое возможно), указывает на полезность изучения квадрата оператора  $G$  (метод итераций). Этот принцип мы применим (по причинам, описанным выше) не к самому оператору  $I - G$ , а к матричному оператору  $L$ , см. (2.6).

В нашем случае все операторы зависят от параметру  $\lambda$ . Эту зависимость, особенно в алгебраических вычислениях, мы позволим себе опускать.

Положим  $L = I + \Gamma$ ,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_1 & \Gamma_1 \\ \Gamma_2 & 0 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & \Gamma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$L^{-1} = (I + \Gamma)^{-1} = (I - \Gamma^2)^{-1}(I - \Gamma). \quad (3.5)$$

Операторная матрица  $\Gamma^2$  в качестве компонент имеет некоторые суммы операторов вида  $\Gamma_i \Gamma_j$  при  $i \neq j$ .

Следует ожидать, что ключом к обращению операторной матрицы  $I - \Gamma^2$  становится изучение координатных асимптотик на бесконечности ядер произведений  $\Gamma_j \Gamma_k$ . Чуть позже мы покажем, что асимптотическое поведение на бесконечности ядер операторов  $\Gamma_i$  в рассматриваемом случае носит тот же характер, что и для операторов  $G_i$ , а это в свою очередь означает, что характер упомянутых асимптотик для произведений легко усмотреть уже при изучении координатной асимптотики на бесконечности ядра произведения  $G_j G_k$ .

Напомним, что асимптотика ядра  $R_0(z_1, z_2 | \lambda)$  при  $\text{Im } \lambda > 0$  и  $|z_1 - z_2| \rightarrow \infty$  описывается равенством

$$R_0(z_1, z_2 | \lambda + i0) \sim \frac{e^{i\pi/4} e^{i\sqrt{\lambda}|z_1 - z_2|}}{2\sqrt{2\pi} \sqrt{|z_1 - z_2|}}.$$

Тогда нахождение асимптотики на бесконечности ядра произведения  $G_j(\lambda)G_k(\lambda)$  сводится к изучению асимптотики интеграла вида

$$v(x_j) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{v(x_k) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z'|)} dz_k}{\sqrt{|z_j - z_k||z_k - z'|}} \quad (3.6)$$

при  $y_j \rightarrow \pm\infty$ . Здесь  $z_j = (x_j, y_j)$  и  $z_k = (x_k, y_k)$  – введённые ранее якобиевы координаты, а переменную  $z'$  (помня о характере альтернирующего ряда) можно считать равной якобиевой координате, отличной от  $z_k$ .

Если в этом интеграле ограничиться интегрированием по достаточно большой, но конечной полосе (т.е. по области  $x_k \in \text{supp } v, |y_k| < T, T \gg 1$ ), то асимптотика этого интеграла при  $y_j \rightarrow \pm\infty$  легко вычисляется благодаря стабилизации модуля  $|z_j - z_k| \sim |y_j| \pm l_j \cdot z_k$  (знаки согласованы), где  $l_j$  – орт в направлении оси  $y_j$ . Как легко видеть, это приведёт к выделению оператора ранга два, поведение которого при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$  легко контролируется. Оставшийся после выделения асимптотики оператор будет иметь ядро достаточно быстро убывающее по  $z_j$  на бесконечности, что ведёт к его компактности в пространстве  $\widehat{H}^{\mu', \theta'}$  при достаточно малых  $\mu' > 0$  и  $\theta' > 0$ .

Следует теперь подчеркнуть, что интеграл (3.6) надо понимать лишь как условно сходящийся по  $y_k$  и это замечание исключительно важно для учета вклада в данный интеграл от области  $|y_k| > T$ .

Для оценки такого вклада естественно прибегнуть к интегрированию по частям по переменной  $y_k$ , что ведет к абсолютной сходимости интеграла и, по-сути, сводит дело к уже рассмотренному разбиению.

Действительно, если ввести гладкую срезающую функцию  $\chi_T$ , равную единице на отрезке  $(-T, T)$  с носителем в отрезке  $[-T-1, T+1]$ , и положить  $\chi'_T = 1 - \chi_T$ , то формальное интегрирование по частям в интеграле

$$v(x_j) \int \frac{\chi'_T(y_k) v(x_k) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z'|)} dz_k}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z'|}} \quad (3.7)$$

по якобиевой переменной  $y_k$  будет наращивать степенное убывание либо по переменной  $|z_j - z_k|$ , либо по переменной  $|z_k - z'|$ .

В первом случае вклад относится к поправочным членам асимптотики и будет добавкой к компактной части произведения  $G_j G_k$ . Во втором случае можно считать (совершив несколько интегрирований по частям) степень убывания по переменной интегрирования достаточно большой, что позволит выделить старший член разложения из множителя  $|z_j - z_k|^{-1/2}$  (т.е.  $|z_j|^{-1/2}$ ) при  $y_j \rightarrow \infty$ .

Правда этому интегрированию по частям, на первый взгляд, мешает существование стационарной точки (точка отражения или прохождения луча геометрической оптики):

$$\left( \frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} - \frac{z_k - z'}{|z_k - z'|} \right) \cdot l_k = 0,$$

вклад от которой должен быть изучен отдельно. Однако существование такой стационарной точки относится лишь к случаю стандартного несобственного интеграла, с которым в данном случае мы дело не имеем. Мы покажем ниже, что в рамках альтернирующего метода Шварца толкование данного интеграла как повторного ведет эффективно к тому, что случай стационарной точки в стандартном смысле не реализуется, или, более точно, не препятствует выделению асимптотики уже описанного вида.

Для анализа вклада от стационарной точки, полезно привлечь стандартные рассмотрения геометрической оптики по отражению луча от экрана, см. рис. 3.2. Случай прохождения луча аналогичен. Вообще говоря, используемый нами альтернирующий метод Шварца подводит нас к изучению асимптотического поведения ядер для цепочек произведений операторов (в данном случае типа  $G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_k}$ ) с попарно отличающимися индексами соседних операторов. Нам достаточно рассмотреть произведение троек. Дело в том, что, как это было показано еще в [7, 6], не существует более трёх взаимодействий между экранами. Это означает, что в ядре произведения  $G_j G_k G_i$  при  $j \neq k \neq i$ , при

учёте стационарной точки в паре  $G_j G_k$ , — обозначим эту точку через  $z_{ji}$  — пара  $G_k G_i$  может рассматриваться как не имеющая стационарной точки, что позволит интегрировать по частям по переменной  $y_i$  в соответствующей части ядра оператора  $G_j G_k G_i$

$$v(x_j) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\chi(z_k) v(x_k) v(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z_i| |z_i - z'|}}, \quad (3.8)$$

где  $\chi(z)$  — гладкая финитная функция с носителем в круге фиксированного радиуса и равная тождественно единице в окрестности стационарной точки  $z_{ji}$ . Это интегрирование по частям приводит либо к абсолютной сходимости интеграла по  $z_k$ , что как и выше сводит ситуацию к уже разобранный, т.е. к возможности выделить асимптотику по  $y_j$  описанного выше типа, либо это интегрирование по частям делает абсолютно сходящимся интеграл по  $z_i$ .

Замечательно, что последнее опять приводит нас к возможности выделить упомянутую выше асимптотику, поскольку в этом случае переменная  $z_i$  может рассматриваться как живущая на компакте, но как следует из геометрии отражений, переменная  $z_k$  также должна рассматриваться как живущая на компакте, что и позволяет выделить заявленное асимптотическое поведение.

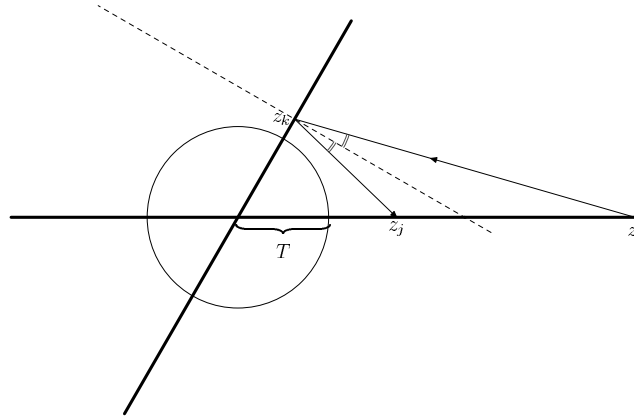


Рис. 2. К вопросу о вкладе от стационарной точки.

Чтобы показать это строго, заметим, что считая убывание по переменной  $z_i$  достаточно сильным (чего мы добиваемся многократным интегрированием по частям), мы можем поменять порядок интегрирования, сделав интеграл по  $z_i$  внешним. Во внутреннем интеграле по  $z_k$  мы можем воспользоваться вариантом теоремы о среднем, что посадит переменную  $z_k$  в точку в окрестности точки отражения  $z_{ji}$ , а это означает, что мы можем функцию  $|z_j - z_k|^{-1/2}$  начать разлагать по формуле Тейлора по степеням  $z_k$ , опять выделяя вклад в старший член асимптотики рассматриваемого интеграла.

Понятно, что это рассуждение, в действительности, приводит нас к необходимости рассматривать третью степень матричного оператора  $\Gamma$ , что и будет сделано в разделе обоснований, но сейчас, несколько небрежно, мы ограничимся данными соображениями.

Итак, изучая в описанном ключе асимптотику ядра оператора  $\Gamma_i(\lambda)$   $\Gamma_j(\lambda)$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ , мы получим разбиение оператора  $\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda)$  в сумму  $\Gamma_j(\lambda)\Gamma_k(\lambda) = A_{jk}(\lambda) + B_{jk}(\lambda)$ , где  $A_{jk}(\lambda)$  - оператор ранга 2, включающий в себя всю «плохую» часть рассматриваемого произведения, т.е. ту, которая выводит за рамки пространства  $L_2(\mathbb{R}^2)$  при  $\text{Im}\lambda \downarrow 0$ , а оператор  $B_{jk}(\lambda)$  - компактный оператор в  $\widehat{H}^{\mu', \theta'}$ , сильно непрерывный по  $\lambda$  при  $\text{Im}\lambda > 0$  и  $0 < c_1 \leq \text{Re}\lambda \leq c_2 < \infty$ , если  $\mu' > 0$  и  $\theta' > 0$  достаточно малы.

Предельный оператор  $A_{jk}(E + i0)$  на функциях из  $\widehat{H}^{\mu', \theta'}$  действует в двумерное пространство функций вида

$$v(x_j)\varphi_j(x_j, 0)|y_j|^{-1/2}e^{i|y_j|\sqrt{E}}(C_1\chi_+(y_j) + C_2\chi_+(-y_j))$$

где  $\chi_+(x)$  определена как гладкая функция, равная тождественно единице при  $x > T + 1$  и нулю при  $x < T$ , а функция  $\varphi_j(x_j, k_j)$  - решение Йоста для одномерной задачи рассеяния с потенциалом  $v(x_j)$ . Пространство таких функций имеет корневые аналитические особенности на оси в импульсном представлении, именно особенности вида  $(p \pm \sqrt{E})^{-1/2}$ . Мы назовём так описанный образ оператора  $A_{jk}(\lambda)$  пространством функций типа  $A_j$ , а векторное пространство таких функций (при фиксированном  $T$ ) обозначим через  $V_i$ .

Таким образом, ядро оператора  $A_{jk}(\lambda)$  имеет вид

$$\Phi_1(z_1|\lambda)\Psi_1(z_2|\lambda) + \Phi_2(z_1|\lambda)\Psi_2(z_2|\lambda),$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  функции типа  $A_j$ . Заметим, что функции  $\Psi_{1,2}(z_2|E+i0)$  при  $|z_2| \rightarrow \infty$  имеют вид расходящихся волн

$$\Psi_{1,2}(z_2|E+i0) \sim \frac{e^{i\sqrt{E}|z_2|}}{\sqrt{|z_2|}}.$$

Следует подчеркнуть, что именно необходимость выделения такого оператора как  $A_{jk}$  является существенной отличительной чертой данной задачи – задачи рассеяния трёх одномерных частиц – в сравнении со случаем задачи рассеяния трёх трёхмерных частиц, рассмотренной в работе [3].

Следствием разбиения  $\Gamma_i(\lambda)\Gamma_j(\lambda)$  является эффективное (с позиций альтернирующей схемы) представление

$$I - \Gamma^2(\lambda) = I - \mathbf{A}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda), \quad (3.9)$$

где оператор  $\mathbf{A}$  – конечно ранга, компоненты которого складываются из  $A_{ij}(\lambda)$ , а компоненты оператора  $\mathbf{B}(\lambda)$  являются компактными в  $\widehat{H}^{\mu',\theta'}$  при достаточно малых положительных  $\mu'$  и  $\theta'$ .

Вероятно следует упомянуть, что операторы  $A_{ij}(\lambda)$  или  $B_{ij}(\lambda)$  не являются компонентами операторных матриц  $\mathbf{A}(\lambda)$  или  $\mathbf{B}(\lambda)$ , соответственно, в смысле стандартных обозначений матричного анализа, но компоненты данных операторных матриц складываются из операторов  $A_{ij}(\lambda)$  или  $B_{ij}(\lambda)$  по тем же правилам, по которым компоненты  $\Gamma^2$  складываются из произведений  $\Gamma_i\Gamma_j$ .

**3.3. Строение оператора  $I - \Gamma$ .** Отсюда и из (3.5),(2.7) путем дополнительной редукции, основанной на уже описанных соображениях, для оператора  $\gamma$  мы получим представление

$$\gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{A}_2$  и  $\mathbf{B}_2$  имеют по-прежнему те же свойства, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

Как следует из (3.4), если  $\varphi_\lambda$  является функцией типа  $A_j$ , а  $\psi \in \widehat{H}^{\mu,\theta}$ , то  $(R_0(\lambda)\varphi_\lambda, \psi)$  имеет предел при  $\text{Im}\lambda \downarrow 0$ .

Как следствие, для искомого скалярного оператора  $\Gamma(\lambda)$  конструкции альтернирующего метода Шварца ведут к представлению:

$$\Gamma(\lambda) = \sum \Gamma_i(\lambda) - \sum_{i \neq j} \Gamma_i(\lambda)\Gamma_j(\lambda) + N(\lambda), \quad N(\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda), \quad (3.11)$$

где  $A(\lambda)$  – оператор конечно ранга, действующий в алгебраическую сумму пространств класса  $A_j$ , а  $B(\lambda)$  – компактный оператор в  $\widehat{H}^{\mu,\theta}$ ,



при  $\mu, \theta > \frac{1}{2}$  (изменение диапазона этих параметров мы обсудим в части строгих обоснований), и имеет сильный предел при  $\text{Im} \lambda \downarrow 0$ . При этом оператор  $N(\lambda)$  обладает тем свойством, что произведение  $R_0(\lambda)N(\lambda)$  имеет слабый предел в  $\widehat{H}^{\mu, \theta}$  при  $\text{Im} \lambda \downarrow 0$  и  $0 < c_1 \leq \text{Re} \lambda \leq c_2 < \infty$  для  $\mu, \theta > \frac{1}{2}$ .

Нашей основной целью будет доказательство следующего утверждения.

**Теорема.** *Резольвента  $R(\lambda)$  имеет слабый предел в  $\widehat{H}^{\mu, \theta}$  при  $\text{Im} \lambda \downarrow 0$  и  $0 < c_1 \leq \text{Re} \lambda \leq c_2 < \infty$ , и этот предел описывается слабым равенством*

$$\begin{aligned} R(E + i0) &= R_0(E + i0)[I - \sum \Gamma_j(E + i0)] \\ &\quad + \sum_{i \neq j} R_0(E + i0)\Gamma_i(E + i0)\Gamma_j(E + i0) \\ &\quad - \widetilde{A}(E + i0) - \widetilde{B}(E + i0) \\ &= R_0(E + i0) - \sum_{i \neq j} R_i(E + i0)\Gamma_j(E + i0) \\ &\quad - \widetilde{A}(E + i0) - \widetilde{B}(E + i0), \end{aligned} \tag{3.12}$$

где  $\widetilde{A}$  оператор конечного ранга, а  $\widetilde{B} = R_0 B$  и  $B$  – компактный оператор с быстро убывающим ядром на бесконечности.

С физической точки зрения оператор  $\widetilde{A}$  описывает волну после преотражений от бесконечных экранов, а  $\widetilde{B}$  – волну, отраженную от центра.

#### §4. ОБОСНОВАНИЯ

**4.1. Асимптотика ядра  $\Gamma_j$ .** Из соображений симметрии достаточно описать координатную асимптотику ядра  $\Gamma_1(z, z'|E + i0)$ , когда  $z$  лежит в первой полосе, а  $z'$  во второй. Ядро “двухчастичной” резольвенты  $R_1(z, z'|\lambda)$  проще всего рассматривать как свертку

$$R_1(z, z'|\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi r(x, x'|\xi) r_0(y, y'|\lambda - \xi)$$

где  $r$  – резольвента одномерной задачи с потенциалом  $v(x)$ ,  $r_0$  – соответствующая свободная резольвента, и  $C$  – контур интегрирования

вокруг положительной полуоси в стандартном отрицательном направлении, отделяющий точку  $\lambda$  от положительной полуоси. Для доказательства этой формулы введём спектральные меры  $E(s)$  и  $E_0(s)$  операторов Шредингера соответствующих одномерных задач, тогда с применением теории вычетов

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C d\xi \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dE(s)dE_0(t)}{(s-\lambda+\xi)(t-\xi)} = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dE(s)dE_0(t)}{(s+t-\lambda)} = R_1(\lambda).$$

В связи с положением точек  $z = (x, y)$  и  $z' = (x', y')$  мы считаем  $x'$  и  $y - y'$  большими, в то время как  $x$  ограничен.

Свободная резольвента  $r_0$  для случая  $\text{Im } k > 0$  дается равенством

$$r_0(y, y'|k^2) = \frac{i}{2k} e^{ik|y-y'|}.$$

Обозначим, далее, через  $\varphi_-$  – решение уравнения

$$-\varphi'' + v\varphi = k^2\varphi,$$

равное  $s(k)e^{ikx}$  при больших положительных  $x$  ( $s(k)$  – коэффициент прохождения, четная функция). Аналогично,  $\varphi_+$  – решение того же уравнения, равное  $s(k)e^{-ikx}$  при больших отрицательных  $x$ . Якобиан этих решений равен  $W[\varphi_+, \varphi_-] = 2iks(k)$ . Резольвента  $r(x, x'|k^2)$  равна

$$\frac{\varphi_+(x)\varphi_-(x')}{W}, \quad x < x' \quad \text{и} \quad \frac{\varphi_-(x)\varphi_+(x')}{W}, \quad x > x'.$$

Определенности ради рассмотрим случай, когда  $x'$  и  $y - y'$  большие положительные. Тогда

$$\begin{aligned} R_1(z, z'|\lambda) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_C dk^2 \varphi_+(x, k) \frac{1}{4k\sqrt{\lambda - k^2}} e^{ikx' + i\sqrt{\lambda - k^2}(y - y')} \\ &= \frac{-1}{4\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_+(x, k) dk}{\sqrt{\lambda - k^2}} e^{ikx' + i\sqrt{\lambda - k^2}(y - y')}, \end{aligned}$$

где ветвь корня  $\sqrt{\lambda - k^2}$  выбирается с положительной мнимой частью. Основной вклад в асимптотику настоящего интеграла вносит точка перевала, превращающаяся в стационарную, когда спектральный параметр  $\lambda$  садится на положительную полуось. Эта точка описывается соотношением

$$x' \sqrt{\lambda - k^2} = k(y - y').$$

При этом в точке перевала

$$k = \frac{\sqrt{\lambda}x'}{|z - z'|} + O(|z - z'|^{-1}), \quad \sqrt{\lambda - k^2} = \frac{\sqrt{\lambda}(y - y')}{|z - z'|} + O(|z - z'|^{-1}),$$

и фазовая функция  $\Phi(k) = kx' + \sqrt{\lambda - k^2}(y - y')$  равна

$$\sqrt{\lambda(x'^2 + (y - y')^2)} = \sqrt{\lambda}|z - z'| + O(1).$$

Вторая производная фазовой функции равна

$$\Phi''(k) = \frac{\lambda(y - y')}{(\lambda - k^2)^{3/2}}$$

и в точке перевала равна

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{|z - z'|^3}{(y - y')^2} + O(1).$$

Метод перевала (или стационарной фазы, если  $\lambda$  садится на вещественную ось) даёт асимптотику

$$R_1(z, z'|\lambda) = \varphi_+(x, k_0) \frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2}\pi^4\sqrt{\lambda}} \frac{e^{i\sqrt{\lambda}|z-z'|}}{\sqrt{|z-z'|}} (1 + O(|z-z'|^{-1})) \quad (4.1)$$

(при принятом нами предположении относительно  $\lambda$ ). Заметим, что эта асимптотика оправдывает соотношение (3.3), поскольку старший член асимптотики с точностью до множителя, зависящего от переменной  $x$ , совпадает с асимптотикой свободной резольвенты.

**4.2. Асимптотика ядра  $\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i$ .** В этом пункте мы, по-существу, повторим аргументацию пункта 3.2.

Имея в виду асимптотику (4.1), обратимся к интегралу

$$I = \tilde{v}(x_j) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\tilde{v}(x_k)\tilde{v}(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k||z_k - z_i||z_i - z'|}}, \quad (4.2)$$

ср. (3.8), где  $\tilde{v} = v\varphi_+$  – финитная функция. Именно этот интеграл с точностью до постоянного множителя описывает асимптотику ядра  $\Gamma_j\Gamma_k\Gamma_i$  при  $y_j \rightarrow \infty$ .

Итак, фиксировав большое  $T \gg 1$ , воспользуемся разбиением единицы  $1 = \chi_T(y_k) + \chi'_T(y_k)$ ,  $\chi'_T(x) = \chi_+(x) + \chi_+(-x)$ , описанным в пункте 3.2. В интеграле

$$I_T = \tilde{v}(x_j) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\chi_T(y_k) \tilde{v}(x_k) \tilde{v}(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z_i| |z_i - z'|}} \quad (4.3)$$

легко выделяется асимптотика при  $y_j \rightarrow \infty$ , поскольку функция  $|z_j - z_k|^{-1/2}$  может быть разложена по степеням  $z_k$ . При этом (опуская зависимость от  $j, k, i$ )

$$I_T = A_T + B_T, \quad (4.4)$$

где  $A_T$  – оператор ранга два с ядром вида

$$A_T(z_j, z') = v(x_j) \varphi_j(x_j, 0) |y_j|^{-1/2} e^{i|y_j| \sqrt{E}} \times (\chi_+(y_j) \psi_+(z') + \chi_+(-y_j) \psi_-(z')), \quad (4.5)$$

функции  $\psi_{\pm}$  удовлетворяют оценке

$$|\psi_{\pm}(z)| \leq \frac{C}{\sqrt{1 + |z|}}, \quad (4.6)$$

а ядро оператора  $B_T$  удовлетворяет оценке

$$|B_T(z_j, z')| \leq \frac{C|v(x_j)|}{(1 + |z_j|)^{3/2} (1 + |z'|)^{1/2}}. \quad (4.7)$$

Разложение вида (4.4) мы назовем разложением типа  $AB$ .

В интеграле

$$I'_T = \tilde{v}(x_j) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\chi'_T(y_k) \tilde{v}(x_k) \tilde{v}(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z_i| |z_i - z'|}} \quad (4.8)$$

выделим окрестность стационарной точки  $z_{ji}$  по переменной  $z_k$ , разбивая интеграл в сумму интегралов. Пусть  $I_p$  – тот интеграл, в котором интегрирование по  $z_k$  ведется по этой окрестности и  $I_o$  – дополнительный интеграл.

В интеграле  $I_o$  можно многократно интегрировать по частям по переменной  $y_k$ . Заметим, что при  $z = x + iy$  и  $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}|z - z_0|^{-k/2} &= -\frac{k}{2}|z - z_0|^{-(k+4)/2}(y - y_0), \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}|z - z_0|^{-k/2} &= \frac{k(k+2)}{4}|z - z_0|^{-(k+4)/2} \\ &\quad - \frac{k(k+4)}{4}|z - z_0|^{-(k+8)/2}(x - x_0)^2.\end{aligned}$$

Это означает, что с точностью до слагаемого типа  $B_T$  (с оценкой (4.7)) мы приходим к интегралам вида

$$\tilde{v}(x_j) \int_{\mathbb{R}^4} \frac{\chi'_T(y_k) \tilde{v}(x_k) \tilde{v}(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z_i|^N |z_i - z'|}} \quad (4.9)$$

с достаточно большим положительным  $N$  (и несколько переопределенной функцией  $\tilde{v}(x_k)$ ), что позволит выделить несколько слагаемых в разложении функции  $|z_j - z_k|^{-1/2}$  по степеням  $z_k$ . Как следствие, интеграл  $I_o$  получает разложение в сумму типа  $AB$ , причём часть  $B$  в этом разложении будет удовлетворять оценке (4.7) с константой  $C$ , которую можно сделать сколь угодно малой при  $T \rightarrow \infty$ .

В интеграле  $I_p$  мы поменяем порядок интегрирования, сделав интеграл по  $z_k$  внутренним. Тогда во внешнем интеграле по переменной  $y_i$  мы можем интегрировать по частям, в силу отсутствия для него стационарной точки (напомним, что для данной геометрии не может быть двух отражений). Это означает, что мы приходим к сумме интегралов вида

$$\tilde{v}(x_j) \int \frac{\chi'_T(y_k) \tilde{v}(x_k) \tilde{v}(x_i) e^{i\sqrt{\lambda}(|z_j - z_k| + |z_k - z_i| + |z_i - z'|)} dz_k dz_i}{\sqrt{|z_j - z_k| |z_k - z_i|^N |z_i - z'|^K}}, \quad (4.10)$$

где  $N + K$  сколь угодно велико и интегрирование по  $z_k$  распространяется на окрестность точки  $z_{ji}$ . Но, как элементарно вытекает из геометрии отражений,  $|z_{ji}| \leq C|z_i|$  с некоторой константой  $C$ , не зависящей от положения точки  $z_j$ . Это опять позволит нам выделить несколько членов разложения функции  $|z_j - z_k|^{-1/2}$  в ряд Тейлора, что доказывает, что интеграл  $I_p$  также разлагается в сумму типа  $AB$ .

Итак, мы можем утверждать, что верно представление типа  $AB$

$$\Gamma_i \Gamma_j \Gamma_k = A_{ijk} + B_{ijk}. \quad (4.11)$$

При этом, процедура выделения асимптотики рассматриваемого произведения, описанная выше, выявляет следующее полезное для дальнейшего свойство. Оператор  $B_{ijk}$  можно представить в виде

$$B_{ijk} = \tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j \tilde{\Gamma}_k + E_{ijk}, \quad (4.12)$$

где  $\tilde{\Gamma}_i$  имеет тот же смысл, что и оператор  $\Gamma_i$ , но для обрезанного потенциала  $v_i \chi_T$ , т.е. финитного, а  $E_{ijk}$  подчиняются оценке (4.7), в которой константа  $C$  может быть сделана сколь угодно малой при  $T \rightarrow \infty$ .

Как было отмечено во введении, здесь мы используем оценку для числа переотражений лучей (в терминах геометрической оптики) от экранов. Эти оценки позволяют ограничить рассмотрение цепочками тройных итераций операторов отражения  $\Gamma_j$ . В случае неравных масс и/или большего числа частиц длина этих цепочек возрастает, но, как следует из результатов Приложения С, остается конечной. Однако, анализу этой ситуации будут посвящены отдельные публикации.

### 4.3. Обращение $I + \Gamma^3$ . Имея в виду равенство

$$(I + \Gamma)^{-1} = (I - \Gamma + \Gamma^2)(I + \Gamma^3)^{-1}, \quad (4.13)$$

замечаем, что процедура построения оператора  $I - \Gamma$  основывается теперь на обращении матричного оператора  $I + \Gamma^3$  с контролем предельного перехода при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$  на подходящем пространстве функций.

Из соотношения (4.11) вытекает представление

$$I + \Gamma^3(\lambda) = I - \mathbf{A}(\lambda) - \mathbf{B}(\lambda), \quad (4.14)$$

где оператор  $\mathbf{A}$  – конечно ранга, компоненты которого складываются из  $A_{ijk}(\lambda)$ , а компоненты оператора  $\mathbf{B}(\lambda)$  – из  $B_{ijk}$ . Оценка (4.7), верная для компонент оператора  $\mathbf{B}$  показывает, что этот оператор действует в пространство функций  $\hat{H}^{\mu, \theta}$  при  $\mu < \frac{1}{2}$ . Для того, чтобы можно было рассматривать этот оператор как компактный, надо исходить из пространства функций  $\hat{H}^{\mu, \theta}$  с достаточно малыми  $\mu$  и  $\theta$ . К сожалению, операторы  $\Gamma_i$  на таких пространствах не определены, точнее, следует требовать, чтобы  $\mu, \theta > \frac{1}{2}$ . Нам выручит, тем не менее, тот факт, что этот оператор действует в пространство функций, с носителем в полосе и искать обратный к  $I + \Gamma^3$  достаточно как раз для таких функций.

Действительно, для  $f \in L_q(\mathbb{R}^2)$  в силу неравенства Гёльдера

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} (1+|z|)^{-1/2} f(z) dz \right| \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} (1+|z|)^{-q'/2} dz \right)^{1/q'} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |f(z)|^q dz \right)^{1/q} < \infty$$

при  $q' > 4$  ( $q$  и  $q'$  – сопряжённые показатели), т.е. необходимо, чтобы  $q < \frac{4}{3}$ . Из теоремы 4.4 (второе утверждение этой теоремы) следует, что  $f$  из  $\widehat{H}^{\mu, \theta}$  лежит в  $L_q$  для некоторого  $q < \frac{4}{3}$ , если  $\mu, \theta > \frac{1}{2}$ . Именно такое пространство мы и фиксируем.

Оператор  $\Gamma_i$  при предельном значении параметра  $\lambda$  переводит функцию из  $\widehat{H}^{\mu, \theta}$  в функцию из  $\widehat{H}^{\nu, \theta}$  для  $\nu > 0$ , но при этом носитель последней лежит в полосе, определяемой областью финитности потенциала  $v$ . В образах Фурье, действие оператора  $\Gamma_i$  на функцию  $\widehat{\varphi} \in H^{\mu, \theta}$  будет определяться равенством

$$\begin{aligned} \Gamma_i \widehat{\varphi}(k, p) &= \iint dk' dp' \delta(p - p') \widetilde{v}(k - k') \frac{\widehat{\varphi}(k', p')}{p'^2 + k'^2 - \lambda} \sim \frac{f(k, p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}} \\ &= \frac{f(k, \sqrt{\lambda}) \eta(p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}} + \frac{f(k, p) - f(k, \sqrt{\lambda}) \eta(p)}{\sqrt{p^2 - \lambda}}, \quad (4.15) \end{aligned}$$

где  $f(k, p) = \pi i \widetilde{v}(k - \sqrt{p^2 - \lambda}) \widehat{\varphi}(\sqrt{p^2 - \lambda}, p)$ ,  $k, p$  – двойственные переменные по отношению к  $x_i, y_i$ , функция  $\widetilde{v}$  является (с точностью до постоянного множителя) образом Фурье произведения  $v(x) \varphi_+(x, k_0)$ , функция  $\eta$  – гладкая финитная, равная тождественно единице в окрестности точки  $\sqrt{\lambda}$ .

Из этого представления вытекает, что  $\Gamma_i \widehat{H}^{\mu, \theta}$  является прямой суммой пространств, одно из которых двумерно и состоит из функций класса  $A_i$ , а второе содержит функции из  $\widehat{H}^{\nu, \theta}$ ,  $\nu = \mu - \frac{1}{2} > 0$ , с носителями в полосе. Мы обозначим это последнее через  $\widehat{H}_i^{\nu, \theta}$ , и тогда  $\Gamma_i \widehat{H}^{\mu, \theta} \subset V_i + \widehat{H}_i^{\nu, \theta}$ . При предельных значениях параметра  $\lambda$  эта сумма является прямой.

Из первой части теоремы 4.4 вытекает, что функция из  $\widehat{H}_i^{\mu, \theta}$  лежит в  $L_r$  для  $r < 2$  в направлении  $i$ -ой полосы. Таким образом, оператор  $\Gamma^3$  мы будем рассматривать, как оператор на пространстве  $\mathbf{W}^{\nu, \theta} = \oplus_i (V_i + \widehat{H}_i^{\nu, \theta})$ .

Для обращения оператора  $I + \Gamma^3$  мы воспользуемся опять альтернирующей процедурой Шварца.

Во-первых, обращение оператора  $I - \mathbf{A}(\lambda)$  контролируется явно, поскольку  $\mathbf{A}(\lambda)$  – оператор конечного ранга. Как мы помним, построение этого оператора зависело от большого параметра  $T$ . Нетрудно убедиться, что при достаточно больших  $T$  обратный оператор  $(I - \mathbf{A}(\lambda))^{-1} = I - \mathbf{\Gamma}_A(\lambda)$  существует и имеет формальный предельный оператор при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ , действующий в алгебраическую сумму пространств типа  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , т.е. в пространство  $\mathbf{V} = \oplus_i V_i$ . Это доказывается в приложении 4.4.

Во-вторых, как уже было замечено, оператор  $\mathbf{B}(\lambda)$  имеет вид:  $\mathbf{B}(\lambda) = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^3(\lambda) + \mathbf{E}(\lambda)$ , где оператор  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\lambda)$  имеет в точности тот же смысл, что и оператор  $\mathbf{\Gamma}(\lambda)$ , но для финитного потенциала  $\tilde{V} = V \cdot \chi_T$ , где  $\chi_T$  – произвольная гладкая финитная функция, равная единице в центральном круге радиуса  $T$  и имеющая носитель в центральном круге радиуса  $(T + 1)$ , а оператор  $\mathbf{E}(\lambda)$  – оператор малой нормы, если  $T$  достаточно велико.

Оператор  $\mathbf{B}$  действует из  $\mathbf{W}^{\nu, \theta}$  в  $\oplus_i \hat{H}_i^{\sigma, \tau}$ , где  $\sigma < \frac{1}{2}$ ,  $\tau > \frac{1}{2}$ . При  $\nu < \sigma$ ,  $\theta < \tau$  он компактен.

Заметим теперь, что оператор  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^3$  не имеет  $-1$  своим собственным значением вплоть до предельных значений  $\lambda$  на положительной полуоси. Более того, некоторая окрестность  $|w + 1| < \delta$  точки  $-1$  не будет содержать собственных значений оператора  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}^3$ . Действительно, во-первых заметим, что в силу равенства

$$(H_0 - \lambda)(H_0 + \tilde{V} - \lambda - i0)^{-1} = I - \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\lambda + i0) = (I - \tilde{G}(\lambda + i0))^{-1}$$

компактный оператор  $\tilde{G}$  не имеет единицу своим собственным значением. Более того, в силу

$$wI - \tilde{G}(\lambda) = wI - \tilde{V}R_0(\lambda) = w(I - w^{-1}\tilde{V}R_0(\lambda)),$$

оператор  $\tilde{G}(\lambda + i0)$  не имеет собственных значений в некоторой окрестности единицы, поскольку единственная точка его спектра это ноль. Как следствие, оператор  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\lambda + i0)$ , аналитически зависящий от  $\tilde{G}(\lambda + i0)$ , не имеет единицу своим собственным числом с целой окрестностью и, на самом деле, единственная точка его спектра это ноль.

В силу альтернирующей схемы, оператор  $\tilde{\mathbf{\Gamma}}$  единственной точкой спектра имеет точку ноль. Действительно, если точка  $-1$  была бы точкой спектра этого оператора, то для некоторых функций  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$



из  $L_2$  мы имели

$$\tilde{\Gamma}_i(\phi_j + \phi_k) = -\phi_i,$$

где индексы  $i, j, k$  образуют все чётные перестановки. Отсюда

$$\tilde{G}_i \sum \phi_j = \phi_i \quad \text{и} \quad \tilde{G}\phi = \phi,$$

где  $\phi = \sum \phi_j$ , чего быть не может. Если  $w \neq 0$  было бы собственным значением  $\tilde{\Gamma}$ , то замена  $\tilde{\Gamma}_i$  на  $-w^{-1}\tilde{\Gamma}_i$  свело дело к предыдущему.

Но тогда оператор  $\tilde{\Gamma}^3$  также имеет собственным числом лишь точку ноль, что и доказывает высказанное выше утверждение.

Поскольку операторная норма  $\mathbf{E}$  может быть сделана сколь угодно малой при больших  $T$ , отсюда вытекает обратимость  $I - \mathbf{B}$ . Итак,  $I - \mathbf{B}(\lambda)$  имеет обратный  $I - \Gamma_B(\lambda)$ . Заметим, что этот обратный имеет предельный в сильном смысле оператор при  $\text{Im } \lambda \downarrow 0$ .

Наконец, произведение  $\Gamma_A(\lambda)\Gamma_B(\lambda)$  является опять оператором конечного ранга и обратимость оператора  $I - \Gamma_A(\lambda)\Gamma_B(\lambda)$  не требует привлечения новых аргументов по сравнению с обратимостью оператора  $I - \mathbf{A}(\lambda)$ , т.е. является следствием рассмотрений приложения 4.4.

Согласно методу Шварца, мы можем заключить, что при  $\text{Im } \lambda > 0$  оператор  $(I + \Gamma^3)^{-1}$  имеет представление

$$(I + \Gamma^3)^{-1} = I - \mathbf{A}_1(\lambda) - \mathbf{B}_1(\lambda), \quad (4.16)$$

представляющее разложение типа  $AB$ , т.е. операторы  $\mathbf{A}_1$  и  $\mathbf{B}_1$  имеют те же свойства, что и операторы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , матричные компоненты  $\mathbf{A}_1(\lambda)$  являются операторами конечного ранга, действующими в алгебраическую сумму пространств типа  $A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , а матричные компоненты  $\mathbf{B}_1$  являются компактными операторами в  $\mathbf{W}^{\nu, \theta}$ , сильно непрерывными по  $\lambda$  при  $\text{Im } \lambda \geq 0$  и  $0 < c_1 \leq \text{Re } \lambda \leq c_2 < \infty$ , если  $\nu$  и  $\theta$  достаточно малы.

**4.4. Строение операторов  $I - \Gamma$  и  $R(\lambda)$ .** Теперь мы можем перейти к уточнению положений пункта 3.3. Из соотношений (4.13), (4.14) легко выводим, что

$$\gamma = (I - \Gamma)\text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3) - \mathbf{N},$$

где  $\mathbf{N}$  допускает разложение типа  $AB$ . Однако вычисление (4.15) показывает, что на функциях из  $\hat{H}^{\mu, \theta}$  при  $\mu, \theta > \frac{1}{2}$  мы можем произведение  $\Gamma\text{diag}(\Gamma_i)$  также считать допускающим разложение типа  $AB$ . Это полностью оправдывает представление (3.10) и, тогда, все последующие утверждения пункта 3.3.

Следует отметить, что хорошо известный эффект скачка амплитуды волновой функции при перерасеянии на экранах, см. [7], является эффектом второго порядка – он полностью контролируется членами  $\sum_{i \neq j} R_i \Gamma_j$  в формуле (3.12).

#### А. ОБРАЩЕНИЕ КОНЕЧНОМЕРНОГО ОПЕРАТОРА

Мы рассмотрим здесь процедуру обращения оператора

$$A = \begin{pmatrix} I - \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle - \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & -\varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & -\varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle \\ -\varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & I - \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle - \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & -\varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle \\ -\varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle & -\varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle & I - \varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle - \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle \end{pmatrix}$$

Через  $A_1$  обозначим  $I - A$  и вместо оператора  $A^{-1}$  будем искать оператор  $W = A^{-1} - I$ , определённый соотношением

$$A_1 W = W - A_1.$$

При этом оператор  $A_1$  имеет вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle + \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & \varphi_1 \langle \psi_{13}, * \rangle & \varphi_1 \langle \psi_{12}, * \rangle \\ \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle + \varphi_2 \langle \psi_{23}, * \rangle & \varphi_2 \langle \psi_{21}, * \rangle \\ \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle & +\varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle & \varphi_3 \langle \psi_{31}, * \rangle + \varphi_3 \langle \psi_{32}, * \rangle \end{pmatrix}$$

Естественно искать оператор  $W$  в виде:

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1 \alpha_{11} & \varphi_1 \alpha_{12} & \varphi_1 \alpha_{13} \\ \varphi_2 \alpha_{21} & \varphi_2 \alpha_{22} & \varphi_2 \alpha_{23} \\ \varphi_3 \alpha_{31} & \varphi_3 \alpha_{32} & \varphi_3 \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

Функционалы  $\alpha_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) подлежат определению. Для определённости выпишем систему уравнений для элементов первого столбца

$$\begin{aligned} \langle \psi_{12}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{13}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{13}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{12}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{11} - \langle \psi_{12}, * \rangle - \langle \psi_{13}, * \rangle, \\ \langle \psi_{23}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{21}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{23}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{21}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{21} - \langle \psi_{23}, * \rangle, \\ \langle \psi_{32}, \varphi_1 \rangle \alpha_{11} + \langle \psi_{31}, \varphi_2 \rangle \alpha_{21} + \langle \psi_{31}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} + \langle \psi_{32}, \varphi_3 \rangle \alpha_{31} \\ = \alpha_{31} - \langle \psi_{32}, * \rangle. \end{aligned}$$

Аналогичные системы уравнений для функционалов  $\alpha_{j2}$  ( $j = 1, 2, 3$ ) и  $\alpha_{j3}$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Для наших приложений эти системы разрешимы в связи с малостью коэффициентов – скалярных произведений – при больших  $T$ .

В.  $L_p$  ОЦЕНКА ОБРАЗОВ ФУРЬЕ ГЁЛЬДЕРОВЫХ ФУНКЦИЙ.

**Теорема. В.1** Пусть

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p dx = O(|h|^{\mu p}), \quad 1 < p < 2, \quad \frac{1}{p} - \frac{1}{2} < \mu < 1, \quad (4.17)$$

тогда  $\widehat{f}(\xi)$  лежит в  $L_q$  по любому направлению при  $\frac{p}{p+p\mu-1} \leq q < 2$ .  
Если (4.17) выполнено при

$$\min\left\{1, \frac{2n}{2+n}\right\} < p < 2, \quad n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) < \mu < 1, \quad n \geq 2, \quad (4.18)$$

то  $\widehat{f} \in L_q(\mathbb{R}^n)$  при  $\frac{pn}{pn+\mu p-n} \leq q < 2$ .

Действительно, преобразование Фурье (по  $x$ ) функции  $f(x+h)$  равно  $e^{i\xi \cdot h} \widehat{f}(\xi)$  и из ограниченности оператора Фурье  $L_p \rightarrow L_{p'}$  ( $p'$  — сопряжённый показатель) выводим

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\sin \frac{\xi \cdot h}{2}|^{p'} |\widehat{f}(\xi)|^{p'} d\xi = O(|h|^{\mu p'}).$$

Заметим, что  $|t| \leq C |\sin t|$  при  $|t| < \frac{\pi}{2}$ , откуда

$$\int_{|\xi \cdot h| < 1} |\xi \cdot h|^{p'} |\widehat{f}(\xi)|^{p'} d\xi = O(|h|^{\mu p'}).$$

Как следствие,

$$\int_0^{1/h_j} d\xi_j \xi_j^{p'} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\tilde{\xi}_j |\widehat{f}(\xi)|^{p'} = O(h_j^{(\mu-1)p'}),$$

где  $\tilde{\xi}_j$  — дополнительная к  $\xi_j$  составляющая аргумента  $\xi$  и, для определённости,  $h_j > 0$ . Симметризуя оценку, запишем

$$\int_0^{\xi_1} d\eta_1 \dots \int_0^{\xi_n} d\eta_n |\eta|^{p'} |\widehat{f}(\eta)|^{p'} = O(|\xi|^{(1-\mu)p'})$$

(считая для определённости все  $\xi_j > 0$ ). Определим вспомогательную функцию

$$\varphi(\xi) = \int_1^{\xi_1} d\eta_1 \dots \int_1^{\xi_n} d\eta_n |\eta|^q |\widehat{f}(\eta)|^q.$$

При этом по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &\leq \left( \int_1^{\xi_1} d\eta_1 \dots \int_1^{\xi_n} d\eta_n |\eta|^{p'} |\widehat{f}(\eta)|^{p'} \right)^{q/p'} \prod \xi_j^{1-q/p'} \\ &\leq C |\xi|^{(1-\mu)q} \prod \xi_j^{1-q/p'}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_1^{\xi_1} d\eta_1 \dots \int_1^{\xi_n} d\eta_n |\widehat{f}(\eta)|^{p'} &= \int_1^{\xi_1} d\eta_1 \dots \int_1^{\xi_n} d\eta_n \frac{1}{|\eta|^q} \frac{\partial^n \varphi(\eta)}{\partial \eta_1 \dots \partial \eta_n} \\ &= \frac{\varphi(\xi)}{|\xi|^q} + \sum (\pm) \int_1^{\xi_{j_1}} d\eta_{j_1} \dots \int_1^{\xi_{j_k}} d\eta_{j_k} \varphi(\zeta) \frac{\partial^k}{\partial \eta_{j_1} \dots \partial \eta_{j_k}} \frac{1}{|\zeta|^q}, \quad (4.19) \end{aligned}$$

где суммирование ведётся по всем выборкам  $(j_1, \dots, j_k)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , при этом  $\zeta_i = \eta_i$  при  $i$  равном одному из  $j_l$  в рассматриваемой выборке и  $\zeta_i = \xi_i$  в противном случае. Каждое слагаемое в правой части (4.19) имеет порядок

$$O(|\xi|^{-\mu q} \prod \xi_j^{1-q/p'}).$$

При  $1 - \frac{q}{p'} - \mu q \leq 0$ , т.е. при  $q \geq \frac{p}{p+p\mu-1}$ , интеграл в левой части (4.19) по любой одной выделенной переменной  $\eta_j$  остается ограниченным. При  $n(1 - \frac{q}{p'}) - \mu q \leq 0$ , т.е. при  $q \geq \frac{pn}{pn+\mu p-n}$ , весь кратный интеграл слева в (4.19) остаётся ограниченным. Случаи других знаков переменных  $\xi_j$  аналогичны. Условия на  $p$  и  $\mu$  в (4.17) и (4.18) обеспечивают непустоту интервалов изменения  $q$ . Теорема доказана.

С.1 ОЦЕНКА ЧИСЛА ДОПУСТИМЫХ В ПРИВЛИЖЕНИИ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ ПЕРЕРАССЕЙНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЯ  
НЕСКОЛЬКИХ ОДНОМЕРНЫХ ЧАСТИЦ С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ  
МАССАМИ

В данном разделе мы изучаем задачу квантового рассеяния нескольких одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами отталкивания и произвольными массами. Мы рассмотрим последовательно случаи рассеяния трех и четырех частиц, что позволяет обобщить приведенные результаты на произвольный многочастичный случай. Для этих случаев мы построим оценки количества возможных парных перерассейний, пользуясь законами геометрической оптики. При этом в каждом последующем случае мы воспользуемся результатами, полученными на предыдущем шаге, построив некоторую рекуррентную процедуру.

**4.5. Три частицы с произвольными массами.** Мы рассматриваем здесь задачу рассеяния трех одномерных квантовых частиц с финитными парными потенциалами  $v_i$ . Массы частиц  $m_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  произвольны. Число степеней свободы в данной задаче равно трем:  $\{r_1, r_2, r_3\}$ , где  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – радиус-вектор  $i$ -й частицы. После перехода в систему отсчета, связанную с движением центра масс, т.е. после наложения условия

$$\sum_{i=1}^3 m_i r_i = 0$$

число степеней свободы становится равным двум. Таким образом, эффективное конфигурационное пространство является двумерной гиперплоскостью, которую мы будем называть  $\Upsilon$ . Пусть  $\mathbf{z}$ , – координата на  $\Upsilon$  и  $\mathbf{q}$  – момент, сопряженный координате в смысле Фурье преобразования.

Введем на выделенной плоскости три пары Якобиевых координат  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  (индексы  $(i, j, l)$  образуют правильную циклическую перестановку чисел  $(1, 2, 3)$ ):

$$x_i = \sqrt{2\mu_{lj}}(r_l - r_j), \quad y_i = \sqrt{2\mu_{lj,i}} \left( \frac{m_l r_l + m_j r_j}{m_l + m_j} - r_i \right), \quad (4.20)$$

где  $\mu_{lj} = \frac{m_l m_j}{m_l + m_j}$ ,  $\mu_{lj,i} = \frac{(m_l + m_j)m_i}{m_l + m_j + m_i}$ . Наряду с координатами Якоби  $\{x_i, y_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  введем сопряженные им моменты  $\{k_i, p_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,

$k_i, p_i \in \mathbf{R}$ . При этом

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{pmatrix} k_i \\ p_i \end{pmatrix}.$$

Введенные в (4.20) системы координат связаны друг с другом преобразованием поворота

$$\begin{cases} x_i = \alpha_{ij}x_j + \beta_{ij}y_j, \\ y_i = -\beta_{ij}x_j + \alpha_{ij}y_j \end{cases} \quad (4.21)$$

$$\alpha_{ij} = - \left[ \frac{m_i m_j}{(m_i + m_l)(m_j + m_l)} \right]^{1/2}, \quad \beta_{ij} = \varepsilon_{ji} (1 - \alpha_{ij}^2)^{1/2},$$

где  $\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji} = +1$ .

При этом носитель трехчастичного потенциала

$$V = \sum_{i=1}^3 v_i(x_i), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.22)$$

сосредоточен в объединении трех полос, определяемых условиями  $|x_i| < b_i$ , где  $b_i$  – ширина носителя парного потенциала. В этой и в других многочастичных задачах, следуя терминологии работы [7], мы будем называть многообразия, определяемые условиями  $x_i = 0$ , “экранами”. Эти “экраны” отвечают многочастичным (в данной задаче трехчастичным) конфигурациям системы, в которых частицы в  $i$ -й паре совпадают. Отметим, что все экраны пересекаются в одной точке, что отвечает совпадению координат всех трех частиц.

На данной гиперплоскости определен оператор Шредингера

$$H = -\Delta + V, \quad \Delta = \Delta_{x_i} + \Delta_{y_i}$$

где  $V$  задан в уравнении (4.22), и условия излучения на бесконечности.

Следуя работе [7], переформулируем данную задачу рассеяния трех квантовых частиц как задачу дифракции двумерной плоской волны на системе трех пересекающихся полупрозрачных бесконечных полос. Нас будет интересовать максимальное число взаимодействий волны с полосами, что отвечает максимальному количеству возможных парных перерассеяний в исходной постановке задачи. Взаимодействие волны с полосами происходит по законам геометрической оптики, т.е. каждое взаимодействие сводится к прохождению или отражению. При этом прошедшая или отразившаяся волна умножается на коэффициент прохождения или отражения соответственно. Количество таких взаимодействий очевидно связано с углами, под которыми пересекаются

“экраны” на плоскости. Эти углы, в свою очередь, определяются соотношением масс частиц.

**4.6. Интерпретация дифракционной картины в терминах задачи рассеяния.** Как указывалось, например, в работе [7] дифракционная картина легко интерпретируется в терминах задачи рассеяния. Плоскость  $\Upsilon$  разделяется тремя экранами, пересекающимися в одной точке, на шесть секторов, каждый из которых соответствует одной из шести возможных перестановок трех частиц на оси. Дифрагирующая на системе экранов (полос) двумерная плоская волна приходит из бесконечности в одном из секторов, соответствующем начальной перестановке частиц. Взаимодействуя с полосой (границей сектора) по законам геометрической оптики, эта волна породит отраженную (перестановка частиц при парном перерассеянии сохранилась) и прошедшую (перестановка частиц при парном перерассеянии изменилась, т.е. частицы данной пары поменялись местами) волны. Каждая из рожденных волн (прошедшая и отраженная) вновь взаимодействует с некоторой полосой (т.е. происходит новое парное перерассеяние) или уходит на бесконечность без взаимодействия (парное перерассеяние не происходит). При этом фронт падающей волны делится прямой, параллельной волновому вектору (волновой вектор фиксирует распределение энергии между подсистемами трехчастичной системы) и проходящей через точку пересечения трех экранов, на две части, одна из которых взаимодействует с одной границей сектора, а другая - с другой границей. Некоторая часть фронта падающей волны взаимодействует с окрестностью вершины сектора, порождая расходящуюся волну. Этот процесс соответствует трехчастичному перерассеянию.

Очевидно, в каждом секторе возникает система волн, рожденных парными взаимодействиями. Для каждой взаимодействующей с границей сектора волны будет существовать волна, двойственная ей в соседнем относительно этой границы секторе.

**4.7. Оценка количества парных перерассеяний для фиксированной перестановки.** Поставим задачу следующим образом. Какое максимальное количество взаимодействий с экранами сектора до ухода на бесконечность внутри этого же сектора может претерпеть

плоская волна, падающая в сектор из бесконечности, при произвольном конечном растворе сектора. В этой постановке задачи мы не принимаем в расчет волны, пришедшие в данный сектор из других секторов. Тем не менее эти волны могут быть учтены с помощью некоторой оценки сверху.

Пусть некоторый луч из волнового фронта падающей волны падает на границу сектора с раствором  $\gamma$  под углом  $\alpha$ . Пусть  $f_\gamma(\alpha)$  – считающая функция или функция числа взаимодействий  $N$  луча с границами сектора:

$$f_\gamma : \alpha \rightarrow N \in \mathbf{N}.$$

По построению видно, что  $\beta = \gamma + \alpha$ . Таким образом, после одного взаимодействия

$$f_\gamma(\alpha) = f_\gamma(\alpha + \gamma) + 1 \quad (4.23)$$

мы возвращаемся к исходной постановке, но уже с новым значением функции  $f_\gamma$ . При этом аргумент считающей функции  $f_\gamma$  как функции числа взаимодействий монотонно растет.

С другой стороны угол  $\beta$  не превышает  $\pi$ . В противном случае луч уходит на бесконечность без взаимодействия. В этом смысле мы можем ввести ограничение

$$f_\gamma(x \geq \pi) = 0.$$

Из уравнения (4.23) и сказанного выше следует, что после  $N$  взаимодействий

$$f_\gamma(\alpha) = f_\gamma(N\gamma + \alpha) + N. \quad (4.24)$$

Пусть число  $N$  совпадает с максимальным числом взаимодействий луча с границами сектора. Тогда

$$N\gamma + \alpha \geq \pi.$$

Отсюда следует, что

$$N \geq \frac{\pi - \alpha}{\gamma}.$$

Вспоминая, что  $N$  является целым числом, можно сказать, что

$$N = \lceil \frac{\pi - \alpha}{\gamma} \rceil, \quad (4.25)$$

где  $\lceil * \rceil$  – операция округления до целого числа сверху.



**4.8. Случай четырех частиц и возможные обобщения.** Рассмотрим теперь случай рассеяния в системе четырех частиц ( $N = 4$ ). Этот случай является переходным между простейшей (3-х частичной) системой нескольких одномерных частиц и произвольной системой  $N$  частиц. В то же время анализ этого случая по-прежнему остается наглядным, поскольку эффективное конфигурационное пространство, как следует из предыдущих рассуждений, трехмерно.

Используя, как это было описано выше, аналогию задачи рассеяния и задачи дифракции, будем анализировать рассеяние трехмерной плоской волны с волновым вектором  $\mathbf{q}_0$ ,  $|q_0| = 1$  внутри бесконечной трехгранной выпуклой призмы. Отметим, что каждая такая фиксированная призма соответствует всевозможным конфигурациям четырех частиц при сохранении фиксированной перестановки частиц, например  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Каждая из ее граней отвечает совпадению координат двух из четырех частиц при фиксированной перестановке. Взаимодействие волны с гранями призмы происходит по закону геометрической оптики.

Введем ориентированную “внутри” систему нормалей к граням призмы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  и некоторый внутренний единичный вектор  $\hat{\mathbf{h}}$  призмы с началом в ее вершине, такой, что выполняются соотношения

$$\langle \mathbf{n}_i, \hat{\mathbf{h}} \rangle = D > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Введем также единичные вектора  $\hat{\mathbf{u}}_1, \hat{\mathbf{u}}_2, \hat{\mathbf{u}}_3$ , ориентированные вдоль ребер призмы и начинающиеся в ее вершине, таким образом, что

$$\langle \mathbf{n}_i, \hat{\mathbf{u}}_j \rangle = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Введем также для определенности угловой растров граней призмы

$$\alpha_i = \arccos \langle \hat{\mathbf{u}}_j, \hat{\mathbf{u}}_k \rangle,$$

где  $\{i, j, k\}$  – циклическая перестановка чисел  $\{1, 2, 3\}$ . Значения  $\alpha_i$  определяются геометрией призмы, то есть соотношением масс частиц системы, аналогично тому, как это было определено выше в данном разделе. При этом

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i < 2\pi, \quad \alpha_i \geq d > 0,$$

где  $d$  – некоторый положительный параметр, определяемый соотношением масс частиц системы.

Покажем, что для любой ориентации вектора  $\mathbf{q}_0$  число переотражений плоской волны на гранях бесконечной выпуклой трехгранной призмы оказывается конечным. После конечного числа переотражений волна уходит на бесконечность вдоль некоторого внутреннего луча призмы с началом в ее вершине.

В качестве первого шага определим произвольную цепочку  $\Omega_l$  взаимодействий волны с гранями призмы. Здесь индекс  $l$  обозначает длину цепочки или количество учтенных последовательных взаимодействий. Цепочка представляет из себя некоторую последовательность чисел  $1, 2, 3$ , где каждое число обозначает грань призмы, от которой произошло отражение при данном взаимодействии

$$\Omega_l = (k_1, k_2, \dots, k_l), \quad k_j \in \{1, 2, 3\}, \quad k_j \neq k_{j+1}.$$

Условимся считать, что номер грани совпадает с номером нормали к ней. Рассмотрим цепочку  $\Omega_3 = (1, 2, 3)$ . Эта цепочка описывает три последовательных отражения плоской волны от граней 1, 2 и 3. Будем следить за изменением проекции волнового вектора  $\mathbf{q}_0$  плоской волны на введенный выше вектор  $\hat{\mathbf{h}}$  в результате трех последовательных взаимодействий.

На каждом шаге при условии, определяющем возможность взаимодействия с плоскостью  $i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ),

$$\langle \mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{n}_i \rangle < 0, \tag{4.26}$$

возникает новый волновой вектор

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i-1} - 2\mathbf{n}_i \langle \mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{n}_i \rangle. \tag{4.27}$$

Нетрудно видеть, что условия (4.26) осуществления цепочки взаимодействий  $\Omega_3$  могут быть описаны в следующем виде

$$\langle \mathbf{q}_0, \mathbf{m}_i \rangle < 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.28}$$

Введенные здесь вектора  $\mathbf{m}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  связаны с векторами нормалей  $\mathbf{n}_i$  простыми соотношениями

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{n}_1, \tag{4.29}$$

$$\mathbf{m}_2 = \mathbf{n}_2 - 2\mathbf{n}_1 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle, \tag{4.30}$$

$$\mathbf{m}_3 = \mathbf{G}_{32} - 2\mathbf{n}_1 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{G}_{32} \rangle, \quad \mathbf{G}_{32} = \mathbf{n}_3 - 2\mathbf{n}_2 \langle \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3 \rangle. \tag{4.31}$$

Таким образом, вектор  $\mathbf{m}_1$  совпадает с единичной нормалью  $\mathbf{n}_1$ , вектор  $\mathbf{m}_2$  возникает как результат отражения нормали  $\mathbf{n}_2$  от плоскости

с нормалью  $\mathbf{n}_1$ . Наконец, вектор  $\mathbf{m}_3$  возникает как результат последовательных отражений нормали  $\mathbf{n}_3$  от плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_2$ , а затем – от плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_1$ . Возвращаясь к определению оператора  $\tau_i$  как оператора отражения от плоскости  $i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , можно описать вектора  $\mathbf{m}_i$  как

$$\mathbf{m}_1 = \mathbf{n}_1, \quad \mathbf{m}_2 = \tau_1 \mathbf{n}_2, \quad \mathbf{m}_3 = \tau_1 \tau_2 \mathbf{n}_3. \quad (4.32)$$

Мы готовы теперь определить изменение проекции момента  $\mathbf{q}_0$  плоской волны в результате цепочки  $\Omega_3 = (1, 2, 3)$  взаимодействий с гранями призмы как

$$\Delta\Omega_3 = \langle \mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_0, \hat{\mathbf{h}} \rangle = -2 \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{n}_i, \hat{\mathbf{h}} \rangle \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{m}_i \rangle.$$

Это выражение является результатом некоторых несложных вычислений. Поскольку, согласно сказанному выше  $\langle \mathbf{n}_i, \hat{\mathbf{h}} \rangle = D > 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$ ,

$$\Delta\Omega_3 = -2D \sum_{i=1}^3 \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{m}_i \rangle. \quad (4.33)$$

Данное выражение в совокупности с условиями (4.28) определяет знакопостоянную сумму, ограниченную сверху выражением  $2q_0$ .

Отметим, что выражение (4.33) является также ограниченным снизу. Покажем это. Набор условий (4.28) определяет некоторую выпуклую призму  $\Pi_3$ , внутри которой может лежать вектор  $-\mathbf{q}_0$ . Определим ребра выпуклой призмы  $\Pi_3$  как

$$\hat{\mathbf{v}}_k = [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j],$$

где набор  $\{k, i, j\}$  является циклической перестановкой чисел 1, 2, 3. Данное выражение возникает как результат одновременного выполнения любой пары предельных условий (4.28). Выберем единичный вектор  $-\mathbf{q}_0$  как одно из ребер призмы  $\Pi_3$ , например,

$$-\mathbf{q}_0^{(3)} = q_0 \frac{[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]}{|[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]|},$$

поскольку именно на ребрах  $\Pi_3$  будет реализовываться условие максимального углового удаления вектора  $-\mathbf{q}_0$  от направления  $\sum_{i=1}^3 \mathbf{m}_i$ , а

следовательно, и минимум выражения (4.33). Определим теперь выражение (4.33) на векторе  $-\mathbf{q}_0^{(3)}$

$$\Delta\Omega_3^{(3)} = 2Dq_0 \frac{\langle [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2], \mathbf{m}_3 \rangle}{|[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2]|}. \quad (4.34)$$

Как легко видеть из определения (4.29)-(4.31) выполняется равенство

$$\langle [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2], \mathbf{m}_3 \rangle = \langle [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], \mathbf{n}_3 \rangle = \langle [\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j], \mathbf{n}_k \rangle = V,$$

где, как и выше, набор  $\{i, j, k\}$  является циклической перестановкой чисел 1, 2, 3. Минимизируя теперь выражение (4.34) по всем возможным перестановкам, получим минимальную вариацию

$$\Delta\Omega_3^{min} = 2DVq_0 \min_k \frac{1}{|[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_j]|}. \quad (4.35)$$

в исходных терминах.

Рассмотрим теперь цепочку произвольной длины, предполагая, что цепочка может быть бесконечной. Повторяя описанные выше рассуждения на каждом шагу, приходим к следующему выражению для изменения проекции момента

$$\Delta\Omega_\infty = -2D \sum_{i=1}^{\infty} \langle \mathbf{q}_0, \mathbf{m}_i \rangle. \quad (4.36)$$

Отметим, что, как было показано при изучении рассеяния в трехчастичной подсистеме, структура цепочки может содержать лишь не более чем

$$N^e = \max_k \left\{ \left[ \frac{\pi}{\pi - \arccos \langle \mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j \rangle} \right] \right\}$$

шагов циклической перестановки любых двух индексов. Это означает, что при осуществлении каждых  $N^e + 1$  шагов цепочки приращение проекции вектора  $\mathbf{q}_0$  на направление  $\hat{\mathbf{h}}$  будет составлять величину  $\Delta\Omega_3^{min}$ , определяемое условием (4.35). Таким образом, вследствие ограниченности полной вариации момента на выделенное направление и знакопостоянности ряда, мы приходим к заключению, что длина цепочки ограничена выражением

$$N = N^e \frac{2q_0}{\Delta\Omega_3^{min}}$$

Заметим, что мы оцениваем количество переотражений луча в приближении геометрической оптики в одной призме, но эта оценка верна и глобально. В силу звездности системы призм уход луча из исходной

призмы и его отражение от граней смежной призмы лишь увеличивает скорость увеличения проекции луча на выбранное исходно направление.

Отметим также, что приведенные в данном разделе оценки с некоторыми техническими усложнениями обобщаются и на случай произвольного числа частиц в соответствии с рекуррентной процедурой, предполагающей конечность числа возможных перерассеяний (в приближении геометрической оптики) во всех возможных подсистемах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. A. M. Budylin, V. S. Buslaev, *Reflection operator and their applications to asymptotic investigations of semiclassical integral equations*. — Adv. Soviet Math. **7**, No. 6 (1991), 79–103.
2. E. Mourre, *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*. — Commun. Math. Phys. **78** (1981), 391–408.
3. L. D. Faddeev, *Mathematical aspects of the three-body problem of the quantum scattering theory*. Daniel Davey and Co., Inc., 1965.
4. P. Perry, I. M. Sigal, B. Simon, *Spectral analysis of  $N$ -body Schrödinger operators*. — Ann. Math. **114** (1981), 519–567.
5. V. S. Buslaev, S. B. Levin, P. Neittaanmäki, T. Ojala, *New approach to numerical computation of the eigenfunctions of the continuous spectrum of three-particle Schrödinger operator: I. One-dimensional particles, short-range pair potentials*. — J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 285205, (pp.17), 2010.
6. V. S. Buslaev, S. B. Levin, *Behavior of the Eigenfunctions of the Many-particle Schrödinger Operator. I. One-dimensional Particles*. — Amer. Math. Soc. Transl. **225** No. 2 (2008), 55–71.
7. V. S. Buslaev, S. P. Merkuriev, S. P. Salicov, *О дифракционном характере рассеяния в квантовой системе трех одномерных частиц*. — Проблемы матем. физики, Ленингр. Университет, Ленинград **9** (1979), 14–30.
8. V. S. Buslaev, S. P. Merkuriev, S. P. Salicov, *Описание парных потенциалов, для которых рассеяние в системе трех одномерных частиц свободно от дифракционных эффектов. Граничные задачи математической физики и смежные вопросы в теории функций*. — Зап. Научн. Сем. ЛОМИ. **84** No. 11 (1979), 16–22.
9. А. М. Будылин, Д. С. Буслаев, *Квазиклассическая асимптотика резольвенты интегрального оператора свёртки с синус-ядром на конечном интервале*. — Алгебра и Анализ **7** (1995), 107–157.
10. Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния*. СПбГУ, 1994.
11. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащённые гильбертовы пространства*. (Обобщённые функции), вып. 4, ФМ, 1961.
12. К. Морен, *Методы гильбертова пространства*. Мир, 1965.
13. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*. Т. 3, Теория Рассеяния. Мир, 1982.

14. М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, Т. 4, Анализ операторов. Мир, 1982.
15. С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев, *Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц*. Наука, 1985.

Baybulov I. V., Budylin A. M., Levin S. B. Few one-dimensional quantum particles scattering problem. The structure and asymptotics of the resolvent kernel limit values.

The present work offers a new approach to the construction of the coordinate asymptotics of the Schroedinger operator resolvent kernel in the scattering problem of three one-dimensional quantum particles with short-range pair potentials. Within the framework of this approach the asymptotics of the absolutely continuous spectrum eigenfunctions of the Schroedinger operator can be constructed. In the work the possibility of the generalization of the suggested approach for the case of scattering problem of N particles with arbitrary masses is discussed.

Ст.-Петербургский  
Государственный университет,  
Университетская наб. 7/9,  
Ст.-Петербург, Россия  
*E-mail*: molezz@bk.ru  
*E-mail*: a.budylin@spbu.ru  
*E-mail*: s.levin@spbu.ru

Поступило 30 октября 2017 г.