Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 461, 2017 г.

В. М. Бабич

ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОСТИ И ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ИНТЕРФЕРЕНЦИОННОЙ ГОЛОВНОЙ ВОЛНЫ

§1. Введение

В работе [1] В. С. Булдырев рассмотрел плоскую задачу рассеяния волны на границе раздела двух сред. Волна порождена точечным источником высокочастотных колебаний. Предполагается, что возникает головная волна интерференционного типа, которую далее в настоящей работе мы будем называть волной Булдырева. Формулы, описывающие волну Булдырева (см.[1]), на первый взгляд противоречат принципу локальности.

Когда волна от точечного источника падает на прямую, разделяющую две полуплоскости, (при должном выборе параметров, характеризующих волновые процессы в этих полуплоскостях) это (кажущееся) противоречие рассматривается в работе [2]. Там же показано, что здесь с принципом локальности нет противоречия, однако общая формула для волны Булдырева, приведенная в работе [2], нуждается в поправках. Здесь будут сделаны эти поправки и будет показано, что в отношении принципа локальности в основной формуле для волны Булдырева (см.[1]) все в порядке.

§2. Исходные формулы

Пусть, как и работах [1,2], гладкая кривая S разделяет области Ω_1 и Ω_2 $(\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S = R^2)$. Скорость волн в Ω_1 – $c_1 = \text{const} > 0$, в Ω_2 скорость $c_2 = c_2(x,y)$, где $c_2(x,y)$ – гладкая положительная функция. В Ω_1 волновой процесс описывается уравнением

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{c_1^2})U_1 = -\delta(x - x_0, y - y_0), \;\; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \;\; (x_0, y_0) \in \Omega_1. \quad (2.1)$$

Ключевые слова: принцип локальности,интерференционная головная волна.
Работа была поддержана грантом РФФИ №17-01-00529-А.

В Ω_2 - уравнением:

$$(\Delta + \frac{\omega^2}{c_2^2(x,y)})U_2 = 0, \ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{2.2}$$

Краевые условия такие же как в работах [1,2]:

$$U_1|_S = U_2|_S, \quad \frac{1}{\varkappa_1}\frac{\partial U_1}{\partial n}\bigg|_S = \frac{1}{\varkappa_2}\frac{\partial U_2}{\partial n}\bigg|_S, \tag{2.3}$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали, внешней по отношению к области Ω_2, $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ - гладкие положительные функции на S. Пусть на S (и стало быть вблизи S) $c_2(x,y) > c_1$ и луч M_0K (см. рис. 1), вышедший из точки M_0, является предельным в том смысле, что преломленный луч касается S. Так будет, если угол скольжения α_0 луча M_0K равен $\arccos\frac{c_1}{c_2}$ в точке K, что мы и будем предполагать. Волновой процесс

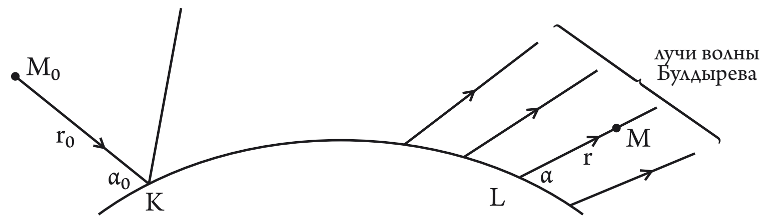

Рис. 1. Луч падающей волны и лучи волны Булдырева.

в окрестности точки K породит сосредоточенную в окрестности S в области Ω_2 волну, которая, двигаясь со скоростью c_2, в свою очередь породит в Ω_1 интерференционную головную волну - волну Булдырева. Лучи волны Булдырева – это прямые, выходящие из точек кривой S под углом скольжения $\arccos\frac{c_1}{c_2}$ (см. рис. 1)

Выражение для волны Булдырева (см.формулу (2.8) работы [1]) в первом приближении в наших обозначениях можно записать в виде:

$$U_1 = \frac{1}{2\pi\omega}\frac{\varkappa_2}{\varkappa_1}\Phi(0,r_0)\Phi(s,r)\exp\left(-\int_0^s \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{c_1}{c_2}\frac{ds'}{\sin\alpha(s')P^{\frac{1}{2}}(s')}\right)$$

$$\times\exp\Big[i\omega\Big(\frac{r_0}{c_1} + \int_0^s \frac{ds'}{c_2(s')} + \frac{r}{c_1}\Big)\Big]G_N(\gamma)(1 + O(\omega^{-\frac{1}{3}})). \tag{2.4}$$

Здесь s – длина дуги S, отмеряемая от точки K. В точке K $s=0$ и в точках S справа от K, $s>0$, $c_2(s)$ – значения $c_(x,y)$ на S в точке s, r_0 и r – длины отрезков M_0K и LM,

$$\Phi(r,s)=\frac{\varkappa_1 c_1\{\sin\alpha(s)+r[1-\rho(s)\alpha'(s)]/\rho(s)\}^{-\frac{1}{2}}}{\varkappa_2\sqrt{\sin\alpha(s)}\sqrt{c_2(s)}P^{1/2}(s)}, \tag{2.5}$$

(($\rho(s)$ – радиус кривизны S в точке s, $P(s)$ т.н. эффективный радиус кривизны)

$$\frac{1}{P(s)}=\frac{1}{\rho(s)}-\frac{1}{c_2(s)}\frac{\partial c_2}{\partial n}\bigg|_{n=0}. \tag{2.6}$$

Эффективный радиус кривизны на S предполагается положительным.

$G_N(\gamma)$ – специальная функция, введенная В. С. Булдыревым (см. [1, 3], глава 11). Здесь

$$\gamma=(\omega/2)^{1/3}\int\limits_0^s\frac{ds'}{c_2^{1/3}(s')P^{2/3}(s')} \tag{2.7}$$

$$G_N(\gamma)=\int\limits_\Gamma\left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right]^N\frac{\exp i\gamma\zeta}{v(\zeta)w_2(\zeta)}d\zeta,\quad N=\left[\frac{\gamma}{2\sqrt{3}}\right] \tag{2.8}$$

($[a]$ означает целую часть положительного числа a). Контур интегрирования Γ прямая $(+\infty e^{\frac{4\pi i}{3}},+\infty e^{\frac{\pi i}{3}})$, проходящая через начало координат $\zeta=0$.

Через w_1,w_2,v обозначены решения уравнения Эйри

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2}-\zeta w=0, \tag{2.9}$$

имеющие асимптотику:

$$v(\zeta)=\frac{1}{2}\zeta^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{2}{3}\zeta^{3/2}}\left(1+O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right)\right),\quad \zeta\to+\infty, \tag{2.10}$$

$$w_1(-\zeta)=\zeta^{-\frac{1}{4}}e^{i(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}+\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right)\right),\quad \zeta\to+\infty, \tag{2.11}$$

$$w_2(-\zeta)=\zeta^{-\frac{1}{4}}e^{(-i)(\frac{2}{3}\zeta^{3/2}+\frac{\pi}{4})}\left(1+O\left(\frac{1}{\zeta^{3/2}}\right)\right),\quad \zeta\to+\infty. \tag{2.12}$$

Асимптотические формулы (2.9)–(2.11) и уравнение (2.8) однозначно определяют функции v,w_1,w_2.

§3. О процессе возникновения головной волны интерференционного типа

Формула В. С. Булдырева (2.4) позволяет предположить в результате какого процесса возникает головная волна интерференционного типа.

Волна, выходящая из точечного источника M_0 (см. рис. 1), падает на границу S сред Ω_1 и Ω_2. Нас сейчас интересует та часть падающей волны, которая "освещает" точку K и ее малую окрестность. Эта часть падающей волны преломляясь образует в области Ω_2 приповерхностную волну, сосредоточенную вблизи S. Какая часть волны превратится в приповерхностную, которая будет бежать вдоль S со скоростью $c_2(S)$, определяется значением в точке K кривизны S, эффективного радиуса кривизны, скоростей c_1, c_2 и $\varkappa_1, \varkappa_2$. Это согласуется с принципом локальности. Двигаясь вдоль S, волна частично дифундирует в среду Ω_1. По причине этой диффузии на каждом участке своего пути вдоль S волна теряет энергию, что уменьшает соответственно амплитуду. Это затухание описывается в формуле Булдырева интегралом

$$\exp\left(-\int_0^s \frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{c_1}{c_2}\frac{ds'}{\sin\alpha(s')P^{\frac{1}{2}}(s')}\right).$$

Далее волна доходит до точки L. Функция $G_N(\gamma)$ обеспечивает учет структуры поверхностной волны вблизи S в области Ω_2.

Какая часть волны пойдет дальше вдоль S за точку L, какая часть пойдет вдоль луча волны Булдырева – т.е. вдоль прямой с углом скольжения $\arccos\left(\frac{c_1}{c_2}\right)_L$, определяется значением в точке L скоростей c_1, c_2, кривизны S, эффективной кривизны, $\omega, \varkappa_1,\ \varkappa_2$. Симметрия функции Грина относительно точки наблюдения и точки источника диктует, чтобы соответствующий множитель был $\Phi(r,s)$, где Φ дается формулой (2.5).

Выйдя из точки M_0, рассматриваемая нами волна сначала движется со скоростью c_1 вдоль луча M_0K, затем вдоль дуги KL со скоростью $c_2(S)$ и, наконец, вдоль луча LM со скоростью c_1. В результате соответствующий фазовый множитель будет равен:

$$\exp\Big[i\omega\Big(\frac{r_0}{c_1}+\int\limits_0^s\frac{ds'}{c_2(s')}+\frac{r}{c_1}\Big)\Big]. \tag{3.1}$$

Он именно такой в формуле (2.4)

§4. Формула (2.4) и принцип локальности

На первый взгляд формула (2.4) противоречит принципу локальности. Казалось бы выражение $\Phi(0,r_0)$ должно быть пропорционально волновому полю падающей волны, т.е. при больших значениях $\frac{\omega r_0}{c_1}$ пропорционально $\frac{1}{\sqrt{r_0}}$. Между тем выражение (2.4) имеет совсем другой вид. Этот вопрос изучался в работе [2] и, если учесть изложенные там построения, то получится, что функция $\Phi(0,r_0)$ должна иметь вид:

$$\Phi(0,r_0)=\frac{1}{\sqrt{r_0}}\left(\frac{1}{\sqrt{-\sin\beta\frac{d\beta}{ds}+\frac{d}{ds}\frac{c_1}{c_2}}}\right)_{s=0}D(K), \tag{4.1}$$

где $D(K)$ зависит только от значений в точке K кривизны S, эффективной кривизны, скоростей c_1, c_2, коэффициентов $\varkappa_1, \varkappa_2$. Через $\beta=\beta(s)$ обозначен угол скольжения отрезка, идущего из точки M_0 в точку, на S имеющую координату s. В нашем случае $\beta(0)=\alpha(0)$. В дальнейшем будем считать, что $(x_0(s), y_0(s))=\mathbf{r}(s)$ – это радиус вектор точки s на S, когда начало координат совпадает с M_0.

Наша цель – доказать формулу (4.1).

Соответствующие преобразования мы начнем с очевидного равенства:

$$-\sin\beta\frac{d\beta}{ds}+\frac{d}{ds}\frac{c_1}{c_2}=\frac{d}{ds}\Big(\cos\beta+\frac{c_1}{c_2}\Big). \tag{4.2}$$

Преобразуем $\frac{d}{ds}\cos\beta$. Очевидно, что

$$\cos\beta=\frac{\mathbf{r}(s)}{r}\mathbf{s},$$

где $\mathbf{s}=\frac{d}{ds}\mathbf{r}$ – единичный вектор касательной к S. Далее

$$\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{r}(s)}{r(s)}\mathbf{s}=\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{d\mathbf{s}}{ds}+\Big(\frac{d}{ds}\ \frac{\mathbf{r}}{r}\Big)\mathbf{s}. \tag{4.3}$$

Первое слагаемое преобразуется в $\frac{1}{\rho}\frac{\mathbf{r}(s)}{r}\mathbf{n} = \frac{\sin\beta}{\rho}$, где $\mathbf{n}$ – нормаль к кривой S. Покажем, что второе слагаемое в формуле (4.3) равно:

$$\mathbf{s}\frac{d}{ds}\ \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r_0}\sin^2(\alpha).$$

Мы будем через σ обозначать длину дуги единичной окружности $\frac{\mathbf{r}_0}{r_0}$, тогда

$$\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{r}_0}{r_0} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\sigma}\frac{d\sigma}{ds} = \mathbf{v}\frac{d\sigma}{ds},$$

где $\mathbf{v}$ - единичный вектор касательной к окружности $\frac{\mathbf{r}_0(s)}{r(s)}$. Элементарные рассмотрения, которые мы здесь опустим, приводят к формуле:

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\sin\alpha_0}{r_0}.$$

Возвращаясь к выражению $(\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{r}_0}{r_0})\cdot\mathbf{s}$, получим:

$$(\frac{d}{ds}\frac{\mathbf{r}_0}{r_0})\cdot\mathbf{s}_0 = \frac{\sin\alpha_0}{r_0}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{s}_0) = \frac{\sin^2\alpha_0}{r_0}.$$

Таким образом в точке К выражение (4.2) равно:

$$\frac{\sin^2\alpha_0}{r_0} + \frac{\sin\alpha_0}{\rho} + \frac{d}{ds}\frac{c_1}{c_2} \tag{4.4}$$

Итак формула (4.1)приобретает вид:

$$\Phi_0(r_0,0) = \frac{1}{\sqrt{r_0}}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\alpha_0 + \frac{r_0}{\rho}\sin\alpha_0 + r_0\frac{d}{ds}(\frac{c_1}{c_2})}\Big|_{s=0}}D(K) \tag{4.5}$$

Нетрудно видеть, что такой же вид имеет формула (2.5), если учесть, что

$$-r_0\alpha'(s) = -r_0\ \frac{d}{ds}\arccos\frac{c_1}{c_2}\Big|_{s=0} = \frac{r_0}{\sin\alpha_0}\ \frac{d}{ds}\frac{c_1}{c_2}\Big|_{s=0}, \tag{4.6}$$

а $\sin\alpha_0 = \sqrt{1-(\frac{c_1}{c_2})^2}$, что завершает доказательство формулы (4.1).

Литература

1. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения.* — ИВУЗ **10**, No. 5 (1967), 699–711.
2. В. М. Бабич, А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа* (*волна Булдырева*) *и соображения локальности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **438** (2015), 36–45.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*, Наука, М. (1972).

Babich V. M. The localization principle and high-frequency asymptotics of an interference head wave.

The euristic formulae obtained by V. S. Buldyrev for interference head wave (see [1])contain no contradiction with the localization principle.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 22 сентября 2017 г.