Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

И. М. Певзнер

СУЩЕСТВОВАНИЕ КОРНЕВОЙ ПОДГРУППЫ, КОТОРУЮ ДАННЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПЕРЕВОДИТ В ПРОТИВОПОЛОЖНУЮ

Введение

В статье автора [11] в теореме 6 доказывалось, что для любого не единичного элемента $g \in G_{\text{ad}}(\mathrm{E}_6, K)$ существует корневой элемент алгебры Ли, переходящий в противоположный корневой элемент. В настоящей работе этот результат обобщается на присоединенные группы для всех систем корней одной длины. Отметим, что уже было несколько статей [12–14], уточняющих и обобщающих результаты [11]; настоящая работа продолжает эту серию.

Основной результат настоящей статьи – это следующая теорема.

Теорема. *Пусть Φ – система корней одной длины, K – алгебраически замкнутое поле, $g \in G_{\text{ad}}(\Phi, K)$ и $g \neq e$. Тогда существует корневой элемент алгебры Ли x, такой, что угол между корневыми элементами x и gx равен π.*

Стоит отметить, что в этом результате, в отличии от вышеупомянутой теоремы из [11], возникло условие про алгебраическую замкнутость поля. Дело в том, что в работе [11] доказательство происходило в 27-мерном микровесовом представлении, а в настоящей статье все происходит в присоединенном; оно существенно сложнее и меньше изучено с интересующей нас стороны. Поэтому, к сожалению, буквальный перенос старого доказательства в общем случае не проходит. Тем не менее, мы все же планируем в ближайшее время убрать условие алгебраической замкнутости поля из этой теоремы; по-видимому, оно там совершенно лишнее.

Кроме того, стоит отметить, что, в силу естественной связи между корневыми элементами алгебры Ли и корневыми элементами соответствующей группы Шевалле, эту теорему можно переформулировать на языке корневых элементов или корневых подгрупп $G_{\text{ad}}(\Phi, K)$.

Ключевые слова: группы Шевалле, корневые элементы.

Настоящая работа выполнена при содействии проекта РФФИ 14-01-00820-а.

§1. Общие сведения и обозначения

Пусть Φ – система корней одной длины, $V = V(\Phi)$ – соответствующая алгебра Ли, а $G = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ – соответствующая присоединенная группа. Поле K в основной теореме считается алгебраически замкнутым, но для всех остальных лемм и утверждений этого не требуется, и поле K можно считать произвольным. Обозначим через δ максимальный корень системы Φ, а через e единичный элемент группы G.

Как известно (см., например, [10] для более подробного изложения и дальнейших ссылок), в V существует базис Шевалле $\{e_\alpha, \alpha \in \Phi; h_\alpha, \alpha \in \Pi\}$, где Π – фундаментальная система корней. При этом все h_α из подалгебры Картана; $[e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$; $[h_\alpha, e_\beta] = A_{\alpha\beta} e_\beta$, где $A_{\alpha,\beta} = 2(\alpha,\beta)/(\alpha,\alpha) \in \mathbb{Z}$ – числа Картана; $[e_\alpha, e_\beta] = N_{\alpha\beta} e_{\alpha+\beta}$ при $\alpha + \beta \in \Phi$ и $[e_\alpha, e_\beta] = 0$ при $\alpha+\beta \notin \Phi$ и $\beta \neq -\alpha$, где $N_{\alpha\beta} = \pm 1$ – структурные константы. Коэффициент в разложении вектора $x \in V$ по этому базису при e_α обозначим x^α, а соответствующий элемент из подалгебры Картана обозначим x^h; тогда $x = \sum\limits_{\alpha\in\Phi} x^\alpha e_\alpha + x^h$.

Как известно (см., например, гл. 8 в [17]), над алгебраически замкнутым полем группа Шевалле есть объединение борелевских подгрупп и все борелевские подгруппы сопряжены. При этом подгруппа $B = T\cdot U$, где T – это тор, а $U = \langle X_\alpha | \alpha \in \Phi^+\rangle$ – унипотентная подгруппа, является борелевской. Далее, пусть $P_\alpha = \langle T, X_\beta | \angle(\alpha,\beta) \leqslant \pi/2\rangle$. Это параболическая подгруппа и $B \subset P_\delta$. В частности, произвольный элемент $g \in G$ можно сопрячь так, чтобы образ g попал в P_α (на самом деле алгебраическая замкнутость поля нужна нам только для этого). Кроме того, $P_\alpha = \langle g \in G | g e_\alpha = a e_\alpha, a \in K^*\rangle = \langle g \in G | e_\alpha^T g = a e_\alpha^T, a \in K^*\rangle$. Пусть $U_\alpha = \langle X_\beta | \angle(\alpha,\beta) < \pi/2\rangle$ – экстраспециальный радикал, а $L_\alpha = \langle T, X_\beta | \angle(\alpha,\beta) = \pi/2\rangle$ – подгруппа Леви. Тогда P_α есть полупрямое произведение U_α и L_α; соответственно, можно считать, что $g = ud$ при $u \in U_\alpha$ и $d \in L_\alpha$.

Разобьем все корни из Φ на пять классов в зависимости от их расположения относительно корня α: $\Phi^2(\alpha) = \{\alpha\}$, $\Phi^1(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/3\}$, $\Phi^0(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = \pi/2\}$, $\Phi^{-1}(\alpha) = \{\beta; \angle(\beta,\alpha) = 2\pi/3\}$, $\Phi^{-2}(\alpha) = \{-\alpha\}$. Другими словами, β принадлежит $\Phi^i(\alpha)$ тогда и только тогда, когда скалярное произведение β и α равно $i/2$. Обозначим также через g^{ij} подматрицу матрицы g, состоящую из элементов $\{g_{\beta\gamma}\}$ при $\beta \in \Phi^i(\alpha), \gamma \in \Phi^j(\alpha)$. В этих обозначениях элемент $d \in L_\alpha$ может иметь не нули только в блоках d^{ii}, а $u \in U_\alpha$, кроме единиц на диагонали, только в блоках u^{ij} при $i > j$. Отметим, что если $g \in P_\alpha$ и $g = ud$ при $u \in U_\alpha$ и $d \in L_\alpha$, то $g^{ii} = d^{ii}$. Иначе говоря, диагональные блоки у элемента из подгруппы Леви не меняются при умножении на элемент из экстраспециального радикала.

Наконец, заметим, что тор T может быть представлен в виде произведения тора подгруппы $G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$ и T', состоящего из элементов T, оставляющих e_β при $\beta \in \Phi^0(\alpha)$ на месте (мы отождествляем $G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$ с его образом в $G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$). Соответственно, $L_\alpha = G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K) \times T'$. Из соображений размерности видно, что T' одномерно при $\Phi = D_l$, E_6, E_7 или E_8, и двумерно при $\Phi = A_l$, $l > 1$. Так как $[e_\beta, e_\gamma] = N_{\beta\gamma} e_{\beta+\gamma}$ при $\beta, \gamma, \beta + \gamma \in \Phi$, то для любого $g \in G$ получаем равенство $[ge_\beta, ge_\gamma] = N_{\beta\gamma} ge_{\beta+\gamma}$. Если t – элемент из тора T, то из предыдущего равенства следует, что $t_{\beta,\beta} t_{\gamma,\gamma} = t_{\beta+\gamma,\beta+\gamma}$. Если $t' \in T'$, то получаем $t'_{\beta,\beta} = 1$ при $\beta \in \Phi^0(\alpha)$, поэтому $t'_{\beta,\beta} = t'_{\gamma,\gamma}$ при $\beta, \gamma \in \Phi^1(\alpha), \angle(\beta, \gamma) = \pi/3$. Если $\Phi = D_l$, E_6, E_7 или E_8, то, как известно, для любых двух корней $\beta, \gamma \in \Phi^1(\alpha)$ существует цепочка корней $\beta_0 = \beta, \beta_1, \ldots, \beta_n = \gamma$, такая, что $\beta_i \in \Phi^1(\alpha)$ и $\angle(\beta_i, \beta_{i+1}) = \pi/3$. Поэтому в этих случаях существует такое $a \in K^*$, что $t'_{\beta,\beta} = a$ для всех $\beta \in \Phi^1(\alpha)$, $t'_{\alpha,\alpha} = a^2$ и, соответственно, $t' = h_\alpha(a)$. Если же $\Phi = A_l$ при $l > 1$, то множество корней $\Phi^1(\alpha)$ распадается на две части: корни, имеющие в разложении коэффициенты 1 при первом базисном корне и 0 при последнем, и наоборот. Все корни из одной части образуют углы $\pi/3$ между собой, а корни из разных частей – $\pi/2$ или $2\pi/3$. Таким образом, в этом случае существуют такие $a, b \in K^*$, что $t'_{\beta,\beta} = a$ для корня β из одной части и $t'_{\beta,\beta} = b$ для корня β из другой части; $t'_{\alpha,\alpha} = ab$.

Утверждение 1. *Подгруппа Леви L_α лежит в нормализаторах P_α, L_α, U_α и T'.*

Доказательство. Для первых трех групп это очевидно; докажем утверждение леммы для T'. Так как $L_\alpha = \langle T, X_\beta | \angle(\alpha, \beta) = \pi/2 \rangle$ и T коммутативна, то достаточно проверить, что $x_\beta(b) T' x_\beta(-b) \subset T'$ при $\angle(\alpha, \beta) = \pi/2$. Это, в свою очередь, сразу следует из того, что $x_\beta(b) T' x_\beta(-b) \subset L_\alpha, L_\alpha = G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K) \times T'$, и того, что $x_\beta(b) T' x_\beta(-b)$ оставляет на месте все e_γ при $\gamma \in \Phi^0(\alpha)$. □

Отметим, что на самом деле T' является центром подгруппы Леви L_α, но нам сейчас этого не нужно. Из этой леммы следует, что мы можем сопрягать g любым элементом из подгруппы Леви: если есть разложение $g = ut'g'$ при $u \in U_\alpha$, $t' \in T'$, $g' \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$, а $l \in L_\alpha$, то $lgl^{-1} = (lul^{-1})(lt'l^{-1})(lg'l^{-1})$ при $lul^{-1} \in U_\alpha$, $lt'l^{-1} \in T'$, $lg'l^{-1} \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$ – тоже разложение.

§2. Корневые элементы и углы

В этом параграфе мы рассмотрим корневые элементы алгебры Ли и их взаимное расположение.

Прежде всего, отметим следующую несложную лемму.

Лемма 1. (1) $[[V, e_\alpha], e_\alpha] = \{ae_\alpha, a \in K\}$.

(2) *Если $x \in V$ – корневой элемент, то $[[V, x], x] = \{ax, a \in K\}$.*

(3) *Если $x \in V$ – корневой элемент, то существует корень $\alpha \in \Phi$, такой, что $x^\alpha \neq 0$.*

Доказательство. Первый пункт сразу следует из коммутационных формул в начале первого параграфа и дистрибутивности алгебры Ли. Второй пункт также сразу следует из первого и того, что для любого корневого элемента $x \in V$ существует $g \in G$, такой, что $x = ge_\alpha$. Для доказательства третьего пункта достаточно заметить, что если x из подалгебры Картана, $y \in V$ и $z = [y, x]$, то, снова из коммутационных формул и дистрибутивности алгебры Ли, $z^h = 0$. Следовательно, $[[y, x], x]$ может равняться ax только при $a = 0$. □

Лемма 2. *Пусть $x \in V$ – некоторый корневой элемент.*

(1) *Предположим, что $x^\alpha \neq 0$, а $x^\beta = 0$ при всех $\beta \in \Phi^1(\alpha)$. Тогда $x^\beta = 0$ при всех корнях $\beta \neq \alpha, -\alpha$.*

(2) *В условиях предыдущего пункта x^h кратно h_α. Если $x^h = 0$, то $x = x^\alpha e_\alpha$.*

(3) *Если в условиях первого пункта дополнительно предположить, что $x^{-\alpha} = 0$, то $x = x^\alpha e_\alpha$.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Предположим, что утверждение неверно и существует корень $\beta \neq \alpha, -\alpha$, такой, что $x^\beta \neq 0$. Рассмотрим выражение $[[e_{-\alpha}, x], x]$. По предыдущей лемме оно должно равняться ax для некоторого $a \in K$. С другой стороны, в силу выбора x, $[e_{-\alpha}, x] = [e_{-\alpha}, x^\alpha e_\alpha + x^h] = -x^\alpha h_\alpha + be_{-\alpha}$ для некоторого $b \in K$. Получаем равенство $ax = [-x^\alpha h_\alpha + be_{-\alpha}, x]$. Подставляя сюда

$x = \sum\limits_{\gamma\in\Phi} x^\gamma e_\gamma + x^h$, получаем:

$$
\begin{aligned}
a(\sum_{\gamma\in\Phi} x^\gamma e_\gamma + x^h) = [-x^\alpha h_\alpha + b e_{-\alpha}, \sum_{\gamma\in\Phi} x^\gamma e_\gamma + x^h] \\
-x^\alpha \sum_{\gamma\in\Phi} A_{\alpha\gamma} x^\gamma e_\gamma + b(-x^\alpha h_\alpha + b e_{-\alpha}).
\end{aligned} \qquad (*)
$$

Так как $A_{\alpha\alpha} = 2$, то сравнивая коэффициенты при e_α, получаем что $a = -2x^\alpha$. Тогда коэффициент при e_β в левой части равен $-2x^\alpha x^\beta$, а в правой части $-x^\alpha A_{\alpha\beta} x^\beta$. Поскольку $A_{\alpha\beta} \neq 2$, то $x^\beta = 0$ – противоречие.

Докажем второй пункт. То, что x^h кратно h_α, сразу следует из $(*)$. Далее, если $x^h = 0$, то, в силу первого пункта, $x = x^\alpha e_\alpha + x^{-\alpha} e_{-\alpha}$. Тогда из $(*)$ следует, что

$$a(x^\alpha e_\alpha + x^{-\alpha} e_{-\alpha}) = -x^\alpha(2x^\alpha e_\alpha - 2x^{-\alpha} e_{-\alpha}) + b(-x^\alpha h_\alpha + b e_{-\alpha}).$$

Так как в левой части нет элементов из подалгебры Картана, то и справа их тоже быть не должно, то есть $b = 0$. Далее, сравнивая коэффициенты при e_α, получаем, что $a = -2x^\alpha$. Наконец, сравнивая коэффициенты при $e_{-\alpha}$, получаем, что $x^{-\alpha} = 0$, что и требовалось.

Докажем третий пункт. В силу первого пункта и предположения $x = x^\alpha e_\alpha + x^h$. Тогда равенство $(*)$ выродится в равенство $a(x^\alpha e_\alpha + x^h) = -2(x^\alpha)^2 e_\alpha + b(-x^\alpha h_\alpha + b e_{-\alpha})$. Так как в левой части нет $e_{-\alpha}$, то в правой его тоже быть не должно, откуда $b = 0$. Тогда в правой части остается $-(x^\alpha)^2 e_\alpha$, значит, в левой части $x^h = 0$, что и требовалось. $\square$

Утверждение 2. *Пусть $x \in V$ – корневой элемент и $\alpha \in \Phi$ – такой корень, что $x^\alpha \neq 0$. Тогда существует единственный элемент $u \in U_{-\alpha}$, такой, что $ux = x^\alpha e_\alpha$; при этом для некоторого $a \in K$*

$$u = x_{-\alpha}(a) \cdot \prod_{\gamma\in\Phi^{-1}(\alpha)} x_\gamma\Big(-\frac{x^{\alpha+\gamma}}{x^\alpha N_{\gamma\alpha}}\Big).$$

Доказательство. Как известно, $x_\gamma(c) e_\beta = e_\beta$ при $\angle(\gamma,\beta) < 2\pi/3$ и $x_\gamma(c) e_\beta = e_\beta + c N_{\gamma\beta} e_{\beta+\gamma}$ при $\angle(\gamma,\beta) = 2\pi/3$. Поэтому при умножении элемента $x = \sum\limits_{\beta\in\Phi} x^\beta e_\beta + x^h$ на корневой элемент $x_\gamma(c) \in G$ коэффициенты x^β для $\angle(\beta,\gamma) > \pi/3$ не меняются; при этом к коэффициентам

x^β для $\angle(\beta,\gamma)=\pi/3$ прибавляется $x^{\beta-\gamma}cN_{\gamma,\beta-\gamma}$. Значит при умножении x на $x_\gamma\Big(-\frac{x^{\alpha+\gamma}}{x^\alpha N_{\gamma\alpha}}\Big)$ при $\gamma\in\Phi^{-1}(\alpha)$ коэффициент $x^{\alpha+\gamma}$ становится равным 0, а все остальные x^β при $\beta\in\Phi^1(\alpha)$ и x^α не меняются. Таким образом, при умножении x на $\prod\limits_{\gamma\in\Phi^{-1}(\alpha)} x_\gamma\Big(-\frac{x^{\alpha+\gamma}}{x^\alpha N_{\gamma\alpha}}\Big)$ коэффициент x^α не меняется, а все x^β при $\beta\in\Phi^1(\alpha)$ становятся равными 0. При этом, по лемме 2, x^h становится кратно h_α. Осталось заметить, что умножение полученного элемента на $x_{-\alpha}(a)$ вычитает из x^h элемент $ax^\alpha h_\alpha$, значит, существует и единственно такое $a\in K$, что x^h становится равным 0. Тогда из леммы 2 следует требуемое. □

Следствие 1. *Выполняется и обратное утверждение к пункту 2 леммы 1: если $x\in V$ и $[[V,x],x]=\{ax, a\in K\}$, то x корневой.*

Доказательство. Сразу следует из того, что в доказательствах леммы 2 и утверждения 2 использовалась только формула $[[V,x],x]=\{ax, a\in K\}$ и выводилось, что $ux=x^\alpha e_\alpha$ для некоторого $u\in U_{-\alpha}$. □

Утверждение 3. (1) *Пусть $x,y\in V$ – два корневых элемента. Тогда существует $g\in G$, такой, что $gx=ae_\alpha$ и $gy=be_\beta$ для некоторых $\alpha,\beta\in\Phi$ и $a,b\in K^*$.*

(2) *В условиях предыдущего пункта верно следующее:*
   (a) *$\alpha=\beta\Leftrightarrow x$ кратно y;*
   (b) *$\angle(\alpha,\beta)\leqslant\pi/3\Leftrightarrow x+y$ является корневым элементом или нулем;*
   (c) *$\angle(\alpha,\beta)\leqslant\pi/2\Leftrightarrow[x,y]=0$;*
   (d) *$\angle(\alpha,\beta)\leqslant 2\pi/3\Leftrightarrow[x,y]$ является корневым элементом или нулем.*

(3) *В условиях первого пункта угол между α и β определен однозначно и не зависит от выбора g.*

(4) *Пусть $x=e_\alpha$ и y – два корневых элемента, $g\in G$ и $ge_\alpha=ae_\alpha$ и $gy=be_\beta$. Тогда если $\angle(\alpha,\gamma)>\angle(\alpha,\beta)$, то $y^\gamma=0$; однако существует корень γ при $\angle(\alpha,\gamma)=\angle(\alpha,\beta)$, такой что $y^\gamma\neq 0$.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Можно считать, что $x=ae_\alpha$. Предположим, что $y^{-\alpha}\neq 0$. Тогда по утверждению 2 имеем $y=uy^{-\alpha}e_{-\alpha}$ при

$$u=x_\alpha(b)\cdot\prod_{\gamma\in\Phi^1(\alpha)} x_\gamma\Big(-\frac{y^{-\alpha+\gamma}}{y^{-\alpha}N_{\gamma,-\alpha}}\Big).$$

Но все сомножители этого произведения оставляют на месте e_α, поэтому $uae_\alpha = ae_\alpha$, что и требовалось.

Пусть $y^{-\alpha} = 0$, но существует $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$, такой, что $y^\beta \neq 0$. Тогда снова по утверждению 2 имеем $y = uy^\beta e_\beta$ при

$$u = x_{-\beta}(b) \cdot \prod_{\gamma \in \Phi^{-1}(\beta)} x_\gamma\Big(-\frac{y^{\beta+\gamma}}{y^\beta N_{\gamma\beta}}\Big).$$

Так как $y^{-\alpha} = 0$, то в этом разложении коэффициент при $x_{-\alpha-\beta}$ нулевой, а все остальные сомножители по-прежнему оставляют e_α на месте.

Аналогично, пусть $y^\gamma = 0$ при $\gamma \in \Phi^{-2}(\alpha) \cup \Phi^{-1}(\alpha)$, но существует $\beta \in \Phi^0(\alpha)$, такое, что $y^\beta \neq 0$. Тогда опять $y = uy^\beta e_\beta$ с таким же u. Так как $y^\gamma = 0$, то в разложении u коэффициенты при $x_{\gamma-\beta}$ равны нулю, а все остальные сомножители оставляют e_α на месте.

Наконец, пусть $y^\gamma = 0$ при $\gamma \in \Phi^{-2}(\alpha) \cup \Phi^{-1}(\alpha) \cup \Phi^0(\alpha)$, но существует $\beta \in \Phi^1(\alpha)$, такое, что $y^\beta \neq 0$. Как и в предыдущих случаях, убеждаемся, что

$$u' = \prod_{\gamma \in \Phi^{-1}(\beta)} x_\gamma\Big(-\frac{y^{\beta+\gamma}}{y^\beta N_{\gamma\beta}}\Big)$$

оставляет e_α на месте. При этом $u'y = y^\beta e_\beta + y^{-\beta}e_{-\beta} + y^h$ по утверждению 2. Кроме того, $[y, e_\alpha] = 0$ из вида y, поэтому $0 = [u'y, u'e_\alpha] = [y^\beta e_\beta + y^{-\beta}e_{-\beta} + y^h, e_\alpha]$, откуда $y^{-\beta}$ и y^h также равны 0. Это завершает доказательство первого пункта.

Второй пункт сразу следует из инвариантности правых частей во всех подпунктах под действием группы G. Третий пункт сразу следует из второго. Четвертый следует из третьего и доказательства первого. □

Отметим, что так как корневые элементы V и корневые элементы G естественным образом связаны, то также определяется угол между корневыми элементами или корневыми подгруппами в G. При этом из утверждения 3 следует, что любую корневую подгруппу можно перевести в любую другую и любую пару корневых подгрупп можно перевести в любую другую с тем же углом между ними. Для корневых элементов ситуация чуть сложнее. Один корневой элемент можно перевести в любой другой всегда, кроме случая $\Phi = A_1$ и поля K, в котором не из любого элемента извлекается квадратный корень; пару корневых элементов можно перевести в любую другую с тем же углом между ними всегда, если этот угол не равен 0 и π, а $\Phi \neq A_2$. Так как нам в данной статье этого не понадобится, то мы не будем сейчас это доказывать.

§3. Доказательство основной теоремы

Лемма 3. *Пусть $g \in P_\alpha$, $g = ud$, где $u \in U_\alpha, d \in L_\alpha$, а $d = t'g'$, где $t' \in T', g' \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$. Если x – такой корневой элемент алгебры Ли типа $\Phi^0(\alpha)$, что угол между x и $g'x$ равен π, то угол между x и gx также равен π.*

Доказательство. Можно считать, что $x = e_\beta$ при $\beta \in \Phi^0(\alpha)$; тогда $g'x = g'_{*,\beta}$. Так как угол между $x = e_\beta$ и $g'x = g'_{*,\beta}$ равен π, то $g'_{-\beta,\beta} \neq 0$. Но $g_{-\beta,\beta} = g'_{-\beta,\beta}$, поэтому угол между $x = e_\beta$ и $gx = g_{*,\beta}$ также равен π. □

Лемма 4. *Пусть $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$, $g \neq e$, K – произвольное поле. Тогда существует корневой элемент x алгебры Ли, такой, что угол между корневыми элементами x и gx не меньше $\pi/3$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно, то есть угол всегда равен 0. Иначе говоря, корневой элемент и его образ всегда пропорциональны. В частности, это так для элементарных корневых элементов алгебры Ли e_α, то есть $g \in T$. Далее, если угол между двумя элементарными корневыми элементами e_α и e_β равен $\pi/3$, а $ge_\alpha = ae_\alpha$ и $ge_\beta = be_\beta$, то корневые элементы $e_\alpha + e_\beta$ и $g(e_\alpha + e_\beta) = ae_\alpha + be_\beta$ тоже должны быть пропорциональны, откуда $a = b$. Значит, и у всех элементарных корневых элементов коэффициенты пропорциональности одинаковы. Как мы уже говорили, если $\alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Phi$ и $g \in T$, то $g_{\alpha,\alpha} g_{\beta,\beta} = g_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}$. Следовательно, все коэффициенты пропорциональности равны 1 и все элементарные корневые элементы алгебры Ли переходят в себя. Наконец, $gh_\alpha = g[e_\alpha, e_{-\alpha}] = [ge_\alpha, ge_{-\alpha}] = [e_\alpha, e_{-\alpha}] = h_\alpha$ при $\alpha \in \Pi$. Значит, по линейности, g оставляет на месте все элементы алгебры Ли, то есть g – единичный элемент. □

Лемма 5. *Пусть $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$, $g \neq e$, K – произвольное поле. Тогда существует корневой элемент x алгебры Ли, такой, что угол между корневыми элементами x и gx не меньше $\pi/2$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. По предыдущей лемме, существует корневой элемент x алгебры Ли, такой, что угол между корневыми элементами x и gx равен $\pi/3$. Можно считать, что $x = ae_\alpha$ и $gx = be_\beta$. Рассмотрим элементарный корневой элемент $e_{\beta-\alpha}$ и его прообраз $y = g^{-1}e_{\beta-\alpha}$. Поскольку угол между $gx = be_\beta$ и $gy = e_{\beta-\alpha}$ равен $\pi/3$, то угол между x и y тоже равен $\pi/3$. С другой стороны, по нашему предположению, угол между y и $gy = e_{\beta-\alpha}$ не больше $\pi/3$. Поскольку при этом угол между $x = ae_\alpha$ и $gy = e_{\beta-\alpha}$ равен $2\pi/3$, то $y = ce_\beta$. Рассмотрим элемент $z = x + y = ae_\alpha + ce_\beta$. Он, разумеется, корневой, так как $\angle(\alpha, \beta) = \pi/3$. При этом $gz = be_\beta + e_{\beta-\alpha}$. Какой угол между z и gz? Если сопрячь оба корневых элемента элементом $h = x_{\beta-\alpha}(\frac{-N_{\beta-\alpha\alpha}c}{a})$, то gz не изменится, а hz окажется равно ae_α, и угол между ними окажется равен $2\pi/3$. Значит, и угол между z и gz равен $2\pi/3$ – противоречие. □

Лемма 6. *Пусть $g \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ при $\Phi = A_1$ или A_2, K – произвольное поле и $g \neq e$. Тогда существует корневой элемент x алгебры Ли такой, что угол между корневыми элементами x и gx равен π.*

Доказательство. Случай $\Phi = A_1$ сразу следует из леммы 4. Пусть $\Phi = A_2$. Предположим, что искомого x не существует. По предыдущей лемме, существует корневой элемент y, такой, что угол между y и gy не меньше $\pi/2$; так как при $\Phi = A_2$ угол $\pi/2$ между корнями невозможен, то угол между y и gy равен $2\pi/3$. Как известно, $G_{\mathrm{ad}}(A_2, K) = \mathrm{PGL}(3, K)$ – фактор $\mathrm{GL}(3, K)$ по центру. Элемент $\mathrm{GL}(3, K)$, который переходит при такой факторизации в g, будем для краткости обозначать точно так же. Алгебра Ли группы $\mathrm{PGL}(3, K)$ является подмножеством алгебры Ли группы $\mathrm{GL}(3, K)$, и y оказывается корневым элементом и в алгебре Ли группы $\mathrm{GL}(3, K)$. Рассмотрим естественное 3-мерное представление группы $\mathrm{GL}(3, K)$. Напомним, что если элементы алгебры Ли записываются матрицами, то действие на них – это сопряжение. Можно считать, что y – это e_{13}, а его образ – e_{21}. Таким образом, $ge_{13}g^{-1} = e_{21}$, или, что тоже самое, $ge_{13} = e_{21}g$. Получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & g_{11} \\ 0 & 0 & g_{21} \\ 0 & 0 & g_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $g_{11} = g_{12} = g_{31} = 0$ и $g_{13} = g_{21}$. Рассмотрим, куда g переводит элемент e_{12}. Так как $\angle(e_{12}, e_{13}) = \pi/3$, то $\angle(ge_{12}g^{-1}, e_{21}) = \pi/3$. Это означает, что $ge_{12}g^{-1} = ae_{23} + be_{21} + ce_{31}$. Так как мы предполагаем, что $\angle(e_{12}, ge_{12}g^{-1}) < \pi$, то $b = 0$. Чтобы эта сумма являлась корневым элементом, необходимо, чтобы выполнялось равенство $a = 0$ или $c = 0$. Предположим, что $a = 0$. Тогда $ge_{12}g^{-1} = ce_{31}$, или, что тоже самое, $ge_{12} = ce_{31}g$. Получаем равенство:

$$\begin{pmatrix} 0 & g_{11} & 0 \\ 0 & g_{21} & 0 \\ 0 & g_{31} & 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} \end{pmatrix},$$

откуда, вместе с предыдущими равенствами, получаем, что вся первая строка и первый столбец матрицы g нулевые – противоречие.

Значит, $c = 0$ и $ge_{12}g^{-1} = ae_{23}$. Для корневого элемента $e_{13} + e_{12}$ имеем $g(e_{13} + e_{12})g^{-1} = e_{21} + ae_{23}$. Как несложно видеть, корневые элементы $e_{13}+e_{12}$ и $e_{21}+ae_{23}$ противоположны, что и требовалось. □

Лемма 7. *Предположим, что Φ – произвольная система корней, не равная A_1.*

(1) *Пусть $u \in U_\alpha$, $u \neq e$. Тогда либо $u_{\alpha,-\alpha} \neq 0$, либо существует $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$ такой, что $u_{\beta,-\alpha} \neq 0$.*
(2) *Пусть $t' \in T'$, $t' \neq e$. Тогда существуют $x \in U_\alpha$ и $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$ такие, что $(xt'x^{-1})_{\beta,-\alpha} \neq 0$.*
(3) *Пусть $g \in U_\alpha T'$, $g \neq e$. Тогда либо $g_{\alpha,-\alpha} \neq 0$, либо существуют $x \in U_\alpha$ и $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$ такие, что $(xgx^{-1})_{\beta,-\alpha} \neq 0$.*

Доказательство. Докажем первый пункт. Предположим, что $u_{\alpha,-\alpha} = 0$ и $u_{\beta,-\alpha} = 0$ для всех $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$. Заметим, что $u_{*,-\alpha} = ue_{-\alpha}$ – корневой элемент и $u_{-\alpha,-\alpha} \neq 0$. Тогда, по лемме 2, $u_{*,-\alpha} = ue_{-\alpha} = u_{-\alpha,-\alpha}e_{-\alpha}$, то есть $u \in P_{-\alpha}$. Так как $P_{-\alpha} \cap U_\alpha = e$, то $u = e$ – противоречие.

Докажем второй пункт. Как уже говорилось, если $\Phi = D_l$, E_6, E_7 или E_8, то существует такое $a \in K^*$, что $t'_{\beta,\beta} = a$ для всех $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$ и $t'_{-\alpha,-\alpha} = a^2$. Если же $\Phi = A_l$ при $l > 1$, то множество корней $\Phi^{-1}(\alpha)$ распадается на две части и существуют такие $a, b \in K^*$, что $t'_{\beta,\beta} = a$ для корня β из одной части и $t'_{\beta,\beta} = b$ для корня β из другой части; $t'_{-\alpha,-\alpha} = ab$. Из этого следует, что при $t' \neq e$ и для всех $\Phi \neq A_1$ существует корень $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$, такой, что $t'_{\beta,\beta} \neq t'_{-\alpha,-\alpha}$. Положим $x = x_{\alpha+\beta}(1)$. Тогда

$$(xt'x^{-1})_{\beta,-\alpha} = (xt')_{\beta,-\alpha} \pm (xt')_{\beta,\beta} = t'_{\beta,-\alpha} \pm t'_{-\alpha,-\alpha} \pm t'_{\beta,\beta} \pm t'_{-\alpha,\beta}.$$

Так как t' диагонален, то $t'_{\beta,-\alpha} = t'_{-\alpha,\beta} = 0$ и $(xt'x^{-1})_{\beta,-\alpha} = \pm t'_{-\alpha,-\alpha} \pm t'_{\beta,\beta}$. Поскольку знаки в этом выражении от t' не зависят, то, подставляя $t' = e$, мы получаем, что $(xt'x^{-1})_{\beta,-\alpha} = \pm(t'_{-\alpha,-\alpha} - t'_{\beta,\beta})$. Так как в нашем случае $t'_{\beta,\beta} \neq t'_{-\alpha,-\alpha}$, то $(xt'x^{-1})_{\beta,-\alpha} \neq 0$, что и требовалось.

Для доказательства третьего пункта достаточно заметить, что если $g = ut' \neq e$, то либо $u \neq e$, либо $t' \neq e$. Если $u \neq e$, то воспользуемся первым пунктом, если же $u = e$, то вторым. □

Теорема. *Пусть $g \in G$, $g \neq e$. Тогда существует корневой элемент x алгебры Ли, такой, что угол между корневыми элементами x и gx равен π.*

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по рангу системы Φ. В качестве базы индукции можно взять рассмотренные ранее случаи $\Phi = A_1$ и A_2. Осталось проделать индукционный переход. Пусть для всех систем, чей ранг меньше чем ранг Φ, утверждение теоремы уже доказано.

Как уже говорилось, можно считать, что $g \in P_\alpha$. Далее, $g = ud$ при $u \in U_\alpha$ и $d \in L_\alpha$, а $d = t'g'$, где $t' \in T'$, $g' \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$. Рассмотрим следующие случаи:

1. Пусть $g' \neq e$. Если $\Phi = A_l$ при $l > 2$, E_6, E_7 или E_8, то $\Phi^0(\alpha)$, соответственно, равна A_{l-2}, A_5, D_6 или E_7. Так как $g' \neq e$ и ранг $\Phi^0(\alpha)$ меньше ранга Φ, то по предположению индукции для элемента $g' \in G_{\mathrm{ad}}(\Phi^0(\alpha), K)$ существует корневой элемент x алгебры Ли типа $\Phi^0(\alpha)$, такой, что угол между корневыми элементами x и $g'x$ равен π. Отсюда, по лемме 3, следует утверждение теоремы и для элемента g, что и требовалось.

Если же $\Phi = D_l$, то $\Phi^0(\alpha) = A_1 \times A_1 \times A_1$ при $l = 4$, $A_1 \times A_3$ при $l = 5$ и $A_1 \times D_{l-2}$ при $l > 5$, то есть система $\Phi^0(\alpha)$ оказывается приводимой. Заметим, что $G_{\mathrm{ad}}(\Psi_1 \times \Psi_2, K) = G_{\mathrm{ad}}(\Psi_1, K) \times G_{\mathrm{ad}}(\Psi_2, K)$ для любых систем корней Ψ_1 и Ψ_2, и если $h \in G_{\mathrm{ad}}(\Psi_1 \times \Psi_2, K)$, то $h = h_1 h_2$, где $h_1 \in G_{\mathrm{ad}}(\Psi_1, K)$ и $h_2 \in G_{\mathrm{ad}}(\Psi_2, K)$; если $h \neq e$, то $h_1 \neq e$ или $h_2 \neq e$. Поэтому искомое утверждение для $\Phi^0(\alpha)$ сводится к одной из его неприводимых компонент. Снова применяя предположение индукции и лемму 3, получаем требуемое.

Отметим, что если g' – единичный элемент, то $g = ut'$, поэтому подматрица g^{11} диагональна; соответственно, если матрица g^{11} не диагональна, то $g' \neq e$ и утверждение теоремы доказано.

2. Пусть $g' = e$. Тогда $g = ut' \neq e$. По лемме 7, либо $g_{\alpha,-\alpha} \neq 0$, либо существуют $x \in U_\alpha$ и $\beta \in \Phi^{-1}(\alpha)$ такие, что $(xgx^{-1})_{\beta,-\alpha} \neq 0$. В первом случае теорема доказана. Заметим, что если $g = ut' \in U_\alpha T'$ и $x \in U_\alpha$, то xgx^{-1} тоже принадлежит $U_\alpha T'$. Поэтому можно g заменить на xgx^{-1} и считать, что $g_{\beta,-\alpha} \neq 0$; соответственно, $u_{\beta,-\alpha} = \frac{g_{\beta,-\alpha}}{t'_{-\alpha,-\alpha}} \neq 0$. Понятно, что для $\Phi \neq A_2$ существует корень γ, такой, что $\angle(\beta,\gamma) = \angle(-\alpha,\gamma) = \pi/3$. Сопряжем g корневым элементом $y = x_{\gamma-\beta}(c) \in U_\alpha$. Так как $\gamma - \beta \in \Phi^0(\alpha)$, то, по утверждению 1, $yt'y^{-1} \in T'$ (как уже отмечалось, на самом деле $yt'y^{-1} = t'$, но нам это не важно). Далее, $yuy^{-1} \in U_\alpha$, $(yuy^{-1})_{\beta,-\alpha} = u_{\beta,-\alpha} \neq 0$ и $(yuy^{-1})_{\gamma,-\alpha} = u_{\gamma,-\alpha} \pm cu_{\beta,-\alpha}$. Следовательно, сопрягая, при необходимости, g корневым элементом из U_α, можно добиться того, чтобы выполнялись условия: $g = ut'$ и $g_{\beta,-\alpha} \neq 0$, а $g_{\gamma,-\alpha} = 0$.

В этом случае, как несложно видеть, $g_{\gamma,*} = g_{\gamma,\gamma} e_\gamma^T$, то есть $g \in P_\gamma$ и, соответственно, можно рассматривать разложение $g = ut'g'$ относительно корня γ. Так как $g_{\beta,-\alpha} \neq 0$ и $\beta, -\alpha \in \Phi^1(\gamma)$, то рассматриваемая относительно корня γ подматрица g^{11} оказывается недиагональной. По замечанию в конце пункта 1, этого достаточно для доказательства теоремы. □

Литература

1. А. Борель, *Свойства и линейные представления групп Шевалле.* — Семинар по алгебраическим группам, Мир, М., (1973), 9–59.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Главы IV–VI, Мир, М., 1972.
3. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Главы VII–VIII, Мир, М., 1978.
4. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Группа Шевалле типа* E_6 *в 27-мерном представлении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **338** (2006), 5–68.
5. Н. А. Вавилов, И. М. Певзнер, *Тройки длинных корневых подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 54–83.
6. Н. А. Вавилов, А. А. Семенов, *Длинные корневые торы в группах Шевалле.* — Алгебра и анализ **24**, No.3 (2012), 22–83.
7. А. Ю. Лузгарев, И. М. Певзнер, *Некоторые факты из жизни* $\mathrm{GL}(5,\mathbb{Z})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 153–163.
8. О. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* — Автоморфизмы классических групп, Мир, М. (1976), 57–167.
9. О. О'Мира, *Лекции о симплектических группах*, Мир, М., 1979.
10. И. М. Певзнер, *Геометрия корневых элементов в группах типа* E_6. — Алгебра и анализ **23**, No.3 (2011), 261–309.
11. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов,* I. — Алгебра и анализ **23**, No.5 (2011), 155–198.

12. И. М. Певзнер, *Ширина групп типа* E_6 *относительно множества корневых элементов,* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 242–264.
13. И. М. Певзнер, *Ширина группы* $\mathrm{GL}(6, K)$ *относительно множества квазикорневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 183–204.
14. И. М. Певзнер, *Ширина экстраспециального унипотентного радикала относительно множества корневых элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 168–177.
15. Т. А. Спрингер, *Линейные алгебраические группы*, Алгебраическая геометрия – 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. проблемы мат. Фундам. направления **55**, ВИНИТИ, М., 1989, с. 5–136.
16. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975.
17. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы*, Наука, М., 1980.
18. Дж. Хамфри, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М., 2003.
19. A. Cohen, A. Steinbach, R. Ushirobira , D. Wales, *Lie algebras generated by extremal elements.* — J. Algebra **236** (2001), No. 1, 122–154.
20. J. Dieudonné, *Sur les générateurs des groupes classiques.* — Summa Brasil. Math. **3** (1955), 149–178.
21. T. A. Springer, *Linear algebraic groups*, Progress in Mathematics **9**, Birkhäuser Boston Inc., Boston, 1998.

Pevzner I. M. The existence of root subgroup translated by a given element into its opposite.

Let Φ be a simply-laced root system, K an algebraically closed field, $G = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, K)$ the adjoint group of type Φ over K. Then for every nontrivial element $g \in G$ there exists a root element x of the Lie algebra of G such that x and gx are opposite.

РГПУ им. А. И. Герцена
наб. реки Мойки, д. 48
191186, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pevzner_igor@mail.ru

Поступило 13 октября 2017 г.