Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

А. В. Кухарев, И. Б. Кайгородов, И. Б. Горшков

КОГДА ГРУППОВОЕ КОЛЬЦО ПРОСТОЙ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ ПОЛУЦЕПНОЕ

§1. Введение

Пусть F – поле, G – конечная группа. Статья посвящена проблеме нахождения всех таких пар (F, G), что групповое кольцо FG полуцепное, т.е. такое, что каждый неразложимый проективный правый (эквивалентно левый) FG-модуль имеет единственный композиционный ряд. Несмотря на множество известных результатов в этом направлении, полное описание таких пар до сих пор не найдено.

Заметим во-первых, что если характеристика p поля F не делит порядок группы G, то по теореме Машке FG есть полупростое артиново кольцо, и следовательно полуцепное. Поэтому основной интерес для изучения представляет p-модулярный случай.

Поскольку каждое артиново полуцепное кольцо имеет конечный тип представлений, то по результату Хигмана [16] полуцепность кольца FG влечет, что каждая силовская p-подгруппа группы G циклическая. Если $p = 2$, то это условие и достаточное, поскольку тогда G является 2-нильпотентной. Этот результат расширяется до p-разрешимых групп. А именно, используя результат Морита [23], заключаем, что если G – p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, то кольцо FG полуцепное. Хотя свой результат Морита получил над алгебраически замкнутым полем, это не является ограничением, поскольку Эйзенбад и Гриффит [10] показали, что полуцепность FG зависит только от характеристики поля F.

Однако результат Морита не работает для не-p-разрешимых групп. Например, силовская 5-подгруппа группы $G = \mathrm{SL}_2(5)$ циклическая, но кольцо FG не полуцепное для любого поля F характеристики 5.

Ключевые слова: Полуцепное кольцо, групповое кольцо, конечная простая группа.

Работа поддержана грантом БРФФИ (проект Ф17РМ-063), грантом РФФИ (проект 17-51-04004) и грантом Программы Президента РФ “Поддержка молодых российских ученых” (МК-6118.2016.1).

В настоящей работе будет найден полный список простых конечных групп, чьи групповые кольца над полем являются полуцепными, а именно получен, следующий основной результат.

Теорема 1. *Пусть G – конечная простая группа и F – поле характеристики p, делящей порядок группы G. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если выполняется одно из следующих условий.*

1) $G = C_p$.

2) $G = \mathrm{PSL}_2(q)$, $q \neq 2$ *или* $G = \mathrm{PSL}_3(q)$, *где* $q \equiv 2, 5 \pmod 9$ *и* $p = 3$.

3) $G = \mathrm{PSL}_2(q)$ *или* $G = \mathrm{PSU}_3(q^2)$, *где* p *делит* $q-1$ *и* $p > 2$.

4) $G = \mathrm{Sz}(q)$, $q = 2^{2n+1}$, $n \geqslant 1$, *где либо* $p > 2$ *делит* $q-1$, *либо* $p = 5$ *делит* $q + r + 1$, $r = 2^{n+1}$, *но* 25 *не делит это число.*

5) $G = {}^2G_2(q^2)$, $q^2 = 3^{2n+1}$, $n \geqslant 1$, *где либо* $p > 2$ *делит* $q^2 - 1$, *либо* $p = 7$ *делит* $q^2 + \sqrt{3}q + 1$, *но* 49 *не делит это число.*

6) $G = M_{11}$ *и* $p = 5$;

7) $G = J_1$ *и* $p = 3$.

При этом группа A_5 с $p = 3$ здесь встречается дважды: как $\mathrm{PSL}_2(4)$ в пункте 2), и как $\mathrm{PSL}_2(5)$ в пункте 3).

Основной инструмент доказательства теоремы 1 – использование следующей хорошо известной характеризации полуцепности групповых колец. А именно, если поле F достаточно большое, то групповое кольцо FG полуцепное, если и только если дерево Брауэра каждого p-блока группы G является звездой с исключительной вершиной (если такая существует) в ее центре. Это позволяет использовать хорошо развитую технику, основанную на деревьях Брауэра, чтобы завершить доказательство теоремы. В действительности, ввиду полученных ранее результатов [20, 21, 34–36, 38–40] потребуется рассмотреть только случай, когда G – симплектическая, унитарная или ортогональная группа, определенная над конечным полем характеристики 2. Мы постараемся сделать статью самодостаточной, добавив и разработав существующие знания о полуцепных групповых кольцах. В качестве примера использования доказанной теоремы получим ответ на вопрос о полуцепности групповых колец для неразрешимых групп малого порядка ($\leqslant 10^4$).

Конечно, существует также более широкая постановка рассматриваемой проблемы. А именно, Туганбаев [32, проблема 16.9] ставит задачу охарактеризовать кольца R и группы G такие, что кольцо RG полуцепное. Здесь мы не будем касаться этого общего вопроса, потому что он требует отдельного обсуждения, но некоторые связи очевидны. Скажем, если R содержит поле как фактор, то результаты этой статьи могут быть применимы.

§2. Предварительные сведения

Все кольца в работе являются ассоциативными с единицей, и под модулем понимается унитальный правый модуль над кольцом, если не оговорено другое. Модуль M называется *цепным*, если его решетка подмодулей является цепью; и M называется *полуцепным*, если он есть прямая сумма цепных модулей. Будем говорить, что кольцо R *полуцепное*, если правый регулярный модуль R_R полуцепной и то же самое верно для левого модуля ${}_RR$. В действительности, кольцо R полуцепное если и только если существует множество $e_1, \ldots, e_n$ попарно ортогональных идемпотентов, причем оно *полное*, т.е. $e_1+\cdots+e_n = 1$, и каждый *главный проективный* модуль e_iR является цепным, также как и каждый левый модуль Re_i. Кроме того, этот набор идемпотентов единственен с точностью до сопряжений единицей кольца. Подробности по общей теории полуцепных колец читатель может найти в работах [2, 25].

Нас интересует, когда групповое кольцо FG конечной группы G над полем F является полуцепным. Ввиду теоремы Машке, будем предполагать, что характеристика p поля F конечна и делит порядок группы G.

Необходимое условие полуцепности следует из теоремы Хигмана [16], описывающей групповые кольца конечного типа представлений.

Факт 1. *Если групповое кольцо FG полуцепное, то силовская p-подгруппа группы G является циклической.*

Как уже упоминалось выше, обратное неверно. Например, пусть F – алгебраически замкнутое поле и $G = \mathrm{SL}_2(p)$ для простого $p \geqslant 5$. Тогда каждая силовская p-подгруппа группы G состоит из p элементов, следовательно, циклическая. Далее, из [1, с. 15] следует, что FG имеет ровно p простых модулей $S_1, \ldots, S_p$. Кроме того, для $1 < i < p-1$ проективное накрытие P_i для S_i не цепное, а именно $\mathrm{Jac}(P_i)/\operatorname{Soc}(P_i)$ есть прямая сумма двух простых модулей S_{p+1-i} и S_{p-1-i}. На самом деле FG не полуцепное для любого поля F характеристики p ввиду следующего результата Эйзенбуда и Гриффита [10] (см. также [34]):

Факт 2. *Пусть F, F' – поля характеристики p, делящей порядок группы G. Тогда кольцо FG полуцепное, если и только если кольцо $F'G$ полуцепное.*

Отсюда получаем одно из достаточных условий полуцепности. Напомним, что группа G называется *p-нильпотентной*, если ее силовская p-подгруппа P допускает нормальное дополнение H. В частности, G является полупрямым произведением $H : P$. Следующий результат содержится в [35, теорема 4.3].

Факт 3. *Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок группы G. Далее предположим, что G является p-нильпотентной с циклической силовской p-подгруппой. Тогда FG является (левым и правым) кольцом главных идеалов и, в частности, полуцепное.*

Например, хорошо известно, что каждая группа G с циклической 2-силовской подгруппой является 2-нильпотентной, поэтому для $p = 2$ групповое кольцо FG полуцепное тогда и только тогда, когда силовская 2-подгруппа группы G циклическая. Таким образом, при доказательстве основного результата статьи можно считать, что $p > 2$.

Этот результат можно распространить на более широкий класс групп. Напомним, что группа G называется *p-разрешимой*, если она допускает композиционный ряд, последовательными факторами которого являются либо p-группы, либо p'-группы. Если G имеет циклическую силовскую p-подгруппу (случай нашего основного интереса), то согласно [33] группа G является p-разрешимой, если и только если она обладает рядом $1 \subseteq O_{p'}(G) \subseteq K \subseteq G$ вполне характеристических подгрупп, где K – полупрямое произведение $O_{p'}(G) : P$ (следовательно, p-нильпотентно) и G/K – циклическая p'-группа.

Факт 4. *Пусть G – p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой и F – поле характеристики p. Тогда групповое кольцо FG полуцепное.*

Доказательство. Для алгебраически замкнутого поля F это было доказано Морита [23] (и также следует из [30]). Остается применить факт 2. $\square$

Кроме того, из результата Морита следует, что для p-разрешимой группы G радикал Джекобсона FG является главным левым и главным правым идеалом, а кратность главных проективных модулей в заданном блоке FG постоянна. Из [20, теорема 2.3] вытекает, что это справедливо для любого поля характеристики p.

Заметим, что каждое групповое кольцо FG конечной группы *квазифробениусово*, т.е. каждый проективный модуль инъективен и наоборот. В частности, FG допускает самодуальность. Отсюда следует, что при проверке кольца FG на полуцепность достаточно проверять, что это кольцо является *полуцепным справа*, т.е. что все главные проективные модули e_iFG являются цепными.

Кроме того, при проверке полуцепности группового кольца (скажем, вычисляя ряды радикалов в MAGMA [5]), можно считать F простым полем. При расширении поля F идемпотенты могут разделяться, поэтому блочная структура кольца FG может измениться, но это не повлияет на полуцепность. Здесь показан типичный пример.

Пример 1. (см. [20, предложение 5]) Пусть $2.S_4^-$ – двойное покрытие группы S_4. Эта группа 3-разрешима с циклической силовской 3-подгруппой, поэтому групповое кольцо FG является полуцепным для любого поля F характеристики 3. Вычисляя в GAP [13] полную систему ортогональных идемпотентов этого кольца, восстанавливаем его блочную структуру.

1) Если $F = \mathbb{F}_3$ – простое поле, то $FG = M_3(F)^2 \oplus B \oplus M_2(W)$, где B – полуцепной блок

$$\begin{pmatrix} F[x] & F[x] \\ xF[x] & F[x] \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} x^2F[x] & xF[x] \\ x^2F[x] & x^2F[x] \end{pmatrix}$$

и $W = \mathbb{F}_9[y, \alpha]/(y^3)$ – фактор кольца косых полиномов с автоморфизмом Фробениуса $\lambda \mapsto \lambda^3$.

2) Если $F = \mathbb{F}_9$, то $FG = M_3(F)^2 \oplus B \oplus M_2(B)$.

§3. Деревья Брауэра и полуцепность групповых колец

В этом разделе будут даны основные сведения о деревьях Брауэра – основном инструменте исследования полуцепности групповых колец. Дерево Браэура определено для каждого блока кольца FG (или p-блока группы G) с циклической дефектной группой и представляет собой граф (а именно, дерево), вершинам которого соответствуют неприводимые обыкновенные характеры группы G, а ребрам – неприводимые (p-модулярные) характеры Брауэра. Если вершине соответствует более одного характера, то она называется *исключительной*. В блоке может быть не более одной исключительной вершины. Блоки с циклической дефектной группой для краткости будем называть *циклическими*. Теория деревьев Брауэра подробно изложена в [41] и [22]; здесь мы ограничимся только несколькими примерами.

Предположим, что G – группа с циклической силовской p-подгруппой P. Поскольку дефектная группа каждого блока B есть подгруппа в P, то каждый блок обладает деревом Брауэра. В частности, сама P является дефектной группой *главного блока* B_0, т.е. блока, содержащего тривиальный характер.

Следующий факт позволяет находить число ребер дерева Брауэра и кратность исключительной вершины.

Факт 5. *Пусть G – конечная группа с (нетривиальной) циклической силовской p-подгруппой P. Тогда:*

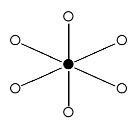
1) *Число ребер $e_0 = e_0(G)$ главного блока группы G равно $|N_G(P)/C_G(P)|$, где $N_G(P)$ и $C_G(P)$ – нормализатор и централизатор P в G. Более того, e_0 делит $p-1$, а кратность исключительной вершины (если такая есть) равна $m_0 = (|P|-1)/e_0$.*

2) *Если B – произвольный блок с дефектной группой D, то число ребер e в его дереве Брауэра делит e_0. Кроме того, кратность исключительной вершины равна $(|D|-1)/e$.*

Доказательство. Первая часть следует из [4, с. 173] и [3, теорема 6.5.5]. По второму утверждению аргументация следующая. Пусть Q – подгруппа порядка p в D. Тогда (см. [3, с. 212]) e делит $|N_G(Q)/C_G(Q)|$. Согласно [27, предложение 1], последнее делит $|N_G(P)/C_G(P)| = e_0$. $\square$

Заметим, что нормализатор $N_G(P)$ действует на P сопряжениями, а e_0 – порядок этого действия. Таким образом, если H является нормальной подгруппой в G, содержащей P, то $e_0(H) \leqslant e_0(G)$.

Будем говорим, что дерево Брауэра является *звездой*, если не более одной вершины этого графа (а именно его центр) имеют степень больше единицы. Здесь показан типичный пример звезды (черная точка означает исключительную вершину):

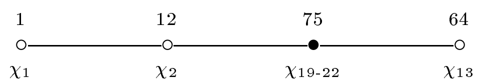


Под *отрезком* (или *открытым полигоном*) будем понимать дерево Браэура следующего вида:

Отрезок с e ребрами является звездой тогда и только тогда, когда $e = 1$ или $e = 2$.

Неприводимый характер χ назовем *вещественным*, если либо все его значения вещественны, либо χ – исключительный характер, принимающий вещественные значения на p-регулярных классах. Согласно [18, с. 3] вещественные характеры данного блока образуют так называемый "*вещественный стебель*" (real stem) своего дерева Брауэра, который является отрезком.

Например, пусть G – специальная унитарная группа $\mathrm{SU}_3(4^2)$. Для $p = 13$ силовская подгруппа циклическая. По таблице характеров находим, что дерево Брауэра главного p-блока группы G является следующим отрезком, где все неисключительные характеры действительны:

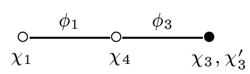


Однако каждый исключительный характер $\chi_{19\text{-}22}$ принимает невещественные значения на всех классах элементов порядка 13.

Следующий факт дает критерий проверки полуцепности группового кольца.

Факт 6. [41, следствие 7.2.2] *Пусть G – конечная группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой и F – поле характеристики p. Тогда кольцо FG полуцепное, если и только если дерево Браэура каждого блока группы G является звездой, чья исключительная вершина (если таковая имеется) расположена в ее центре.*

Например, пусть $G = A_5$ и $p = 5$. Тогда дерево Браэура главного блока следующее:



Здесь χ_1 – тривиальный характер. Характеры χ_3, χ_3' образуют исключительную вершину кратности 2. Поскольку эта вершина находится не в центре, групповое кольцо группы A_5 над любым полем характеристики 5 не полуцепное.

Тот же результат получается путем расщепления идемпотентов в групповом кольце FA_5 для $F = \mathbb{F}_5$. А именно имеет место разложение $FA_5 = M_5(F) \oplus C$, где

$$C = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & X \\ Y & Y & Y & T \end{pmatrix}$$

представляет собой неполуцепной блок размерности 35, являющийся раздутием его $(3,4)$-минора $\left(\begin{smallmatrix} Q & X \\ Y & T \end{smallmatrix}\right)$, где $Q \cong F[x]/(x^3)$, $T \cong F[x]/(x^2)$, а X, Y – одномерные бимодули (см. [20, предложение 4]).

Очевидно, что приведенный выше критерий (факт 6) эквивалентен следующему: каждый неприводимый p-модулярный характер поднимается *единственным* образом до неприводимого обыкновенного характера. Например, для $G = A_5$, $p = 5$ каждый p-модулярный характер может быть поднят, однако это поднятие не единственно: ограничение обыкновенных характеров χ_3 и χ_3' на $5'$-классы дает ϕ_3. Это требование единственности упущено в характеризации полуцепных групповых колец в [19, следствие 7.5].

Заметим, что полуцепность является Морита-инвариантным свойством. Кроме того, каждое фактор-кольцо полуцепного кольца является полуцепным. Например, если H – нормальная подгруппа группы G, то из полуцепности FG следует, что кольцо и $F(G/H)$ полуцепное.

Скажем, что блок B кольца FG *накрывает* блок b кольца FH (где H нормальна в G), если найдутся неприводимые характеры $\chi \in B$ и $\xi \in b$ такие, что ξ является компонентой сужения χ на H. Например, главный блок FG накрывает главный блок FH. Нам понадобится следующий факт.

Факт 7. [41, следствие 6.2.8] *Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок группы G, и пусть H – нормальная подгруппа в G.*

1) *Пусть B – блок кольца FG, который накрывает блок b кольца FH. Предположим, что H содержит дефектную группу блока B. Тогда B есть полуцепное кольцо, если и только если таковым является b.*

2) *В частности, если индекс H в G взаимно прост с p, то кольцо FG полуцепное, если и только если то же верно для FH.*

Заметим (см. [41, лемма 4.4.12]), что аннулятор главного блока любой конечной группы G является его наибольшей нормальной p'-подгруппой $O_{p'}(G)$. Таким образом, при изучении главного блока можно переходить к фактор-группе $G/O_{p'}(G)$, и обратно.

§4. Полуцепные групповые кольца простых групп

В этом разделе мы приступим к доказательству основной теоремы 1, которое базируется на классификации простых конечных групп [8]. В первую очередь прокомментируем уже известные результаты по классификации простых конечных групп, чьи групповые кольца над заданным полем F характеристики p полуцепные.

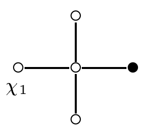
1) Поскольку каждая абелева группа p-разрешима, то групповое кольцо $R = FC_p$ полуцепное. На самом деле, такое кольцо является даже *цепным*, а именно решетка подмодулей регулярного модуля ${}_RR$ является цепью длины p.

2) Случай знакопеременных групп разобран в [36] с использованием теоремы Скоупс [29] о Морита-эквивалентности блоков симметрических групп.

3) Случай проективных специальных групп разобран в [37], используя информацию о матрицах разложения групп $\mathrm{PSL}(2, q)$ [6].

4) Случай спорадических простых групп изучен в [38], используя известные деревья Брауэра из [18], а также некоторые факты о свойствах деревьев Брауэра (например, соотношение централизаторов – см. [4, следствие 1]) и метод чередующейся маркировки вершин (см. [18, определение 2.1.12]).

5) Анализ групп Судзуки $Sz(q), q = 2^{2n+1}$, проведен также в [38] и основан на результатах работы [7]. Например, когда $5 \mid q + r + 1$ (где $r = 2^{n+1}$), силовская 5-подгруппа является циклической, а дерево Брауэра главного блока имеет следующую форму:



Этот блок полуцепной тогда и только тогда, когда кратность исключительной вершины равна единице, т.е. если 25 не делит $q + r + 1$. Например, это имеет место, когда $n = 3$, т.е. $q = 128$.

Аналогичная ситуация имеет место (см. [40]), когда G – группа Ри ${}^2G_2(q^2)$. А именно, если p делит $q^2+\sqrt{3}q+1$, то, согласно [17, теорема 4.3], каждая силовская p-подгруппа является циклической, а дерево Брауэра главного блока G является звездой с 6 ребрами, исключительная вершина которой находится на периферии. Поскольку кратность равна $(|P|-1)/6$, то если кольцо FG полуцепное, то должно быть $p=7$ и $|P|=7$. Например, это имеет место, когда $q^2=3^{13}$.

Оставшиеся исключительные группы Ли рассмотрены в [40] – для них полуцепных групповых колец не возникает.

6) В работе [39] рассмотрены симплектические, унитарные и ортогональные группы, определенные над полем $\mathbb{F}_q$, где q нечетно. Основным инструментом исследования полуцепности групповых колец этих групп был результат Фонга и Шринивасан [12]. Он применим, когда $q\neq 2$, $p\neq 2$ и p не делит q. В этом случае деревья Брауэра всех циклических блоков указанных классических групп будут отрезками.

Таким образом, для завершения доказательства теоремы 1 остается рассмотреть случай, когда G – симплектическая, ортогональная или унитарная простая группа, определенная над полем с четным числом элементов. Доказательство сходно с тем, что использовалось в [39], но потребуется замена результату Фонга и Шринивасан.

Лемма 1. *Пусть G – любая из групп $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$, $\mathrm{GO}^{\pm}_{2m}(q)$, где q четно. Тогда дерево Брауэра каждого циклического блока группы G является отрезком.*

Доказательство. Согласно [15], каждый элемент группы G есть произведение двух инволюций. Из этого вытекает, что каждый элемент группы G сопряжен с его обратным. Поэтому каждый характер группы G вещественнозначен. Таким образом, дерево Брауэра каждого циклического блока совпадает с его вещественным стеблем и, следовательно, является отрезком. $\square$

Поскольку простые неабелевы группы не 2-нильпотентны, то их силовские 2-подгруппы не циклические. Кроме того (см. [28, предложение 5.1]), при $p\mid q$ силовская p-подгруппа также не циклическая. Поэтому можем предполагать, что *$p>2$ и p не делит q*. Мы будем использовать результаты работы [31, таблица 1] о порядках силовских p-подгрупп для такого случая.

Напомним также информацию о силовских подгруппах общих линейных групп. Предположим, что d – порядок q по модулю p. Тогда

$G = \mathrm{GL}_d(q)$ содержит копию мультипликативной группы $\mathbb{F}_{q^d}^*$ поля Галуа, так называемый *цикл Зингера*, и силовская p-подгруппа P группы G может быть выбрана в этом цикле. Тогда централизатор P в G совпадает с этим циклом, а нормализатор P порождается над централизатором элементом y, который действует сопряжением на порождающем α подгруппы P как $\alpha^y = \alpha^q$. В частности, индекс $|N_G(P)/C_G(P)|$ равен d.

Заметим, что силовская p-подгруппа в $\mathrm{GL}_m(q)$ является циклической и нетривиальной тогда и только тогда, когда $m/2 < d \leqslant m$. В этом случае в качестве P можно взять ее копию в группе $\mathrm{GL}_d(q)$, вложенной в левый верхний угол.

Идея доказательства заключается в следующем. Если кольцо FG полуцепное, то d не может быть слишком маленьким по сравнению с размером матриц, иначе P не будет циклической. Кроме того, d не может быть слишком большим, иначе дерево Брауэра главного блока не будет звездой. Это существенно ограничивает размер матриц классических групп, для которых возможны полуцепные групповые кольца.

§5. Симплектические группы

Поскольку q четно, определим симплектические группы, используя невырожденную симметричную билинейную форму f на $2m$-мерном векторном пространстве V над полем Галуа $\mathbb{F}_q$. Эта форма единственна с точностью до выбора базиса в V и задается матрицей W такой, что $W = W^t$, где t означает транспонирование.

Напомним, что *симплектическая группа* $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$ состоит из обратимых матриц $A \in \mathrm{GL}_{2m}(q)$, сохраняющих форму f, т.е. $AWA^t = W$. Эта группа имеет следующий порядок:

$$|\,\mathrm{Sp}_{2m}(q)| = q^{m^2} \cdot (q^2-1) \cdot (q^4-1) \cdot \ldots \cdot (q^{2m}-1)\,.$$

Например, можно взять $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Тогда отображение $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ задает вложение группы $\mathrm{GL}_m(q)$ в $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$.

Так как q четно, то группа $G = \mathrm{Sp}_{2m}(q)$ совпадает с ее проективным вариантом $\mathrm{PSp}_{2m}(q)$ и проста, за двумя исключениями: $\mathrm{PSp}_2(2) \cong S_3$ и $\mathrm{PSp}_2(4) \cong S_6$ (см. Атлас [8, с. 10]). Далее, $\mathrm{PSp}_2(q)$ изоморфна $\mathrm{PSL}_2(q)$. Этот случай уже проанализирован в [37], поэтому полуцепность встречается только в случаях 2) и 3) теоремы 1. Таким образом, можно считать, что $m > 1$, и мы докажем, что в этом случае полуцепных колец не возникает.

Предложение 1. *Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок (простой) симплектической группы $G = \mathrm{Sp}_{2m}(q)$, где q четно и $m \geqslant 2$. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Пусть d – мультипликативный порядок q по модулю p.

Если $d = 1$, т.е. p делит $q-1$, то при $m \geqslant 2$ силовская p-подгруппа $\mathrm{GL}_m(q)$ не циклическая. Ввиду упомянутого выше диагонального вложения, то же верно и для силовской p-подгруппы группы $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$, что противоречит полуцепности.

Поэтому можем предполагать, что $d \neq 1$. Покажем, что

$$e = |N_G(P)/C_G(P)| \geqslant d$$

и $d \geqslant 3$. Поскольку e – число ребер дерева Брауэра главного блока группы G, которое является отрезком, отсюда будет вытекать неполуцепность кольца FG.

Структура силовской p-подгруппы P группы $G = \mathrm{Sp}_{2m}(q)$ зависит от четности числа d.

Четное d. В этом случае, согласно [31, таблица 1], P совпадает с силовской p-подгруппой объемлющей группы $\mathrm{GL}_{2m}(q)$. Поскольку P циклическая нетривиальная, то $m < d \leqslant 2m$. Далее, $m \geqslant 2$ влечет $d \geqslant 4$.

Группа $\mathrm{Sp}_d(q) \times \mathrm{Sp}_{2m-d}(q)$ может быть вложена в $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$ как блочная диагональ (при подходящем выборе W), поэтому P может быть выбрана в левом верхнем блоке $\mathrm{GL}_d(q)$. Таким образом, достаточно показать, что индекс $e_d = |N_{G_d}(P)/C_{G_d}(P)|$, где $G_d = \mathrm{Sp}_d(q)$, не меньше d.

Пусть α – порождающий силовской p-подгруппы P_d группы G_d. По [31, лемма 4.6] фактор-группа $N_{G_d}(P_d)/C_{G_d}(P_d)$ порождается элементом y, который действует сопряжением на α как $\alpha^y = \alpha^d$. Поскольку этот автоморфизм имеет порядок d, получаем $e_d \geqslant d \geqslant 4$, что и требовалось.

Нечетное d. Согласно [31], порядок P совпадает с порядком силовской p-подгруппы P' группы $\mathrm{GL}_m(q)$. Отождествим P с ее образом P' при описанном выше диагональном вложении $\mathrm{GL}_m(q)$ в $\mathrm{Sp}_{2m}(q)$. Поскольку P' циклическая, то $m/2 < d \leqslant m$. Таким образом, $d \geqslant 3$.

Осталось показать, что $e \geqslant d$. Как и выше, можем положить $m = d$. Рассмотрим элемент $y' \in \mathrm{GL}_d(q)$, который действует сопряжением на P' как автоморфизм порядка d. Тогда диагональный образ этого элемента принадлежит нормализатору P и действует автоморфизмом порядка d на этой подгруппе. □

§6. Ортогональные группы

Если q четно, то ортогональная группа нечетной размерности $\mathrm{O}_{2m+1}(q)$ изоморфна симплектической группе $\mathrm{PSp}_{2m}(q)$, и этот случай уже рассмотрен. Так что нам необходимо проанализировать только ортогональные группы $\mathrm{O}^{\pm}_{2m}(q)$. Строение таких групп для четного q описано в [9].

Группы типа "+". *Общая ортогональная группа* $\mathrm{GO}^{+}_{2m}(q)$ состоит из обратимых матриц A порядка $2m$, сохраняющих квадратичную форму $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. С ней ассоциирована билинейная форма $W = Q+Q^t$. Можно определить гомоморфизм группы $\mathrm{GO}^{+}_{2m}(q)$ в $\{\pm 1\}$, отображающий элементы в $(-1)^k$, где k – размерность его фиксированного подпространства при действии на V. Ядро этого отображения есть *ортогональная группа* $\mathrm{O}^{+}_{2m}(q)$, порядок которой следующий:

$$|\,\mathrm{O}^{+}_{2m}(q)| = q^{m(m-1)} \cdot (q^m - 1) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i} - 1)\,.$$

Для $m \leqslant 3$ эти группы изоморфны другим группам, для которых ответ известен, а именно $\mathrm{O}^{+}_{4}(q) \cong \mathrm{PSL}_2(q) \times \mathrm{PSL}_2(q)$ и $\mathrm{O}^{+}_{6}(q) \cong \mathrm{PSL}_4(q)$. Поэтому только случай $m > 3$ представляет интерес.

Предложение 2. *Пусть F – поле характеристики p, делящее порядок ортогональной группы $G = \mathrm{O}^{+}_{2m}(q)$, где q четно и $m \geqslant 4$. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Как обычно, можно считать, что $p > 2$ не делит q и что силовская p-подгруппа P в G нетривиальная и циклическая. Поскольку индекс G в $H = \mathrm{GO}^{+}_{2m}(q)$ равен 2, то P также силовская p-подгруппа в H.

Если p делит $q-1$, то P не циклическая. Поэтому $2 \leqslant d \leqslant 2m-2$, где d – порядок q по модулю p.

Напомним (см. лемму 1), что дерево Брауэра главного блока B'_0 для $H = \mathrm{GO}^{+}_{2m}(q)$ является отрезком, скажем, с e' ребрами. Далее, из факта 7 следует, что главный блок G является полуцепным тогда и только тогда, когда то же самое верно для H, поэтому достаточно доказать, что $e' > 2$.

В зависимости от четности d возможны следующие случаи.

Случай нечетного d. По [31] порядок P совпадает с порядком силовской p-подгруппы группы $\mathrm{GL}_m(q)$. Так как P нетривиальная циклическая, то $m/2 < d \leqslant m$, и поэтому $m \geqslant 4$ дает $d > 2$. Заметим, что образ $\mathrm{GL}_m(q)$ при диагональном вложении $A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-t} \end{smallmatrix}\right)$ содержится в $\mathrm{GO}^+_{2m}(q)$. Теперь, рассмотрев нормализатор силовской p-подгруппы в $\mathrm{GL}_d(q)$ и это вложение, получим $e' \geqslant d > 2$, как требовалось.

Случай четного d. Из $d \leqslant 2m - 2$ следует, что целая часть дроби $d/2m$ равна нулю, поэтому по [31] P совпадает с силовской p-подгруппой группы $\mathrm{GL}_{2m}(q)$. Поскольку P циклическая нетривиальная, то $m < d$. Теперь по [31, лемма 4.6] получаем, что $e' \geqslant d$. Тогда $d > 4$ влечет $e' > 4$, что и требовалось. $\square$

Группы типа "–". Пусть γ – примитивный элемент поля $\mathbb{F}_{q^2}$, и положим $a = \gamma + \gamma^q$, $b = \gamma^{q+1}$.

Общая ортогональная группа $\mathrm{GO}^-_{2m}(q)$ состоит из обратимых матриц A порядка $2m$, которые сохраняют квадратичную форму $Q = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_{m-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{smallmatrix}\right)$. Ортогональная группа $\mathrm{O}^-_{2m}(q)$ определяется так же, как для типа "+". Порядок этой группы следующий:

$$|\,\mathrm{O}^-_{2m}(q)| = q^{m(m-1)} \cdot (q^m + 1) \cdot \prod_{i=1}^{m-1} (q^{2i} - 1)\,.$$

Для $m \leqslant 3$ эти группы изоморфны группам из других классических серий, а именно $\mathrm{O}^-_4(q) \cong \mathrm{PSL}_2(q^2)$ (уже рассмотрено) и $\mathrm{O}^+_6(q) \cong \mathrm{PSU}_4(q^2)$ (будет рассмотрено ниже). Таким образом, только случай $m > 3$ нас сейчас интересует.

Предложение 3. *Пусть F – поле характеристики p, делящее порядок ортогональной группы $G = \mathrm{O}^-_{2m}(q)$, где q четно и $m \geqslant 4$. Тогда групповое кольцо FG не полуцепное.*

Доказательство. Используем те же обозначения, что и при доказательстве предложения 2. Единственное различие заключается в более слабом условии $d \leqslant 2m$, потому что $d = 2m$ может возникнуть, когда p делит $q^m + 1$. Опять же, достаточно показать, что $e' > 2$.

Из [31, таблица 1] получаем следующие возможности для P.

Случай нечетного d. Тогда P является образом (через указанное выше косое диагональное вложение) силовской p-подгруппы P' группы $\mathrm{GL}_{m-1}(q)$. Так как P' циклическая, то из $(m-1)/2 < d$ заключаем, что $d \geqslant 3$. Применяя [31, лемма 4.6], получим $e' \geqslant d \geqslant 3$, как требовалось.

Случай четного d. Имеем два подслучая.

Если целая часть дроби $d/2m$ нечетна, то неравенство $d \leqslant 2m$ влечет $d = 2m$. Кроме того, P совпадает с некоторой силовской p-подгруппой группы $\mathrm{GL}_{2m}(q)$. И так как P циклическая, то из $m < d$ получаем $d \geqslant 6$. Снова применяя [31, лемма 4.6], получим $e' \geqslant d \geqslant 6$, что требовалось.

В противном случае целая часть $d/2m$ равна нулю, поэтому P' является силовской p-подгруппой в $\mathrm{GL}_{2m-2}(q)$. Так как P' циклическая, то из $m - 1 < d$ следует $d \geqslant 4$. И [31, лемма 4.6] дает, что $e' \geqslant d \geqslant 4$. □

§7. Унитарные группы

Лемма 2. *Пусть $G = \mathrm{SU}_n(q)$ – квазипростая специальная унитарная группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой. Тогда дерево Брауэра главного p-блока группы G является отрезком.*

Доказательство. Из [26, раздел 6] следует, что каждый неисключительный характер главного p-блока группы G вещественнозначный, и значит лежит на вещественном стебле. □

Пусть $\bar{\ }$ означает инволюцию $\overline{a} = a^q$ поля Галуа $\mathbb{F}_{q^2}$ и пусть V – n-мерное векторное пространство над этим полем. Существует (в сущности единственная) невырожденная эрмитова полуторалинейная форма $f : V \times V \to \mathbb{F}_{q^2}$. Если W – матрица формы f, то $W = \overline{W}^t$. Например, в качестве W может быть взята единичная матрица I.

Общая унитарная группа $\mathrm{GU}_n(q^2)$ состоит из матриц $A \in \mathrm{GL}_n(q^2)$, сохраняющих f, т.е. $AW\overline{A}^t = W$. Порядок этой группы следующий:

$$|\,\mathrm{GU}_n(q^2)| = q^{n(n-1)/2} \cdot (q+1) \cdot (q^2-1) \cdot \cdots \cdot (q^n - (-1)^n)\,.$$

Унитарные матрицы определителя 1 образуют нормальную подгруппу в $\mathrm{GU}_n(q^2)$ индекса $q + 1$, *специальную унитарную группу*, $\mathrm{SU}_n(q^2)$. Центр Z этой группы состоит из скалярных матриц и имеет порядок $(n, q+1)$. Фактор-группа $\mathrm{PSU}_n(q^2) = \mathrm{SU}_n(q^2)/Z$ является *проективной специальной унитарной группой.* Если $n \geqslant 3$, то эта группа проста, а $\mathrm{PSU}_3(2^2)$ является единственным исключением.

Поскольку $\mathrm{PSU}_2(q^2) \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, нас интересует только случай, когда $n \geqslant 3$.

Предложение 4. *Пусть F – поле характеристики p, делящей порядок простой группы $H = \mathrm{PSU}_n(q^2)$, где $n \geqslant 3$ и q четно. Тогда групповое кольцо FH полуцепное, если и только если $n = 3$ и $p > 2$ делит $q - 1$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $n = 3$. Если $p \mid q - 1$, то из [14, теорема 6.1] следует, что групповое кольцо FG группы $G = \mathrm{SU}_3(q^2)$ полуцепное. Тогда и групповое кольцо FH ее фактор-группы $H = \mathrm{PSU}_3(q^2)$ полуцепное. Кроме того, из [14] также вытекает, что никаких других полуцепных колец для группы $\mathrm{SU}_3(q)$ не существует, потому что либо ее силовская p-подгруппа P не циклическая, либо главный блок не полуцепной. Если p не делит $q + 1$ или 3, то оба свойства наследуются от G. В оставшемся случае, когда $H = \mathrm{PSU}_3(q^2)$ и $p = 3$ делит $q + 1$, нетрудно проверить, что каждая силовская 3-подгруппа группы H не циклическая.

Таким образом, можно предполагать, что $n \geqslant 4$. Тогда если p делит $q \pm 1$, то силовская p-подгруппа группы H не циклическая. В противном случае, если d – порядок q по модулю p, то $2 < d \leqslant 2n$.

Далее, главный блок группы H совпадает с главным блоком B_0 группы $G = \mathrm{SU}_n(q^2)$, а дерево Брауэра блока B_0 является отрезком. Поэтому достаточно показать, что количество ребер e в этом отрезке превышает 2. Силовская p-подгруппа группы G совпадает с силовской p-подгруппой группы $\mathrm{GU}_n(q^2)$. Рассмотрим различные возможности для P.

Случай $d \equiv 2 \pmod 4$. В этом случае, согласно [31], P совпадает с силовской p-подгруппой объемлющей группы $\mathrm{GL}_n(q^2)$. Заметим, что порядок f числа q^2 по модулю p равен $d/2$. Поскольку P циклическая, заключаем, что $n/2 < f \leqslant n$, т.е. $n < d \leqslant 2n$. Тогда $d \geqslant 6$.

Если $n = f$, то централизатор $C_G(P)$ содержится в цикле Зингера, следовательно, имеет нечетный порядок. Поскольку G не имеет инволюций в аннуляторе блока B_0, но имеет не менее двух классов инволюций, то по [4, доказательство теоремы 1 и следствия 1], заключаем, что B_0 не является звездой, поэтому $e \geqslant 3$ для этой группы. Рассматривая диагональное вложение $\mathrm{SU}_f(q^2) \times \mathrm{SU}_{n-f}(q^2)$ в $\mathrm{SU}_n(q^2)$, получаем тот же вывод для $\mathrm{SU}_n(q^2)$.

Случай, когда $d \equiv 0, 1, 3 \pmod 4$. Пусть $n = 2m + \varepsilon$, где $\varepsilon = 0, 1$. Согласно [31], порядок P равен порядку силовской p-подгруппы P'

группы $\mathrm{GL}_m(q^2)$. Если $\varepsilon = 0$, то, выбирая $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{smallmatrix}\right)$, получаем вложение из $\mathrm{GL}_m(q^2)$ в $\mathrm{GU}_n(q^2)$, которое отображает A в $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}^{-t} \end{smallmatrix}\right)$. Аналогичное вложение будет иметь место и для $\varepsilon = 1$, если прибавить единицу в правый нижний угол матрицы W. Поскольку p не делит $q^2 - 1$, образующий α' группы P' лежит в $\mathrm{SL}_n(q^2)$, поэтому его образ принадлежит $\mathrm{SU}_n(q^2)$.

Напомним, что в наших обозначениях d – порядок q по модулю p, а f – порядок q^2 по модулю p. Сначала рассмотрим случай, когда d *нечетно*, следовательно $f = d > 2$.

Поскольку P' циклическая нетривиальная, заключаем, что $m/2 < f \leqslant m$. Как и выше, для оценки e можно считать, что $n = 2d$. Выберем элемент в $\mathrm{GL}_d(q^2)$, который действует сопряжением на P' как автоморфизм порядка f. Умножая его на константу, можно считать, что этот элемент имеет определитель 1. Расширяя диагонально, заключаем, что $e \geqslant f > 2$, как и требовалось.

Остается рассмотреть последний подслучай, когда d делится на 4. Тогда $d = 2f$ влечет $f \geqslant 2$. Если $d > 4$, то, используя диагональное вложение, заключаем, что $e \geqslant f > 2$.

Таким образом, можем полагать, что $d = 4$ и $f = 2$, т.е. $G = \mathrm{SU}_4(q^2)$ и $p \mid q^2 + 1$. В этом случае образующий $A = \alpha'$ подгруппы P' можно выбрать так, что $A \cdot \overline{A}^t = I$. Как и выше, используя диагональное вложение, получаем, что $e \geqslant 2$. Но матрица W также нормализует P, поэтому $e \geqslant 4$, что требовалось. $\square$

Это завершает доказательство теоремы 1.

§8. Группы малого порядка

Хотя общий случай группового кольца произвольной конечной группы, видимо, слишком обширен для изучения, некоторые конкретные результаты могут быть получены уже сейчас с помощью теоремы 1. А именно здесь мы изучим полуцепность групповых колец неразрешимых групп малого порядка.

Следующее предложение дает определенную информацию о строении не-p-разрешимых групп с циклической силовской p-подгруппой.

Предложение 5. (см. [4, лемма 5.2] и [24, лемма 6.1]) *Пусть G – не-p-разрешимая группа с нетривиальной циклической силовской p-подгруппой P. Тогда существует наименьшая нормальная подгруппа*

K в G, собственно содержащая $O_{p'}(G)$. Кроме того, K содержит P, а фактор-группа $H = K/O_{p'}(G)$ простая неабелева.

Заметим, что это утверждение не распространяется на p-разрешимые группы. А именно, пусть G – диэдральная группа D_{18} и $p = 3$. Тогда $O_{p'}(G) = 1$ и $K = C_3$ не содержит $P = C_9$.

Таким образом, каждая не-p-разрешимая группа G с циклической силовской p-подгруппой P допускает следующий нормальный ряд:

$$1 \subseteq O_{p'} \subseteq K \subseteq G\,,$$

где $O_{p'} = O_{p'}(G)$. Более того, индекс K в G взаимно прост с p, поэтому по факту 7 при исследовании полуцепности можно считать, что $K = G$. Кроме того, если групповое кольцо простой группы $H = K/O_{p'}$ на полем F характеристики p полуцепное, то главный блок кольца FG будет тоже полуцепным. Поэтому основную трудность для анализа представляют групповые кольца, в которых главный блок полуцепной, но есть неполуцепные неглавные блоки.

В работе [38] была сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Кольцо FG полуцепное, если и только если кольцо FH полуцепное.*

Используя теорему 1 и пакет MAGMA [5] для поиска расширений групп, можно проверить справедливость гипотезы 1 для групп небольшого порядка, а именно докажем следующее предложение.

Предложение 6. *Утверждение гипотезы 1 справедливо для всех групп, порядок которых не выше 10^4.*

Доказательство. Допустим противное, т.е. что для некоторого простого p существует не-p-разрешимая группа G с циклической силовской p-подгруппой P и нормальным рядом $1 \subseteq O_{p'} \subseteq K \subseteq G$, таким, что групповое кольцо простой группы $H = K/O_{p'}$ над $\mathbb{F}_p$ полуцепное, но кольцо FG не полуцепное.

Предположим, что G – минимальный такой контрпример. По факту 7 можно считать, что $K = G$ и H – простая неабелева конечная группа порядка $\leqslant 10^4$, групповое кольцо которой полуцепное. Также из этого факта следует, что G не содержит собственной нормальной подгруппы, содержащей P. Кроме того, если $p = 3$ и $|P| = 3$, то кратность исключительной вершины равна $(3-1)/2 = 1$. Таким образом, в этом случае полуцепность FH влечет полуцепность FG, что дает противоречие. Таким образом, если $p = 3$, то $|P| \geqslant 9$.

С учетом этих замечаний, только следующие простые группы порядка не выше $5\cdot 10^3$ из списка теоремы 1 (с полуцепными групповыми кольцами) могут быть потенциальными кандидатами на H: $\mathrm{PSL}_2(8)$ при $p=7$, $\mathrm{PSL}_2(11)$ и $\mathrm{PSL}_2(16)$ при $p=5$, а также $\mathrm{PSL}_2(19)$ при $p=3$.

Эти случаи легко разбираются непосредственно. Например, для $H=\mathrm{PSL}_2(16)$ (порядка 4080) в качестве $O_{p'}(G)$ может быть только C_2. Однако расширение G группы C_2 с помощью H расщепляется, и поэтому полуцепность колец FG и FH совпадает по факту 7. В случае $H=\mathrm{PSL}_2(19)$ (порядка 3420) расширение группы C_2 посредством H не расщепляется, а именно изоморфно группе $\mathrm{SL}_2(19)$, однако полуцепность группового кольца этой группы известна (см. [21, предложение 3]). Схожие ситуации имеют место для групп $\mathrm{PSL}_2(8)$ и $\mathrm{PSL}_2(11)$. $\square$

§9. Некоторые открытые вопросы

Таким образом, мы имеем ответ на вопрос о полуцепности групповых колец над полем для всех простых конечных групп и групп, порядок которых не превосходит 10^4. Однако мы не знаем ответа даже на следующий частный вопрос.

Вопрос 1. *Верна ли гипотеза* 1 *для характеристики поля* $p=3$*?*

Заметим, что только случай, когда число ребер главного блока группы G равно двум $e=2$ и $|P|\geqslant 9$, находится под вопросом.

Следующий простой (в формулировке) вопрос также остается открытым.

Вопрос 2. *Пусть H – нормальная подгруппа в G. Верно ли, что если FG полуцепное, то и FH полуцепное?*

Заметим, что Х. Блау [4] рассматривал следующую близкую проблему, которая также пока открыта:

Вопрос 3. *Когда дерево Брауэра главного p-блока группы G является звездой (без ограничений на положение исключительной вершины)?*

Заметим, что это условие эквивалентно тому, что каждый p-модулярный неприводимый характер главного блока поднимается до обыкновенного характера. В сравнении с вопросом о полуцепности, здесь есть некоторые упрощения: с самого начала можно профакторизовать группу по $O_{p'}$. Ясно, что список конечных простых групп, удовлетворяющих этому условию, будет несколько больше, чем в теореме 1. Например, сюда попадет группа M_{23} при $p = 5$.

Авторы благодарны Г. Е. Пунинскому, А. Е. Залесскому, А. С. Кондратьеву и Д. Крейвену за советы и полезные замечания по статье.

Литература

1. J. L. Alperin, *Local Representation Theory*, Cambridge University Press, 1989.
2. Y. Baba, K. Oshiro, *Classical Artinian Rings and Related Topics*, World Scientific Publ., 2009.
3. Y. Benson, *Representations and Cohomology. I*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 30, 1995.
4. H. I. Blau, *On Brauer stars.* — J. Algebra **90** (1984), 169–188.
5. W. Bosma, J. Cannon, C. Playoust, *The MAGMA algebra system I: The user language.* — J. Symbolic Comput., **24** (1997), 235–265.
6. R. Burkhardt, *Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen* $\mathrm{PSL}(2, p^f)$. — J. Algebra **40** (1976), 75–96.
7. R. Burkhardt, *Über die Zerlegungszahlen der Suzukigruppen* $\mathrm{Sz}(q)$. — J. Algebra **59(2)** (1979), 421–433.
8. J. H. Conway (et al.), *Atlas of Finite Groups: Maximal Subgroups and Ordinary Characters for Simple Groups*, Clarendon Press, 1985.
9. H. Dietrich, C. R. Leedham-Green, F. Lübeck, E. A. O'Brien, *Constructive recognition of classical groups in even characteristic.* — J. Algebra **391** (2013), 227–255.
10. D. Eisenbud, P. Griffith, *Serial rings.* — J. Algebra **17** (1971), 389–400.
11. W. Feit, *Possible Brauer trees.* — Illinois J. Math. **28** (1984), 43–56.
12. P. Fong, B. Srinivasan, *Brauer trees in classical groups.* — J. Algebra **131** (1990), 179–225.
13. The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.8.8*, 2017, `http://www.gap-system.org`.
14. M. Geck, *Irreducible Brauer characters of the 3-dimensional unitary group in non-defining characteristic.* — Comm. Algebra **18(2)** (1990), 563–584.
15. R. Gow, *Products of two involutions in classical groups of characteristic* 2. — J. Algebra **71** (1981), 583–591.
16. D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p.* — Duke Math. J. **21** (1954), 377–381.
17. G. Hiss, *The Brauer trees of the Ree groups.* — Comm. Algebra **19(3)** (1991), 871–888.
18. G. Hiss, K. Lux, *Brauer Trees of Sporadic Groups*, Clarendon Press, Oxford, 1989.
19. G. J. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups.* — Annals of Math. **89** (1969), 209–241.
20. A. Kukharev, G. Puninski, *Serial group rings of finite groups. p-solvability.* — Algebra Discr. Math. **16** (2013), 201–216.

21. A. Kukharev, G. Puninski, *Serial group rings of finite groups. General linear and close groups.* — Algebra Discrete Math. **20(1)** (2015), 259–269.
22. K. Lux, H. Pahlings, *Representations of Groups. A Computational Approach*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 124, 2010.
23. K. Morita, *On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals.* — Sci. Repts. Tokyo Daigaku **4** (1951), 177–194.
24. N. Naerig, *A construction of almost all Brauer trees.* — J. Group Theory **11** (2008), 813–829.
25. G. Puninski, *Serial Rings*, Kluwer, 2001.
26. G. R. Robinson, *Some uses of class algebra constants.* — J. Algebra **91** (1984), 64–74.
27. M. Sawabe, *A note on finite simple groups with abelian Sylow p-subgroups.* — Tokyo Math. J. **30** (2007), 293–304.
28. M. Sawabe, A. Watanabe, *On the principal blocks of finite groups with abelian Sylow p-subgroups.* — J. Algebra **237** (2001), 719–734.
29. J. Scopes, *Cartan matrices and Morita equivalence for blocks of the symmetric groups.* — J. Algebra **142** (1991), 441–455.
30. B. Srinivasan, *On the indecomposable representations of a certain class of groups.* — Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1960), 497–513.
31. M. Stather, *Constructive Sylow theorems for the classical groups.* — J. Algebra **316** (2007), 536–559.
32. A. A. Tuganbaev, *Ring Theory, Arithmetical Rings and Modules*, Moscow, Independent University, 2009.
33. H. Wielandt, *Sylowgruppen and Kompositions-Struktur.* — Abhand. Math. Sem. Hamburg **22** (1958), 215–228.
34. Ю. В. Волков, А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность группового кольца конечной группы зависит только от характеристики поля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **423** (2014), 57–66.
35. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца конечных групп. p-нильпотентность.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), 134–152.
36. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепность групповых колец знакопеременных и симметрических групп.* — Вестник БГУ, сер. матем.-информ. **2** (2014), 61–64.
37. А. В. Кухарев, *Полуцепность групповых колец унимодулярных проективных групп.* — В кн: Сборник работ 71-й научн. конф. студ. и аспир. Белорус. гос. ун-та, Минск, 18 – 21 мая 2014 г., Ч. 1, С. 11-14.
38. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца конечных групп. Спорадические простые группы и группы Судзуки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **435** (2015), 73–94.
39. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца классических групп, определенных над полями с нечетным числом элементов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **452** (2016), 158–176.
40. А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский, *Полуцепные групповые кольца простых конечных групп лиева типа.* — Фундам. прикл. матем. **21** (2016), 135-144.
41. У. Фейт, *Теория представлений конечных групп*, М.: Наука, 1990.

Kukharev A. V., Kaygorodov I. B., Gorshkov I. B. When the group ring of a simple finite group is serial.

A ring is called serial, if its right and left regular modules are the direct sums of chain modules. In the article, we give an answer on the question, for which simple finite groups, their group rings over a given field are serial.

Витебский
государственный университет
им. П. М. Машерова,
Московский пр-т 33,
210038 Витебск, Беларусь
E-mail: kukharev.av@mail.ru

Поступило 13 октября 2017 г.

Университет АБС, Санто Андрэ, Бразилия
E-mail: kaygorodov.ivan@gmail.com

Университет АБС, Санто Андрэ, Бразилия
E-mail: ilygor8@gmail.com