Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

М. И. Кузнецов, А. В. Кондратьева, Н. Г. Чебочко

ПРОСТЫЕ 14-МЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ В ХАРАКТЕРИСТИКЕ 2

§1. Введение

Классификация простых алгебр Ли над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 3$ к настоящему времени завершена ([1–3]): все простые алгебры Ли либо являются классическими, либо изоморфны алгебрам Ли картановского типа, соответствующим различным дифференциальным формам, или алгебрам Меликяна в случае $p = 5$. Проблема классификации простых алгебр Ли над полями характеристики 2 представляется особенно сложной. В настоящее время построено большое количество конечномерных простых алгебр Ли, относительно которых не известно, являются ли они на самом деле новыми, не имеющими аналогов при больших характеристиках основного поля. Ситуация напоминает положение дел в теории простых модулярных алгебр Ли до появления работы А. И. Кострикина и И. Р. Шафаревича [4], в которой была предложена единая конструкция алгебр Ли картановского типа над алгебрами разделенных степеней. В дальнейшем было показано, что все известные простые алгебры Ли характеристики $p > 5$ являются алгебрами Ли картановского типа. В настоящей работе мы решаем проблему изоморфизма для почти всех известных простых 14-мерных алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики 2. Для этого мы используем описание деформаций классической простой алгебры Ли типа G_2 ([5, 6]).

Отметим, что классические алгебры Ли над полями нулевой характеристики и характеристики $p > 3$ являются жесткими (см. [7]). Над полем характеристики 2 и 3 классические алгебры Ли могут иметь нетривиальные деформации. Описание глобальных деформаций алгебры Ли типа C_2 дано в работах [8, 9]. В [10] и [11] доказана жесткость классических алгебр Ли всех типов над полем характеристики $p > 2$,

---

Ключевые слова: алгебры Ли характеристики два, алгебры Ли картановского типа, деформации.

Н. Г. Чебочко: Исследование выполнено в рамках Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2017 г. (проект 90).

кроме алгебры Ли типа C_2 при $p = 3$. Пространства локальных деформаций классических алгебр Ли с однородной системой корней над полем характеристики 2 найдены в [6].

В работе доказывается, что все рассматриваемые 14-мерные алгебры Ли L являются деформациями алгебры Ли G_2. Далее выбирается базис, в котором соответствующий алгебре L коцикл ψ выглядит наиболее просто. Используя действие группы автоморфизмов на второй группе когомологий алгебры G_2, находим автоморфизм g алгебры G_2, переводящий когомологический класс ψ в когомологический класс коцикла, соответствующего стандартным глобальным деформациям L_1 или L_2. В большинстве случаев g переводит коцикл ψ в коцикл деформации L_i и, таким образом, является изоморфизмом алгебр Ли L и L_i.

В работе подробно рассмотрены изоморфизмы алгебр Ли L_1, L_2 и алгебр Ли картановского типа $S(3:\mathbf{1},\omega)$, $H(4:\mathbf{1},\omega)$, анонсированные в [5]. Далее рассмотрены неальтернирующая гамильтонова 14-мерная алгебра Ли $P(4:\mathbf{1})$ (см. [12]), алгебры Шеня $V_3(a)$, $V_4(a_2,a_3)$ (см. [13]) и установлено, что они изоморфны алгебрам Ли картановского типа.

Всюду далее алгебры Ли рассматриваются над алгебраически замкнутым полем характеристики 2.

§2. Деформации алгебры Ли типа G_2

Пусть $R = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}$ – система корней типа G_2, $\{h_\alpha,\, h_\beta,\, e_\gamma,\, \gamma \in R\}$ – базис Шевалле.

При $p = 2$ алгебра Ли типа G_2 изоморфна алгебре Ли типа $\bar{A}_3$, то есть факторалгебре A_3 по одномерному центру.

В [14] доказано, что группа автоморфизмов G алгебры Ли типа G_2 над полем характеристики 2 изоморфна $Sp(6)$. Пусть V – стандартный 6-мерный $Sp(6)$-модуль с симплектическим базисом $\{e_{\pm1}, e_{\pm2}, e_{\pm3}\}$. В работах ([5, 6]) найдены глобальные деформации алгебры Ли L типа $\overline{A_3}$ (G_2) над алгебраически замкнутым полем K характеристики 2. Доказано, что представление $Sp(6)$ на $H^2(L,L)$ эквивалентно композиции морфизма Фробениуса и естественного представления на $\bigwedge^3 V$. Над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 классы интегрируемых коциклов образуют G-многообразие, изоморфное с точностью до морфизма Фробениуса многообразию Грассмана $G(3,6) \subset \bigwedge^3 V$, которое состоит из двух G-орбит: орбиты элемента $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ (лагранжиан) и орбиты 3-вектора $e_1 \wedge e_2 \wedge e_{-2}$. Глобальные деформации изоморфны одной из двух неограниченных простых алгебр Ли

$$L_1 = (L, [\ ,\ ] + \psi_1), \quad L_2 = (L, [\ ,\ ] + \psi_2),$$

где

$$\begin{aligned}
\psi_1 = \Phi(e_1 \wedge e_2 \wedge e_3) &= e^*_{-3\alpha-2\beta} \wedge e^*_{-3\alpha-\beta} \otimes e_{2\alpha+\beta} \\
&+ e^*_{-3\alpha-2\beta} \wedge e^*_{-2\alpha-\beta} \otimes e_{3\alpha+\beta} \\
&+ e^*_{-2\alpha-\beta} \wedge e^*_{-3\alpha-\beta} \otimes e_{3\alpha+2\beta}, \\
\psi_2 = \Phi(e_1 \wedge e_2 \wedge e_{-2}) &= e^*_{-3\alpha-\beta} \wedge e^*_{2\alpha+\beta} \otimes e_{3\alpha+2\beta} \\
&+ e^*_{-3\alpha-\beta} \wedge e^*_{-\beta} \otimes e_{\alpha} + e^*_{-\alpha-\beta} \wedge e^*_{\beta} \otimes e_{3\alpha+2\beta} \\
&+ e^*_{-\alpha-\beta} \wedge e^*_{-2\alpha-\beta} \otimes e_{\alpha} + e^*_{-3\alpha-\beta} \wedge e^*_{-\alpha-\beta} \otimes h_{\alpha} \\
&+ e^*_{-3\alpha-\beta} \wedge h^*_{\beta} \otimes e_{\alpha+\beta} + e^*_{-3\alpha-2\beta} \wedge h^*_{\beta} \otimes e_{\alpha} \\
&+ e^*_{-\alpha-\beta} \wedge h^*_{\beta} \otimes e_{3\alpha+\beta} + e^*_{-\alpha} \wedge h^*_{\beta} \otimes e_{3\alpha+2\beta}.
\end{aligned}$$

§3. Изоморфизмы с алгебрами картановского типа

Алгебра Ли G_2 изоморфна алгебре Ли картановского типа $S(3:\mathbf{1})$. Мы приведем здесь базис в $S(3:\mathbf{1})$, структурные константы которого совпадают со структурными константами в базисе Шевалле алгебры Ли G_2.

$$\begin{aligned}
&H_\alpha = x_2\partial_2 + x_3\partial_3, && H_\beta = x_1\partial_1 + x_2\partial_2, \\
&E_\alpha = x_2\partial_3, && E_{-\alpha} = x_3\partial_2, \\
&E_\beta = x_1\partial_2, && E_{-\beta} = x_2\partial_1, \\
&E_{\alpha+\beta} = x_1\partial_3, && E_{-\alpha-\beta} = x_3\partial_1, \\
&E_{2\alpha+\beta} = D_{12}(x_1x_2x_3), && E_{-2\alpha-\beta} = \partial_3, \\
&E_{3\alpha+\beta} = D_{13}(x_1x_2x_3), && E_{-3\alpha-\beta} = \partial_2, \\
&E_{3\alpha+2\beta} = D_{23}(x_1x_2x_3), && E_{-3\alpha-2\beta} = \partial_1,
\end{aligned}$$

где

$$D_{ij}(f) = \partial_i(f)\partial_j + \partial_j(f)\partial_i.$$

Рассмотрим алгебру Ли $S(4:\mathbf{1},\omega)$, где $\omega = (1+x_1x_2x_3)dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$. Выберем в ней следующий базис:

$$
\begin{aligned}
&H_\alpha = x_2\partial_2 + x_3\partial_3, && H_\beta = x_1\partial_1 + x_2\partial_2,\\
&E_\alpha = x_2\partial_3, && E_{-\alpha} = x_3\partial_2,\\
&E_\beta = x_1\partial_2, && E_{-\beta} = x_2\partial_1,\\
&E_{\alpha+\beta} = x_1\partial_3, && E_{-\alpha-\beta} = x_3\partial_1,\\
&E_{2\alpha+\beta} = D_{12}(x_1x_2x_3), && E_{-2\alpha-\beta} = (1+x_1x_2x_3)\partial_3,\\
&E_{3\alpha+\beta} = D_{13}(x_1x_2x_3), && E_{-3\alpha-\beta} = (1+x_1x_2x_3)\partial_2,\\
&E_{3\alpha+2\beta} = D_{23}(x_1x_2x_3), && E_{-3\alpha-2\beta} = (1+x_1x_2x_3)\partial_1,
\end{aligned}
$$

где

$$D_{ij}(f) = \partial_i(f)\partial_j + \partial_j(f)\partial_i.$$

Умножение в $S(4:\mathbf{1},\omega)$ отличается от умножения в $S(4:\mathbf{1})$ только на парах, составленных из

$$(1+x_1x_2x_3)\partial_1, \quad (1+x_1x_2x_3)\partial_2, \quad (1+x_1x_2x_3)\partial_3.$$

А именно,

$$
\begin{aligned}
&[E_{-2\alpha-\beta}, E_{-3\alpha-\beta}] = E_{3\alpha+2\beta},\\
&[E_{-2\alpha-\beta}, E_{-3\alpha-2\beta}] = E_{3\alpha+\beta},\\
&[E_{-3\alpha-2\beta}, E_{-3\alpha-\beta}] = E_{2\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

Получаем, что структурные константы алгебры Ли $S(4:\mathbf{1},\omega)$ в выбранном базисе совпадают со структурными константами алгебры Ли L_1 в базисе $\{h_\alpha,\, h_\beta,\, e_\gamma,\, \gamma\in R\}$, $S(4:\mathbf{1},\omega)\cong L_1$.

Рассмотрим гамильтонову алгебру Ли $H(4:\mathbf{1})$. Пусть $A = A(4:\mathbf{1})$ – алгебра разделенных степеней, $\overline{A} = A/\langle 1\rangle$ – алгебра со скобкой Пуассона

$$\{f,g\} = \partial_1 f\partial_3 g - \partial_3 f\partial_1 g + \partial_2 f\partial_4 g - \partial_4 f\partial_2 g.$$

Алгебра Ли $H(4:\mathbf{1})$ является подалгеброй $(\overline{A},\ \{\ ,\ \})$ с базисом

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{H}_\alpha = x_1x_3, && \widetilde{H}_\beta = x_1x_3 + x_2x_4,\\
&\widetilde{E}_\alpha = x_1x_3x_4, && \widetilde{E}_{-\alpha} = x_2,\\
&\widetilde{E}_\beta = x_2x_3, && \widetilde{E}_{-\beta} = x_1x_4,\\
&\widetilde{E}_{\alpha+\beta} = x_2x_3x_4, && \widetilde{E}_{-\alpha-\beta} = x_1,\\
&\widetilde{E}_{2\alpha+\beta} = x_1x_2, && \widetilde{E}_{-2\alpha-\beta} = x_3x_4,
\end{aligned}
$$

$$\widetilde{E}_{3\alpha+\beta} = x_1x_2x_4, \qquad \widetilde{E}_{-3\alpha-\beta} = x_3,$$
$$\widetilde{E}_{3\alpha+2\beta} = x_1x_2x_3, \qquad \widetilde{E}_{-3\alpha-2\beta} = x_4.$$

Выбор данного базиса устанавливает изоморфизм G_2 и $H(4:\mathbf{1})$.

Изменим скобку Пуассона на $\overline{A}$:

$$\{f,g\}' = (1+x_1x_3)(\partial_1 f\partial_3 g - \partial_3 f\partial_1 g) + (\partial_2 f\partial_4 g - \partial_4 f\partial_2 g).$$

Базисные элементы оставим те же, за исключением $\widetilde{H}_\beta$, а именно положим

$$\widetilde{H}_\beta = x_1x_3 + x_2x_4 + x_1x_2x_3x_4;$$

подалгебра $(\overline{A},\ \{\ ,\ \}')$ с выбранным базисом дает простую гамильтонову алгебру $H(4:\mathbf{1},\omega)$, где

$$\omega = (1+x_1x_3)dx_1\wedge dx_3 + dx_2\wedge dx_4.$$

Умножение в $H(4:\mathbf{1},\omega)$ совпадает со старым умножением в $H(4:\mathbf{1})$ плюс добавка $(x_1x_3)(\partial_1 f\partial_3 g - \partial_3 f\partial_1 g)$, которая отлична от нуля только на парах вида x_1 и x_2x_3 или x_3x_4, x_3 и x_1x_2 или x_1x_4, x_1 и x_3, а также на парах $\widetilde{H}_\beta$ с x_1, x_2, x_3, x_4. Такие же элементы определяют коцикл ψ_2. Таблица умножения $H(4:\mathbf{1},\omega)$ совпадает с таблицей умножения L_2. Следовательно, $L_2 \cong H(4:\mathbf{1},\omega)$.

В [12] над полем четной характеристики построены неальтернирующие гамильтоновы алгебры $P(n,\mathbf{m})$. Алгебра $P(4,\mathbf{1})$ имеет размерность 14.

Определим $P(4,\mathbf{1})$ как подалгебру $P_{-1}+P_0+P_1$, где

$$P_{-1} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle,$$
$$P_0 = \langle x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4\rangle,$$
$$P_1 = \langle x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4, x_2x_3x_4\rangle$$

в $\overline{A}$ со скобкой Пуассона

$$\{f,g\} = \partial_1 f\partial_1 g + \partial_2 f\partial_2 g + \partial_3 f\partial_3 g + \partial_4 f\partial_4 g.$$

Алгебра $P(4,\mathbf{1})$ изоморфна гамильтоновой алгебре $H(4:\mathbf{1},\omega)$, $\omega = dx_1\wedge dx_3 + dx_2\wedge dx_4 + (dx_1)^{(2)}$ (относительно дифференциальных форм в разделенных степенях и гамильтоновых алгебрах Ли, соответствующих симметрическим дифференциальным формам, см. [15]). Изоморфизм получается заменой переменных

$$y_1 = x_1+x_2+x_3+x_4, \quad y_2 = x_1+x_2, \quad y_3 = x_4, \quad y_4 = x_2+x_3$$

в алгебре

$$\langle y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ y_1y_2,\ y_1y_3,\ y_1y_4,\ y_2y_3,\ y_2y_4,\\ y_3y_4,\ y_1y_2y_3,\ y_1y_2y_4,\ y_1y_3y_4,\ y_2y_3y_4\rangle$$

со скобкой Пуассона

$$\{f,g\} = \partial_1 f\partial_3 g - \partial_3 f\partial_1 g + \partial_2 f\partial_4 g - \partial_4 f\partial_2 g + \partial_3 f\partial_3 g.$$

Выберем базис в $H(4:\mathbf{1},\omega)$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\widehat{H}_\alpha = y_2y_4, && \widehat{H}_\beta = y_1y_3,\\
&\widehat{E}_\alpha = y_1, && \widehat{E}_{-\alpha} = y_2y_3y_4,\\
&\widehat{E}_\beta = y_1y_2y_3, && \widehat{E}_{-\beta} = y_4,\\
&\widehat{E}_{\alpha+\beta} = y_1y_2, && \widehat{E}_{-\alpha-\beta} = y_3y_4,\\
&\widehat{E}_{2\alpha+\beta} = y_1y_3y_4, && \widehat{E}_{-2\alpha-\beta} = y_2,\\
&\widehat{E}_{3\alpha+\beta} = y_1y_4, && \widehat{E}_{-3\alpha-\beta} = y_2y_3,\\
&\widehat{E}_{3\alpha+2\beta} = y_1y_2y_4, && \widehat{E}_{-3\alpha-2\beta} = y_1+y_3.
\end{aligned}$$

Здесь мы изменили базис в $H(4:\mathbf{1})$, приведенный ранее, с помощью элемента w^5 группы Вейля алгебры G_2, где w – поворот на 60 градусов, и добавили к последнему элементу y_1. Это обеспечит изоморфизм с L_2 с добавкой к старому умножению в L именно коцикла ψ_2, а не $w\psi_2 + d(e^*_{-2\alpha-\beta}\otimes e_\beta)$. Коцикл появляется из-за добавки $\partial_3 f\partial_3 g$.

Мы получим следующий базис в $P(4,\mathbf{1})$:

$$\begin{aligned}
&\overline{H}_\alpha = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, && \overline{H}_\beta = x_1x_4 + x_2x_4 + x_3x_4,\\
&\overline{E}_\alpha = x_1+x_2+x_3+x_4, && \overline{E}_{-\alpha} = x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4,\\
&\overline{E}_\beta = x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4, && \overline{E}_{-\beta} = x_2+x_3,\\
&\overline{E}_{\alpha+\beta} = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4, && \overline{E}_{-\alpha-\beta} = x_2x_4 + x_3x_4,\\
&\overline{E}_{2\alpha+\beta} = x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4, && \overline{E}_{-2\alpha-\beta} = x_1 + x_2,\\
&\overline{E}_{3\alpha+\beta} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_4, && \overline{E}_{-3\alpha-\beta} = x_1x_4 + x_2x_4,\\
&\overline{E}_{3\alpha+2\beta} = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4, && \overline{E}_{-3\alpha-2\beta} = x_1+x_2+x_3.
\end{aligned}$$

Умножение в этом базисе имеет те же структурные константы, что и умножение в базисе $\{h_\alpha,\ h_\beta,\ e_\gamma,\ \gamma\in R\}$ в L_2, $P(4,\mathbf{1})\cong L_2$.

§4. Изоморфизмы с алгебрами Шеня

Простые алгебры Ли $V_3(a)$, $V_4(a_2, a_3)$ построены в [13]. Эти алгебры получаются как подалгебры в контактной алгебре Ли $K(5)$, т.е. как подалгебры в алгебре разделенных степеней со скобкой

$$\{f, g\} = \partial_5 f(g - (\partial_3 g)x_3 - (\partial_4 g)x_4) - \partial_5 g(f - (\partial_3 f)x_3 - (\partial_4 f)x_4) \\ + (\partial_1 f \partial_3 g - \partial_3 f \partial_1 g) + (\partial_2 f \partial_4 g - \partial_4 f \partial_2 g).$$

В [16] выбирается следующий базис в $V_3(a)$:

$$\begin{array}{ll}
H_\alpha = h_1 = x_1x_3 + x_2x_4, & H_\beta = h_2 = x_1x_3 + x_5, \\
E_\alpha = e_1 = x_1x_4 + ax_2^{(2)}, & E_{-\alpha} = e_1 = x_2x_3, \\
E_\beta = f_3 = x_3x_5, & E_{-\beta} = x_1, \\
E_{\alpha+\beta} = f_4 = ax_2^{(2)}x_3 + x_4x_5, & E_{-\alpha-\beta} = x_2, \\
E_{2\alpha+\beta} = f_2 = x_1x_2x_3 + x_2x_5, & E_{-2\alpha-\beta} = x_4, \\
E_{3\alpha+\beta} = f_1 = ax_2^{(3)} + x_1x_2x_4 + x_1x_5, & E_{-3\alpha-\beta} = x_3, \\
E_{3\alpha+2\beta} = f_5 = ax_2^{(3)}x_3 + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5, & E_{-3\alpha-2\beta} = 1.
\end{array}$$

Умножение в данном базисе отличается от умножения в G_2 только для

$$\{E_\alpha, E_{\alpha+\beta}\} = aE_{2\alpha+\beta},$$
$$\{E_\alpha, E_{-2\alpha-\beta}\} = aE_{-\alpha-\beta},$$
$$\{E_{-2\alpha-\beta}, E_{\alpha+\beta}\} = aE_{-\alpha}.$$

Следовательно, алгебра $V_3(a)$ изоморфна алгебре $(L, [\ ,\ ] + a\psi)$, где

$$\psi = e^*_{-2\alpha-\beta} \wedge e^*_{\alpha+\beta} \otimes e_{-\alpha} + e^*_{-2\alpha-\beta} \wedge e^*_\alpha \otimes e_{-\alpha-\beta} + e^*_{\alpha+\beta} \wedge e^*_\alpha \otimes e_{2\alpha+\beta}$$

– коцикл, соответствующий элементу $e_{-1}e_2e_3 \in \bigwedge^3 V$.

Переводя $\sqrt{a}e_{-1}e_2e_3$ в $e_1e_2e_3$ с помощью $g \in Sp(V) \cong \mathrm{Aut}(L)$, $g(e_1) = \sqrt{a}e_{-1}$, $g(e_{-1}) = \sqrt{a}^{-1}e_1$, мы получим $g\psi = a\psi_1$, и получим следующий изоморфизм из $V_3(a)$ в L_1:

$$
\begin{aligned}
&E_\alpha \longmapsto \sqrt{a}e_{-3\alpha-2\beta}, \quad E_{3\alpha+2\beta} \longmapsto \sqrt{a}e_{-\alpha}, \quad E_{3\alpha+\beta} \longmapsto \sqrt{a}e_{-\alpha-\beta},\\
&E_{\alpha+\beta} \longmapsto \sqrt{a}e_{-2\alpha-\beta}, E_{-\alpha} \longmapsto \sqrt{a}^{-1}e_{3\alpha+2\beta}, E_{-\alpha-\beta} \longmapsto \sqrt{a}^{-1}e_{2\alpha+\beta},\\
&E_{-3\alpha-2\beta} \longmapsto \sqrt{a}^{-1}e_\alpha, \quad E_{-3\alpha-\beta} \longmapsto \sqrt{a}^{-1}e_{\alpha+\beta}, \quad E_\beta \longmapsto e_\beta,\\
&E_{-\beta} \longmapsto e_{-\beta}, \quad E_{2\alpha+\beta} \longmapsto e_{3\alpha+\beta}, \quad E_{-2\alpha-\beta} \longmapsto e_{-3\alpha-\beta},\\
&h_\alpha \longmapsto H_\alpha, \ h_\beta \longmapsto H_\beta.
\end{aligned}
$$

В частности, получаем, что все алгебры $V_3(a)$ изоморфны $V_3(1)$.

Рассмотрим алгебры $V_4(a_2, a_3)$. Выберем базис в $V_4(a_2, a_3)$ согласно [16]. Его можно получить из базиса для $V_3(a_2)$, если поменять элементы E_α, $E_{\alpha+\beta}$, $E_{3\alpha+\beta}$, $E_{3\alpha+2\beta}$:

$$
\begin{aligned}
\check{E}_\alpha &= E_\alpha + a_3 x_3^{(2)},\\
\check{E}_{\alpha+\beta} &= E_{\alpha+\beta} + a_3 x_3^{(3)},\\
\check{E}_{3\alpha+\beta} &= E_{3\alpha+\beta} + a_3 x_2 x_3^{(2)},\\
\check{E}_{3\alpha+2\beta} &= E_{3\alpha+2\beta} + a_3 x_2 x_3^{(3)}.
\end{aligned}
$$

Нетрудно видеть, что умножение в $V_4(a_2, a_3)$ отличается от умножения в $V_3(a_2)$ на

$$\{\check{E}_{-\beta}, \check{E}_{3\alpha+\beta}\} = \check{E}_{-\alpha}, \quad \{\check{E}_{-\beta}, \check{E}_\alpha\} = \check{E}_{-3\alpha-\beta}, \quad \{\check{E}_\alpha, \check{E}_{3\alpha+\beta}\} = \check{E}_\beta.$$

Таким образом алгебра $V_4(a_2, a_3)$ изоморфна алгебре

$$(L, [\ ,\ ] + a_2\psi + a_3\varphi),$$

где

$$\varphi = e^*_{-\beta} \wedge e^*_{3\alpha+\beta} \otimes e_{-\alpha} + e^*_{-\beta} \wedge e^*_\alpha \otimes e_{-3\alpha-\beta} + e^*_\alpha \wedge e^*_{3\alpha+\beta} \otimes e_\beta$$

– коцикл, соответствующий элементу $e_{-1}e_2e_{-3}$ из $\bigwedge^3 V$. Рассматривая

$$g \in Sp(V) \cong \mathrm{Aut}(L), \quad g(e_3) = \sqrt{a_2}e_3 + \sqrt{a_3}e_{-3}, \quad g(e_{-3}) = \sqrt{a_2}^{-1}e_{-3},$$

имеем $g(e_1e_2e_3) = \sqrt{a_2}e_{-1}e_2e_3 + \sqrt{a_3}e_{-1}e_2e_{-3}$, что позволяет получить изоморфизм из $V_4(a_2, a_3)$ в L_1, который в композиции с изоморфизмом

$V_3(1)$ и L_1, дает изоморфизм $f : V_3(1) \to V_4(a_2, a_3)$.

$$
\begin{aligned}
&f(H_\alpha) = \check{H}_\alpha, \quad f(H_\beta) = \check{H}_\alpha, \quad f(E_{-\alpha}) = \check{E}_{-\alpha},\\
&f(E_{3\alpha+2\beta}) = \check{E}_{3\alpha+2\beta}, \quad f(E_{-3\alpha-2\beta}) = \check{E}_{-3\alpha-2\beta},\\
&f(E_\alpha) = \check{E}_\alpha + \sqrt{a_2a_3}\check{E}_{-\alpha},\\
&f(E_\beta) = \sqrt{a_2}^{-1}\check{E}_\beta,\\
&f(E_{-\beta}) = \sqrt{a_2}\check{E}_{-\beta} + \sqrt{a_3}\check{E}_{-2\alpha-\beta},\\
&f(E_{\alpha+\beta}) = \sqrt{a_2}^{-1}\check{E}_{\alpha+\beta},\\
&f(E_{-\alpha-\beta}) = \sqrt{a_2}\check{E}_{-\alpha-\beta} + \sqrt{a_3}\check{E}_{-3\alpha-\beta},\\
&f(E_{2\alpha+\beta}) = \sqrt{a_2}\check{E}_{2\alpha+\beta} + \sqrt{a_3}\check{E}_\beta,\\
&f(E_{-2\alpha-\beta}) = \sqrt{a_2}^{-1}\check{E}_{-2\alpha-\beta},\\
&f(E_{3\alpha+\beta}) = \sqrt{a_2}\check{E}_{3\alpha+\beta} + \sqrt{a_3}\check{E}_{\alpha+\beta},\\
&f(E_{-3\alpha-\beta}) = \sqrt{a_2}^{-1}\check{E}_{-3\alpha-\beta}.
\end{aligned}
$$

В статье [13] построено еще одно семейство $V_6(a, s)$ – 14-мерных алгебр Ли над полем характеристики 2. Вопрос об изоморфизме $V_6(a, s)$ с L_1 или L_2 пока не исследован.

Литература

1. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic, I. Structure theory*, Berlin, Boston: de Gruyter, 2004. (de Gruyter Expositions in Mathematics. vol. 38).
2. H. Strade, *Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic: II. Classifying the Absolute Toral Rank Two Case*, Berlin, Boston: de Gruyter, 2009 (de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 42).
3. H. Strade, *Simple Lie algebras over fields of positive characteristic. Vol.3: Completion of the classification*, Berlin, Boston: de Gruyter, 2013 (de Gruyter expositions in mathematics, vol.57).
4. А. И. Кострикин, И. Р. Шафаревич, *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики.* — Изв. АН СССР, Сер. матем. **33** (1969), 251–322.
5. N. G. Chebochko, M. I. Kuznetsov, *Integrable cocycles and global deformations of Lie algebra of type G_2 in characteristic* 2. — Commun. Algebra **45:7** (2017), 2969–2977.
6. Н. Г. Чебочко, *Деформации классических алгебр Ли с однородной системой корней в характеристике* 2. I. — Матем. сборник **196:9** (2005), 125–156.
7. А. Н. Рудаков, *Деформации простых алгебр Ли.* — Изв. АН СССР. Сер. мат. **35** (1971), 1113–1119.

8. А. И. Кострикин, *Параметрическое семейство простых алгебр Ли.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **34** (1970), 744–756.
9. А. И. Кострикин, М. И. Кузнецов, *О деформациях классических алгебр Ли характеристики три.* — Докл. РАН **343:3**(1995), 299–301.
10. М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, *Деформации классических алгебр Ли.* — Матем. сборник, **191:8** (2000), 69–88.
11. С. А. Кириллов, М. И. Кузнецов, Н. Г. Чебочко, *О деформациях алгебры Ли типа* G_2 *характеристики три.* — Изв. вузов. Мат. No. 3 (2000), 33–38.
12. L. Lin, *Non-alternating hamiltonian algebra P(n,m) of characteristic* 2. — Commun. Algebra **21(2)** (1993), 399–411.
13. G.-Y. Shen, *Variations of the classical lie algebra* G_2 *in low characteristics.* — Nova J. Alg. Geom. **2** (1993), No. 3, 217–243.
14. D. E. Frohardt, R. L. Griess(Jr.) *Automorphisms of modular Lie algebras.* — Nova J. Alg. Geom. **1** (1992), 339–345.
15. М. И. Кузнецов, А. В. Кондратьева, Н. Г. Чебочко, *О гамильтоновых алгебрах Ли характеристики* 2. — Матем. журнал **16**, No. 2(60) (2016), 54–66.
16. G.-Y. Shen, *Lie algebras of CL type.* — J. Algebra **249** (2002), 95–109.

Kuznetsov M. I., Kondrateva A. V., Chebochko N. G. Simple 14-dimensional Lie algebras in characteristic two.

Using the theory of deformations of Lie algebra G_2 we construct isomorphisms between the known simple 14-dimensional Lie algebras over a field of even characteristic and Lie algebras of Cartan type of S or H.

Поступило 31 октября 2017 г.

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный
университет им. Н. И. Лобачевского
пр. Гагарина, 23
603950, г. Нижний Новгород
Россия

E-mail: kuznets-1349@yandex.ru

E-mail: alisakondr@mail.ru

Национальный исследовательский
университет “Высшая школа экономики”
ул. Б. Печерская, 25/12
603155, Н. Новгород
Россия

E-mail: chebochko@mail.ru