Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

В. И. Копейко

НИЛЬПОТЕНТНАЯ ПО БАССУ УНИТАРНАЯ K_1-ГРУППА УНИТАРНОГО КОЛЬЦА

§1. Введение

Изучение нильпотентных K-групп (ниль-групп) – по Бассу, по Фареллу, по Вальдхаузену и другим, является одной из классических задач алгебраической K-теории (см., например, главу 12 из [1]). Применениям ниль-групп в алгебре и топологии недавно были посвящены две международные конференции "*Nil* phenomena in topology" (Vanderbilt University, Nashville, USA, 2007) и "Algebraic K-theory and *Nil*-groups in algebra and topology" (Indiana University, Bloomington, USA, 2008). Среди множества работ о нильпотентных группах в алгебраической K-теории, опубликованных за последние годы, отметим две работы [2,3], в которых независимо и разными методами получено отрицательное решение одной проблемы Басса из [4] о NK-нильпотентной группе над кольцами, поставленной еще в 1972 году. В гораздо меньшей степени ниль-группы изучались в L-теории, называемой также геометрической эрмитовой K-теорией и ориентированной на приложения в геометрической топологии, в которой изучаются симметрические и квадратичные L-группы, введенные соответственно А. С. Мищенко и А. Раницким как обобщения групп Уолла и определяемых как группы бордизмов симметрических и, соответственно, квадратичных комплексов Пуанкаре. Если 2 – обратимый элемент кольца, то симметрические и квадратичные L-группы изоморфны. В L-теории унитарные ниль-группы изучались в работах [5–7], при этом в первых двух работах рассматривались ниль-группы групп Уолла, а в третьей работе рассматривались унитарные нильпотентные группы по Вальдхаузену и, в частности, проведено (неполное) вычисление данной группы

Ключевые слова: унитарное кольцо, эрмитовы матрицы, унитарная группа, унитарный K_1-функтор, нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа, унипотентные матрицы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00148).

для кольца целых чисел. В алгебраической эрмитовой K-теории, называемой в последние годы GW-теорией (Гротендика–Витта теорией), нильпотентные группы не вводились и не изучались.

Целью данной работы является введение и изучение нильпотентной по Бассу унитарной K_1-группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ унитарного кольца (R,λ,Λ). В теореме 1, являющейся усилением предложения 2 из работы автора [8], найдена система (унитарных) представителей группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$. Хорошо известно (см., например, главу 12 из [1]), что для произвольного ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель, для унитарной ниль-группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ аналогичный результат, вообще говоря, не имеет места. В теореме 2, используя полученное в теореме 1 представление, дается полное описание элементов группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, имеющих (унитарный) унипотентный представитель. В конце статьи приведена одна операция на группе NK_1U^λ (R,Λ), сопоставляющая произвольному элементу группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ элемент, имеющий (унитарный) унипотентный представитель.

§2. Λ-эрмитовы и Λ-унитарные матрицы

В работе мы придерживаемся стандартных определений и обозначений унитарной K-теории. Приведем ряд определений и результатов из [9], используемых в данной работе.

Пусть (R,λ,Λ) – унитарное кольцо, где R – ассоциативное кольцо с 1, на котором задана инволюция $x\to\bar{x}$, λ – центральный элемент кольца R, удовлетворяющий условию $\lambda\cdot\bar{\lambda}=1$, Λ – аддитивная подгруппа R такая, что $\Lambda_{\min}\leqslant\Lambda\leqslant\Lambda_{\max}$, причем $\bar{x}\Lambda x\subseteq\Lambda$ для любого $x\in R$, где $\Lambda_{\min}=\{x-\lambda\bar{x}, x\in R\}$, $\Lambda_{\max}=\{x\in R: x=-\lambda\bar{x}\}$. В литературе унитарное кольцо (R,λ,Λ) называют также форменным кольцом с системой параметров Λ и симметрией λ. Если положить $\bar{\Lambda}=\{\bar{x}, x\in\Lambda\}$, то получаем еще одно унитарное кольцо $(R,\bar{\lambda},\bar{\Lambda})$.

Продолжим инволюцию на кольцо матриц $M_r(R)$, положив $(a_{ij})^*=(\overline{a_{ji}})$.

Определение 1. *Матрица $a=(a_{ij})(\in M_r(R))$ называется анти λ-эрмитовой, если $a=-\lambda a^*$. В этом случае $a_{ij}=-\lambda\overline{a_{ji}}$ при всех $1\leqslant i,j\leqslant r$ и, в частности, $a_{ii}=-\lambda\overline{a_{ii}}$ для любого $1\leqslant i\leqslant r$. Таким образом все диагональные элементы анти λ-эрмитовой матрицы a содержатся в $\Lambda_{\max}$. Если, более того, все диагональные элементы матрицы a содержатся в Λ, то матрица a называется Λ-эрмитовой.*

В частности, матрица a является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, если $a = -\bar{\lambda}a^*$ и все ее диагональные элементы содержатся в $\bar{\Lambda}$. Множество всех Λ-эрмитовых матриц образует аддитивную подгруппу кольца $M_r(R)$, а матрица $a(\in M_r(R))$ является Λ-эрмитовой тогда и только тогда, когда a^* является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой матрицей.

Пример 1. Матрица $a - \lambda\bar{a}$ является $\Lambda_{\min}$-эрмитовой для любой матрицы $a(\in M_r(R))$ и, в частности, является Λ-эрмитовой матрицей.

Пример 2. Пусть $b(\in M_r(R))$ - Λ-эрмитова матрица. Тогда матрица a^*ba является Λ-эрмитовой для любой матрицы $a(\in M_r(R))$.

Пример 1 получается простой проверкой, рассмотрим пример 2. Пусть $b = (b_{ij})$ – Λ-эрмитова матрица. По определению, $b_{ii} \in \Lambda$ для любого $1 \leqslant i \leqslant r$ и матрица b является анти λ-эрмитовой. В частности, $b_{ji} = -\lambda\overline{b_{ij}}$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant r$. Возьмем произвольную матрицу $a = (a_{ij})(\in M_r(R))$ и рассмотрим a^*ba. Так как $(a^*ba)^* = a^*b^*a = -\overline{\lambda}(a^*ba)$, то $a^*ba = -\lambda(a^*ba)^*$ и, значит, матрица a^*ba является анти λ-эрмитовой. Кроме того, i-тый диагональный элемент матрицы a^*ba равен

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{k1}\overline{a_{i1}} + \cdots + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kn}\overline{a_{in}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kk}\overline{a_{ik}} + \sum_{1\leqslant k<s\leqslant n} (a_{ik}b_{ks}\overline{a_{is}} + a_{is}b_{sk}\overline{a_{ik}}).$$

Так как $b_{ii} \in \Lambda$ для любого $1 \leqslant i \leqslant r$, то из определения системы параметров Λ следует, что $a_{ik}b_{kk}\overline{a_{ik}} \in \Lambda$, и значит, первая сумма содержится в Λ. Рассмотрим произвольное слагаемое второй суммы. Имеем $a_{ik}b_{ks}\overline{a_{is}} + a_{is}b_{sk}\overline{a_{ik}} = (a_{ik}b_{ks}\overline{a_{is}}) - \lambda\overline{(a_{ik}b_{ks}\overline{a_{is}})} \in \Lambda_{\min}$. Таким образом, вторая сумма также содержится в Λ, и значит, диагональные элементы матрицы a^*ba содержатся в Λ. Следовательно, a^*ba – Λ-эрмитова матрица.

В работе мы будем использовать блочную форму записи матриц. Более точно, запись $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ означает, что $a, b, c, d \in M_r(R)$, при этом $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ будем называть верхней половиной матрицы α. Блочно-диагональную матрицу $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, для сокращения обозначений, будем записывать как $a \oplus d$. Для натурального r положим

$I_r^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & e_r \\ \lambda e_r & 0 \end{pmatrix}$, где e_r (соответственно 0) обозначает единичную (соответственно нулевую) матрицу порядка r. Отметим, что I_r^λ – обратимая λ-эрмитова матрица, причем $(I_r^\lambda)^{-1} = (I_r^\lambda)^*$. В дальнейшем, у матрицы I_r^λ индекс r или оба индекса r, λ будем опускать, если их значение следует из контекста.

Определение 2. *Матрица $\alpha \in M_{2r}(R)$ называется унитарной, если $\alpha^* I^\lambda \alpha = I^\lambda$. В частности, любая унитарная матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ обратима, причем $\alpha^{-1} = I^* \alpha^* I = \begin{pmatrix} d^* & \bar\lambda b^* \\ \lambda c^* & a^* \end{pmatrix}$.*

Множество $U_{2r}^\lambda(R)$ всех унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) унитарной группой.

Приведем ряд хорошо известных (см., например, [9]) эквивалентных определений и стандартных примеров Λ-унитарных матриц.

Определение 3. *Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2r}(R)$ называется Λ-унитарной, если выполняется одно из следующих эквивалентных условий:*

1) *α – унитарная и диагональные элементы матриц a^*c, b^*d содержатся в Λ;*

2) *$a^*d + \lambda c^*b = e_r$ и матрицы a^*c, b^*d Λ-эрмитовы;*

3) *α – унитарная и диагональные элементы матриц ab^*, cd^* содержатся в Λ;*

4) *$ad^* + \lambda bc^* = e_r$ и матрицы ab^*, cd^* Λ-эрмитовы.*

Множество $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ всех Λ-унитарных матриц порядка $2r$ образует группу, которая называется (гиперболической) Λ-унитарной группой. В дальнейшем слово "гиперболическая" мы будем опускать. Если 2 – обратимый элемент кольца R, то $\Lambda_{\max} = \Lambda_{\min}$ и значит в этом случае группа $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda)$ не зависит от выбора системы параметров Λ и совпадает с унитарной группой $U_{2r}^\lambda(R)$.

Отметим, что $U_{2r}^\lambda(R, \Lambda_{\max}) = U_{2r}^\lambda(R)$. Другие классические (матричные) группы также являются частными случаями Λ-унитарных групп. Более точно, если R – коммутативное кольцо с тривиальной инволюцией, то симплектическая группа $\mathrm{Sp}_{2r}(R) = U_{2r}^{-1}(R, \Lambda_{\max} = R)$;

ортогональная группа $O_{2r}(R) = U^1_{2r}(R, \Lambda_{\min} = 0)$. Если R – произвольное ассоциативное кольцо с 1, то общая линейная группа $GL_r(R)$ изоморфна унитарной группе $U^1_{2r}(H(R))$ гиперболического кольца $H(R) = R \oplus R^{op}$ с инволюцией, задаваемой формулой $\overline{(x,y)} = (y,x)$ для произвольных $x, y \in R$, где R^{op} обозначает противоположное кольцо. Более полную информацию об этом изоморфизме и K-теории гиперболических колец можно найти, например, в параграфе 5 из [8]. Таким образом, переход к Λ-унитарным группам над унитарными кольцами унифицирует изучение классических групп над кольцами.

Из равенства $\alpha^* I^\lambda \alpha = I^\lambda$ следует, что $\alpha^* = I^\lambda \alpha^{-1} (I^\lambda)^*$ и, в частности, $\alpha \in U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда $\alpha^* \in U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$, откуда и следует эквивалентность утверждений пунктов 1 и 3, а также пунктов 2 и 4 определения 3.

Пример 3. Матрица $a \oplus d$ принадлежит $U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$, где $a, d \in M_r(R)$, тогда и только тогда, когда матрица a обратима, причем $d = (a^*)^{-1}$.

Матрица вида $a \oplus (a^*)^{-1}$, где $a \in GL_r(R)$ обозначается $H(a)$ и называется гиперболической. Сопоставление $a \to H(a)$ определяет гиперболическое отображение $H : GL_r(R) \to U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$, являющееся гомоморфизмом групп.

Пример 4. $T_{12}(b) = \begin{pmatrix} e & b \\ 0 & e \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица b $\bar{\Lambda}$-эрмитова.

Пример 5. $T_{21}(c) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ c & e \end{pmatrix} \in U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица c Λ-эрмитова.

Обозначим через $\mathrm{EU}^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ подгруппу $U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$, порожденную матрицами вида $H(\alpha)$, $T_{12}(b)$, $T_{21}(c)$, где $\alpha \in E_r(A)$, b $\bar{\Lambda}$-эрмитова, c Λ-эрмитова. Группа $\mathrm{EU}^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ называется элементарной (гиперболической) Λ-унитарной группой.

Пример 6. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ принадлежит $U^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица a обратима, $d = (a^*)^{-1}$ и матрица $a^{-1}b$ $\bar{\Lambda}$-эрмитова. В этом случае $\alpha \equiv H(a) \mod \mathrm{EU}^\lambda_{2r}(R, \Lambda)$.

Действительно, если матрица α является Λ-унитарной, то, в силу условия 4) из определения 3, $ad^* = e_r$ и значит, матрица a обратима, причем $d = (a^*)^{-1}$. Кроме того, в силу условия 4), матрица

ab^* является Λ-эрмитовой, и значит, матрица $(a^{-1}b)^* = b^*(a^{-1})^* = a^{-1}(ab^*)(a^{-1})^*$ является Λ-эрмитовой в силу примера 2. Следовательно, $a^{-1}b$ – $\bar{\Lambda}$-эрмитовая матрица. Обратно, из выполнения условий, следует справедливость условий из пункта 4) определения 3, и значит, по определению, матрица α является Λ-унитарной. Если матрица $a^{-1}b$ $\bar{\Lambda}$-эрмитова, то $T_{12}(-a^{-1}b) \in \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, причем $\alpha{\cdot}T_{12}(-a^{-1}b) = H(a)$, и значит, $\alpha \equiv H(a) \mod \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, что и завершает рассмотрение примера 6.

Аналогично рассматривается следующий пример.

Пример 7. Матрица $\alpha = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ принадлежит $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ тогда и только тогда, когда матрица a обратима, $d = (a^*)^{-1}$ и матрица ca^{-1} Λ-эрмитова. В этом случае $\alpha \equiv H(a) \mod \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Пример 8. Пусть $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$. Тогда, если $a \in GL_r(R)$, то $\alpha \equiv H(a) \mod \mathrm{EU}_{4r}^{\lambda}(R,\Lambda)$. Более того, если $a \in E_r(R)$, то $\alpha \in \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

Данный пример есть в точности лемма 4 из [11].

Введем следующую операцию на матрицах. Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in M_{2r}(R), \qquad \beta = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2s}(R).$$

Положим

$$\alpha \perp \beta = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{pmatrix} \in M_{2(r+s)}(R).$$

Определим вложение $U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda) \to U_{2r+2}^{\lambda}(R,\Lambda) : \alpha \to \alpha \perp e_2$ и положим $U^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, $\mathrm{EU}^{\lambda}(R,\Lambda) = \cup \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$.

В силу унитарного аналога леммы Уайтхеда (см., например, предложение 3.7 в главе 2 из [9] или лемму 1 в [12]), группа $\mathrm{EU}^{\lambda}(R,\Lambda)$ совпадает с коммутантом группы $U^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, в частности, корректно определена (абелева) группа $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) = U^{\lambda}(R,\Lambda)/\mathrm{EU}^{\lambda}(R,\Lambda)$. Класс матрицы $\alpha \in U^{\lambda}(R,\Lambda)$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ будем обозначать $[\alpha]$. В результате мы получаем унитарный K_1-функтор K_1U, действующий из категории унитарных колец в категорию абелевых групп.

Замечание 1. Если $\alpha_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$, то $\alpha_1\alpha_2^{-1} = T_{21}(c_1d_2^* + \lambda d_1 c_2^*) \in \mathrm{EU}_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)$ и, следовательно, $[\alpha_1] = [\alpha_2]$ в группе $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$. Таким образом, любой элемент группы K_1U^{λ} (R,Λ) однозначно определяется верхней половиной Λ-унитарной матрицы, представляющей данный элемент. В действительности любой из половинок такой матрицы – верхней, нижней, правой или левой.

Положим

$$U_{2,2r}^{\lambda}(R,\Lambda) = \{(a,b), a,b \in M_r(R) : \exists c,d \in M_r(R)$$
$$\text{такие, что} \quad \alpha_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U_{2r}^{\lambda}(R,\Lambda)\}.$$

В результате получаем корректно определенный унитарный (матричный) символ $U_{2,2r}^{\lambda}(R,\Lambda) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) : (a,b) \to [\alpha_{a,b}]$. Симплектический символ Меннике, введенный и использованный в [13] для решения конгруэнц–проблемы для симплектических групп над кольцами целых в полях алгебраических чисел, является частным случаем данного символа.

§3. Одна конструкция $\Lambda[X]$-унитарных матриц

Пусть (R,λ,Λ) – унитарное кольцо. Продолжим инволюцию на кольцо многочленов $R[X]$, положив $\overline{X} = X$, в результате получаем унитарное кольцо $(R[X],\lambda,\Lambda[X])$.

Предложение 1. *Если верхняя половина матрицы α из $U_{2r}^{\lambda}(R[X],$ $\Lambda[X])$ имеет вид $\begin{pmatrix} e_r - aX & bX^m \end{pmatrix}$ при некотором натуральном m, где $a,b \in M_r(R)$, то матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, причем справедливо равенство $ab = ba^*$.*

Доказательство. Предположим, что выполняются условия предложения. Так как α является $\Lambda[X]$-унитарной матрицей, то, в силу пункта 4) определения 3, выполняются условия:

1)$(e_r - aX)b^* = -\lambda b(e_r - aX)^*$;

2) диагональные элементы матрицы $(e_s - aX)b^*$ содержатся в $\Lambda[X]$.

Из условия 1) следует, что $b^* = -\lambda b$ и $\lambda ba^* = -ab^* = \lambda ab$. Следовательно, $b = -\bar{\lambda}b^*$, $ab = ba^* = (ab^*)^* = (-\lambda ab)^* = -\bar{\lambda}(ab)^*$ и значит b и ab являются анти $\bar{\lambda}$-эрмитовыми матрицами. Отметим, что в ходе доказательства мы получили равенство $ab = ba^*$.

В силу условия 2), диагональные элементы матриц b^*, ab^* содержатся в Λ, и значит, диагональные элементы матриц b, $ab = ba^* = (ab^*)^*$ содержатся в $\bar{\Lambda}$. Следовательно, матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми. $\square$

Предложение 2. *Пусть $a, b \in M_r(R)$. Если матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$, то для любого целого $k \geqslant 0$ матрица $a^k b$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, причем $a^k b = b(a^*)^k$.*

Доказательство. Если k равно 0 или 1, то доказывать нечего. Предположим, что $k \geqslant 2$ и для значений $< k$ утверждения предложения справедливы. Используя предположение индукции, получаем $a^k b = ab(a^*)^{k-1} = ba^*(a^*)^{k-1} = b(a^*)^k$, и равенство доказано. Так как $a^k b = a^{k-1}ba^* = a(a^{k-2}b)a^*$ и матрица $a^{k-2}b$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой согласно предположения индукции, то матрица $a^k b$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой в силу примера 2. Предложение доказано. $\square$

Следствие 1. *В условиях и обозначениях предложения 1, для любого целого $k \geqslant 0$ матрица $a^k b$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, причем $a^k b = b(a^*)^k$.*

Доказательство следующих утверждений аналогично доказательству соответственно предложений 1, 2 или следствия 1.

Предложение 3. *Если левая половина матрицы α из $U_{2r}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$ имеет вид $\begin{pmatrix} e_r - aX \\ -cX^n \end{pmatrix}$ при некотором натуральном n, где $a, c \in M_r(R)$, то матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем справедливо равенство $ca = a^*c$.*

Предложение 4. *Пусть $a, c \in M_r(R)$. Если матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем $ca = a^*c$, то для любого целого $k \geqslant 0$ матрица ca^k является Λ-эрмитовой, причем $ca^k = (a^*)^k c$.*

Следствие 2. *В условиях и обозначениях предложения 3, для любого целого $k \geqslant 0$ матрица ca^k является Λ-эрмитовой, причем справедливо равенство $ca^k = (a^*)^k c$.*

Введем следующее обозначение. Для натуральных чисел r и n и матриц $a, b, c \in M_r(R)$ положим

$$[a; b, c]_n = \begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \dots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix}.$$

Предложение 5. *Матрица* $[a;b,c]_n$ *является* $\Lambda[X]$*-унитарной тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

1) *матрицы* b *и* ab *являются* $\bar{\Lambda}$*-эрмитовыми, причем* $ab = ba^*$;
2) *матрицы* c *и* ca *являются* Λ*-эрмитовой, причем* $ca = a^*c$;
3) $bc = a^{n+1}$, $cb = (a^*)^{n+1}$.

Доказательство. Если $[a;b,c]_n \in U_{2r}^{\lambda}(R[X],\Lambda[X])$, то справедливость 1) доказана в предложении 1, а 2) – в предложении 3. Кроме того, в силу условия 4) определения 3, выполняется равенство

$$(e_r - aX)(e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^n X^n)^* - \lambda bc^* X^{n+1} = e_r,$$

из которого следует, что $a^{n+1} = -\lambda bc^*$ и значит $a^{n+1} = -\lambda b(-\bar{\lambda}c) = bc$. Докажем, что $cb = (a^*)^{n+1}$. Используя доказанное равенство, а также условия 1) и 2) , имеем $(a^*)^{n+1} = (bc)^* = c^*b^* = (-\bar{\lambda}c)(-\lambda b) = cb$. Справедливость обратного утверждения доказывается непосредственной проверкой любого из четырех эквивалентных условий из определения $\Lambda[X]$-унитарной матрицы с использованием условий 1)–3), а также предложений 2 и 4. □

§4. Нильпотентная по Бассу унитарная K_1-группа

Определение 4. *Ядро (расщепляющегося) эпиморфизма групп* $K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) \to K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$, *индуцированного унитарной сюръекцией унитарных колец* $(R[X],\Lambda[X]) \to (R,\Lambda) : X \to 0$, *обозначим через* $NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ *и будем называть нильпотентной по Бассу унитарной* K_1*-группой унитарного кольца* R.

Из определения следует, что

$$K_1U^{\lambda}(R[X],\Lambda[X]) = K_1U^{\lambda}(R,\Lambda) \oplus NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$$

и, в частности, изучение унитарной K_1-группы кольца многочленов $R[X]$ сводится к изучению группы $NK_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$, если структура группы $K_1U^{\lambda}(R,\Lambda)$ известна. Например, если R – коммутативное локальное или евклидово кольцо с тривиальной инволюцией, то $K_1\mathrm{Sp}(R) = 0$ (см., напр., [10,14]), и значит, в этом случае $K_1\mathrm{Sp}(R[X]) = NK_1\mathrm{Sp}(R)$. С другой стороны, если R – регулярное, нетерово кольцо, в котором 2 – обратимый элемент, то, согласно теореме Каруби ([15]), $K_1U^{\lambda}(R[X]) = K_1U^{\lambda}(R)$ и, следовательно, $NK_1U^{\lambda}(R) = 0$. Таким образом, функтор NK_1U является мерой отклонения функтора K_1U от свойства гомотопической инвариантности.

По определению, группа $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ есть относительная группа $K_1U^\lambda(R[X],\Lambda[X],X)$ унитарного идеала $(XR[X],X\Lambda[X])$ унитарного кольца $(R[X],\Lambda[X])$, которая была рассмотрена автором в предложении 2 в [8]. Одним из основных результатов данной работы является доказательство следующей теоремы, усиливающей предложение 2 из [8].

Теорема 1. *Любой элемент группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ имеет представитель вида:*

$$[a;b,c]_n = \begin{pmatrix} e_r - aX & bX \\ -cX^n & e_r + a^*X + \cdots + (a^*)^n X^n \end{pmatrix} (\in U_{2r}^\lambda(R[X],\Lambda[X]))$$

при некоторых натуральных r и n, где $a,b,c(\in M_r(R))$ удовлетворяют следующим условиям:

1) *матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, причем $ab = ba^*$;*
2) *матрицы c и ca являются Λ-эрмитовыми, причем $ca = a^*c$;*
3) $bc = a^{n+1}$, $cb = (a^*)^{n+1}$.

Напомним, что в силу предложения 5, 1)–3) являются необходимыми и достаточными условиями, чтобы $[a;b,c]_n$ являлась $\Lambda[X]$-унитарной матрицей.

Замечание 2. Теорему следует рассматривать как унитарный аналог линеаризационного трюка Хигмана, при этом, в отличие от линейного случая алгебраической K-теории, линеаризуется только верхняя половина $\Lambda[X]$-унитарной матрицы, представляющей элемент группы $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$, что вполне согласуется с замечанием 1. В действительности можно провести аналогичную линеаризацию любой из половинок представляющей матрицы.

Доказательство теоремы 1 следует той же схеме, что и доказательство предложения 2 из [8], но ее доказательство полностью отличается от доказательства предложения 2, за исключением пункта 1.1, при этом на каждом шаге приводится явный вид преобразующей элементарной унитарной матрицы и в правом верхнем блоке будет получен линейный (матричный) одночлен, в отличие от предложения 2, где в правом верхнем блоке был получен (матричный) одночлен, не обязательно линейный.

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $z \in NK_1U^\lambda\,(R,\Lambda)$, и пусть

$$\alpha = \alpha(X) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} (\in U^\lambda_{2k}(R[X], \Lambda[X])) -$$

его представитель при некотором натуральном k, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(X)(\in M_k(R[X]))$, причем $\alpha_{ii}(0) = e_k$, $\alpha_{ij}(0) = 0_k$, если $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. В частности, $z = [\alpha]$.

Доказательство теоремы разобьем на ряд пунктов.

1.1. Линеаризация левого верхнего блока. В этом пункте мы покажем, что элемент z имеет представитель с линейным матричным многочленом вида $e_s - aX$ в левом верхнем углу при некотором натуральном $s \geqslant k$, где $a \in M_s(R)$. Если $\alpha_{11} = e_k - aX$, где $a \in M_k(R)$, то доказывать нечего и в этом случае переходим к пункту 1.2. В противном случае, пусть $\alpha_{11} = e_k + a_1X + \dots + a_nX^n$ при некотором $n \geqslant 2$, где $a_i \in M_k(R)$, причем $a_n \neq 0_k$. В этом случае будем использовать (линеаризационный) трюк Хигмана, описанный при доказательстве предложения 5.1 в главе 12 из [1]. Для применения трюка Хигмана перейдем от матрицы α_{11} к матрице $\alpha_{11} \oplus e_k$. Умножая матрицу $\alpha_{11} \oplus e_k$ слева на $\gamma_1 = T_{12}(a_nX^{n-1})$ и справа на $\gamma_2 = T_{21}(-e_kX)$, принадлежащих $E_{2k}(R[X]) \cap GL_{2k}(R[X], X)$, получаем матрицу

$$\alpha'_{11} = \gamma_1(\alpha_{11} \oplus e_k)\gamma_2 = \begin{pmatrix} e_k + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} & a_nX^{n-1} \\ -e_kX & e_k \end{pmatrix}.$$

Положим $\alpha' = \alpha'(X) = H(\gamma_1)(\alpha \perp e_{2k})H(\gamma_2)$. Так как $H(\gamma_1), H(\gamma_2) \in \mathrm{EU}^\lambda_{4k}(R[X], \Lambda[X]))$, причем $H(\gamma_1(0)) = H(\gamma_2(0)) = e_{4k}$, то матрица α' также является представителем элемента z.

По построению, матрица $\alpha'_{11} = \alpha'_{11}(X)$ имеет степень $\leqslant n-1$, причем $\alpha'_{11}(0) = e_{2k}$ и значит по индукции найдутся натуральное число $s \geqslant 2k$, матрицы $\gamma, \delta \in E_s(R[X]) \cap GL_s(R[X], X)$ такие, что $\gamma(\alpha'_{11} \oplus e_{s-2k})\delta = e_s - aX$ при некоторой $a \in M_s(R)$. Умножая матрицу $\alpha' \perp e_{2s-4k}$ слева на $H(\gamma)$ и справа на $H(\delta)$, принадлежащих $\mathrm{EU}^\lambda_{2s}(R[X], \Lambda[X])$ и таких, что $H(\gamma(0)) = H(\delta(0)) = e_{2s}$, получаем

$$\alpha'' = H(\gamma)(\alpha' \perp e_{2s-4k})H(\delta) = \begin{pmatrix} e_s - aX & \beta_{12}(X) \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix}$$

при некоторых $\beta_{ij} \in M_s(R[X])$, причем $\beta_{22}(0) = e_s$, $\beta_{12}(0) = \beta_{21}(0) = 0$. Матрица α'' также является представителем элемента z и значит в дальнейшем можем считать, что матрица α имеет вид

$$\begin{pmatrix} e_s - aX & \beta_{12}(X) \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix}.$$

Если $\beta_{12}(X) = 0$, то, в силу примера 7, матрица $e_s - aX$ – обратима, причем $\alpha \equiv H(e_s - aX) \mod \mathrm{EU}_{2s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X]))$. Но если нильпотентная матрица a имеет степень нильпотентности $n+1$, то $H(e_s - aX) = [a; 0, 0]_n$ и значит $\alpha \equiv [a; 0, 0]_n \mod \mathrm{EU}_{2s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X]))$, что и завершает доказательство теоремы в этом случае.

В дальнейшем, как правило, гиперболическую матрицу $H(e_s - aX)$ будем записывать как $[a; 0, 0]_n$, предполагая, что нильпотентная матрица a имеет степень нильпотентности $n + 1$.

1.2. Переход к одночлену в правом верхнем блоке. Предположим, что $\beta_{12}(X) \neq 0$, причем $\beta_{12}(0) = 0$. В этом пункте мы покажем, что элемент z имеет представитель вида

$$\begin{pmatrix} e_s - aX & bX^m \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix}$$

при некотором натуральном m, причем $a, b (\in M_s(R))$ удовлетворяют условию 1) теоремы.

Пусть $\beta_{12}(X) = \beta_n X^n + \cdots + \beta_m X^m$, где $m \geqslant n \geqslant 1$, $\beta_i \in M_s(R)$, причем $\beta_n, \beta_m \neq 0$. Если $m - n = 0$, то в правом верхнем блоке матрицы α стоит одночлен bX^m, где $b = \beta_m$, причем, в силу предложения 1, выполняется условие 1) теоремы и в этом случае мы переходим к пункту 1.3. Предположим, что $m - n \geqslant 1$. Разделим (матричный) многочлен $\beta_{12}(X)$ справа на линейный (матричный) многочлен $e_s - aX$, и пусть $\beta_{12}(X) = (e_s - aX)h(X) + \beta'_m X^m$, где (правое) частное $h(X)$ имеет вид $h(X) = \beta'_n X^n + \cdots + \beta'_{m-1} X^{m-1}$. Сравнивая (матричные) коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях данного равенства, получаем $\beta'_n = \beta_n$, $\beta'_t = \beta_t + a\beta'_{t-1}$ при $n + 1 \leqslant t \leqslant m$. Таким образом, для коэффициентов (правого) частного $h(X)$ и остаточного члена $\beta'_m X^m$ мы получили те же формулы, что и в классической схеме Горнера с умножением на матрицу a слева. □

Предложение 6. *Коэффициенты β'_t правого частного и остаточного члена являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми матрицами при всех $n \leqslant t \leqslant m$.*

Доказательство. Так как матрица α $\Lambda[X]$-унитарна, то в силу пункта 4) определения 3, выполняются условия:

1)$(e_s - aX)(\beta_n X^n + \dots + \beta_m X^m)^* = -\lambda(\beta_n X^n + \dots + \beta_m X^m)(e_s - aX)^*$;

2) диагональные элементы матрицы $(e_s - aX)(\beta_n X^n + \dots + \beta_m X^m)^*$ содержатся в $\Lambda[X]$.

Сравнивая (матричные) коэффициенты при X^n в левой и правой частях равенства 1), получаем $\beta_n^* = -\lambda\beta_n$ и, следовательно, $\beta_n = -\bar{\lambda}\beta_n^*$. В частности, матрица β_n является анти $\bar{\lambda}$-эрмитовой. Кроме того, из условия 2) следует, что диагональные элементы матрицы β_n^* содержатся в Λ и, значит, диагональные элементы матрицы β_n содержатся в $\bar{\Lambda}$. Следовательно, матрица $\beta_n' = \beta_n$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой.

Аналогично, используя условия 1) и 2) и рассматривая коэффициенты при X^{n+1}, получаем, что матрица $\beta_{n+1}' = \beta_{n+1} + a\beta_n = \beta_{n+1} + a\beta_n'$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой. Если $m - n = 1$, то, умножая матрицу α справа на $T_{12}(-\beta_n X^n)(\in \mathrm{EU}_{2s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X]))$, получаем матрицу

$$\alpha' = \alpha \cdot T_{12}(-\beta_n X^n) = \begin{pmatrix} e_s - aX & \beta_{n+1}' X^{n+1} \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix},$$

являющуюся представителем класса z, у которой в правом верхнем блоке стоит матричный одночлен bX^{n+1}, где $b = \beta_{n+1}'$, причем в силу предложения 1 выполняется условие 1) теоремы и, значит, в этом случае мы переходим к пункту 1.3.

Пусть $m - n \geqslant 2$. Возьмем произвольное $n + 2 \leqslant t \leqslant m$ и предположим, что для значений $< t$ утверждение предложения справедливо. Сравнивая коэффициенты при X^t в левой и правой частях равенства 1), получаем $\beta_t^* - a\beta_{t-1}^* = -\lambda(\beta_t - \beta_{t-1}a^*)$. Умножив полученное равенство на $-\bar{\lambda}$, перепишем полученное равенство в виде: $\beta_t - \beta_{t-1}a^* = -\bar{\lambda}(\beta_t - \beta_{t-1}a^*)^*$. Следовательно, матрица $\beta_t - \beta_{t-1}a^*$ является анти $\bar{\lambda}$-эрмитовой. Кроме того, в силу условия 2), диагональные элементы матрицы $\beta_t^* - a\beta_{t-1}^* = (\beta_t - \beta_{t-1}a^*)^*$ содержатся в Λ, и значит, диагональные элементы матрицы $\beta_t - \beta_{t-1}a^*$ содержатся в $\bar{\Lambda}$. Следовательно, матрица $\beta_t - \beta_{t-1}a^*$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой.

Рассмотрим матрицу

$$\beta_t' = \beta_t + a\beta_{t-1}' = (\beta_t - \beta_{t-1}a^*) + (a\beta_{t-1}' + \beta_{t-1}a^*).$$

Как показано выше, матрица $\beta_t - \beta_{t-1}a^*$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, и значит, чтобы доказать, что матрица β_t' является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой достаточно показать, что матрица $\beta_{t-1}a^* + a\beta_{t-1}'$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой.

Воспользовавшись предположением, что матрицы β'_{t-1} и β'_{t-2} являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, получаем

$$\begin{aligned}\beta_{t-1}a^* + a\beta'_{t-1} &= \beta_{t-1}a^* - \bar{\lambda}a(\beta'_{t-1})^* \\ &= \beta_{t-1}a^* - \bar{\lambda}a(\beta_{t-1} + a\beta'_{t-2})^* \\ &= (\beta_{t-1}a^* - \bar{\lambda}a\beta^*_{t-1}) - \bar{\lambda}a(\beta'_{t-2})^*a^* \\ &= (\beta_{t-1}a^* - \bar{\lambda}(\beta_{t-1}a^*)^*) + a\beta'_{t-2}a^*.\end{aligned}$$

Так как матрица $\beta_{t-1}a^* - \bar{\lambda}(\beta_{t-1}a^*)^*$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой в силу примера 1, а матрица $a\beta'_{t-2}a^*$ является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой в силу примера 2 и предположения, что матрица β'_{t-2} является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, то матрица β'_t является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой, что и завершает доказательство предложения. $\square$

Следствие 3. *Правое частное $h(X)$ и остаточный член bX^m являются $\overline{\Lambda[X]} = \bar{\Lambda}[X]$-эрмитовыми матрицами, где $b = \beta'_m$.*

В силу следствия, матрица $\gamma = \gamma(X) = T_{12}(-h(X))$ содержится в $\mathrm{EU}^{\lambda}_{2s}(R[X], \Lambda[X])$, причем $\gamma(0) = 0$, и значит, матрица

$$\alpha' = \alpha\gamma(X) = \begin{pmatrix} e_s - aX & bX^m \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix}$$

также является представителем класса z, причем в силу предложения 1 выполняется условие 1) теоремы, что и завершает рассмотрение пункта 1.2.

1.3. Линеаризация правого верхнего блока. В силу пункта 1.2 можем считать, что матрица α имеет вид $\begin{pmatrix} e_s - aX & bX^m \\ \beta_{21}(X) & \beta_{22}(X) \end{pmatrix}$, где $a, b (\in M_s(R))$ удовлетворяют условию 1) теоремы. Если $m = 1$, то доказывать нечего. Предположим, что $m \geqslant 2$. Для линеаризации правого верхнего блока мы будем использовать трюк Хигмана. Так как матрицы b и ab являются $\bar{\Lambda}$-эрмитовыми, то матрица

$$\gamma(X) = \begin{pmatrix} 0 & bX^{m-1} \\ bX^{m-1} & -abX^{m-1} \end{pmatrix}$$

является $\overline{\Lambda[X]}$-эрмитовой. В частности, $T_{12}(\gamma(X)) \in \mathrm{EU}_{4s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$, причем $T_{12}(\gamma(0)) = e_{4s}$. Умножая матрицу $\alpha \perp e_{2s}$ слева на гиперболическую матрицу $\delta = H(\begin{pmatrix} e_s & -Xe_s \\ 0 & e_s \end{pmatrix})$ и справа на $T_{12}(\gamma(X))$, принадлежащих $\mathrm{EU}_{4s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$, получаем матрицу, у которой левый верхний блок имеет вид $e_{2s} - \begin{pmatrix} a & e_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X$, то есть остался линейным матричным многочленом, а правый верхний блок имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & -ab \end{pmatrix} X^{m-1}$, то есть является матричным одночленом степени $m-1$. Как отмечено выше, матрица $\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & -ab \end{pmatrix}$ является $\overline{\Lambda}$-эрмитовой. Кроме того, произведение

$$\begin{pmatrix} a & e_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & -ab \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

также является $\bar{\Lambda}$-эрмитовой матрицей в силу пункта 1.2. Следовательно, верхняя половина матрицы $\delta(\alpha \perp e_{2s}) T_{12}(\gamma)$ удовлетворяет условию 1) теоремы, и значит, рассмотрение данного пункта завершается по индукции.

Отметим, что так как в процессе линеаризации правого верхнего блока мы увеличили порядок матрицы и умножали слева на гиперболическую матрицу, то нижняя половина матрицы также изменилась.

1.4. Переход к одночлену в левом нижнем блоке. В силу пункта 1.3 можем считать, что матрица α имеет вид $\begin{pmatrix} e_s - aX & bX \\ \gamma_{21}(X) & \gamma_{22}(X) \end{pmatrix}$, где матрицы $a, b (\in M_s(R))$ удовлетворяют условию 1) теоремы, $\gamma_{21}(X)$, $\gamma_{22}(X) \in M_s(R[X])$, причем $\gamma_{21}(0) = 0, \gamma_{22}(0) = e_s$. Если $\gamma_{21}(X) = 0$, то, в силу примера 6, матрица $e_s - aX$ обратима, причем матрица $\alpha \equiv H(e_s - aX) \mod \mathrm{EU}_{2s}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X]) \equiv [a; 0, 0]_n \mod \mathrm{EU}_{2s}^{\lambda}$ $(R[X], \Lambda[X])$, и значит, в этом случае теорема доказана.

Предположим, что $\gamma_{21}(X) \neq 0$. Покажем, что элемент z имеет представитель вида $\begin{pmatrix} e_s - aX & bX \\ -cX^n & \gamma'_{22}(X) \end{pmatrix}$ при некотором натуральном n, где матрицы a, b, c удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы. Доказательство в значительной степени повторяет рассмотрение пункта 1.2, поэтому мы укажем только ключевые моменты доказательства. Пусть

$$\gamma_{21}(X) = \gamma_k X^k + \cdots + \gamma_n X^n,$$

где $n \geqslant k \geqslant 1$, $\gamma_i \in M_s(R)$, причем $\gamma_k, \gamma_n \neq 0$. Если $n-k=0$, то в левом нижнем блоке матрицы стоит одночлен $-cX^n$, где $c=-\gamma_n$, причем матрицы a и c удовлетворяют условию 2) теоремы в силу предложения 3, и доказывать нечего. Предположим, что $n-k \geqslant 1$. Разделим (матричный) многочлен $\gamma_{21}(X)$ слева на линейный (матричный) многочлен $e_s - aX$, и пусть $\gamma_{21}(X) = q(X)(e_s - aX) + \gamma'_n X^n$, где (левое) частное $q(X)$ имеет вид $q(X) = \gamma'_k X^k + \cdots + \gamma'_{n-1} X^{n-1}$. Сравнивая (матричные) коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях данного равенства, получаем $\gamma'_k = \gamma_k$, $\gamma'_t = \gamma_t + \gamma'_{t-1} a$ при $k+1 \leqslant t \leqslant n$. Таким образом, для коэффициентов (левого) частного $q(X)$ и остаточного члена $\gamma'_n X^n$ мы получили те же формулы, что и в классической схеме Горнера с умножением на матрицу a справа.

Предложение 7. *Коэффициенты γ'_t левого частного и остаточного члена являются Λ-эрмитовыми матрицами при всех $k \leqslant t \leqslant n$.*

Доказательство предложения проводится аналогично доказательству предложения 6.

Следствие 4. *Левое частное $q(X)$ и остаточный член $-cX^n$ являются $\Lambda[X]$-эрмитовыми матрицами, где $c = -\gamma'_n$.*

В силу следствия 4, матрица $\delta = \delta(X) = T_{21}(-q(X))$ содержится в $\mathrm{EU}^\lambda_{2s}(R[X], \Lambda[X])$, причем $\delta(0) = 0$, и значит, матрица $\alpha' = \delta \cdot \alpha = \begin{pmatrix} e_s - aX & bX \\ -cX^n & \beta'_{22}(X) \end{pmatrix}$ также является представителем класса z. Так как $\alpha' \in U^\lambda_{2s}(R[X], \Lambda[X])$, то матрицы $a, b, c (\in M_s(R))$ удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы в силу предложений 1 и 3 соответственно, что и завершает рассмотрение данного пункта.

1.5. Преобразование правого нижнего блока. В этом завершающем пункте мы покажем, что элемент z имеет представитель вида, указанный в теореме. Для этого нам осталось преобразовать правый нижний блок матрицы α', построенной в пункте 1.4. Рассмотрим матрицу $\beta'_{22}(X)$. Так как $\beta'_{22}(0) = e_s$, то $\beta'_{22}(X) = e_s + d_1 X + \cdots + d_m X^m$ при некотором натуральном m, где $d_i \in M_s(R)$, причем $d_m \neq 0$ и, в силу условия 2) определения 3, справедливо равенство

$$(e_s - a^* X)(e_s + d_1 X + \cdots + d_m X^m) - \lambda c^* b X^{n+1} = e_s.$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Предположим, что $m \leqslant n$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X в левой и правой частях равенства, получаем, что $d_k = a^* d_{k-1} = (a^*)^k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant m$, где $d_0 = e_s$. Рассмотрим коэффициент при X^{m+1}. Если $m = n$, то $(a^*)^{n+1} + \lambda c^* b = 0$ и, следовательно, $a^{n+1} + \bar{\lambda} b^* c = a^{n+1} + \bar{\lambda}(-\lambda) bc = a^{n+1} - bc = 0$. Таким образом, если $m = n$, то правый нижний блок матрицы α' имеет вид, указанный в теореме и выполняются условия 1)–3) теоремы. Если же $m < n$, то $a^{m+1} = 0$ и значит матрица $e_s - aX$ является унипотентной. Следовательно, в силу примера 8, $\alpha' \equiv [a; 0, 0]_n \mod EU^{\lambda}_{4s}(R[X], \Lambda[X])$, что и завершает доказательство теоремы в этом случае.

Случай 2. Предположим, что $m > n$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях X в левой и правой частях равенства, получаем, что $d_k = a^* d_{k-1} = (a^*)^k$ для всех $1 \leqslant k \leqslant n$, $d_{n+s} = (a^*)^{n+s} - (a^*)^{s-1} cb$ для всех $1 \leqslant s \leqslant m - n$. Кроме того, так как коэффициент при X^{m+1} есть нулевая матрица, то получаем соотношение $(a^*)^{m-n} cb = (a^*)^{m+1}$. Коэффициенты a и c матрицы α', построенной в пункте 1.4, удовлетворяют условию 2) теоремы, и значит, матрицы $ca^k = (a^*)^k c$ являются Λ-эрмитовыми при всех целых $k \geqslant 0$ в силу следствия 2. В частности,

$$\epsilon(X) = T_{21}(cX^n + caX^{n+1} + \cdots + ca^{m-n-1} X^{m-1}) \in EU^{\lambda}_{2s}(R[X], \Lambda[X]).$$

Следовательно, матрица $\epsilon \cdot \alpha' = [a; b, ca^{m-n}]_m$ также является представителем класса z, причем матрицы a, b, ca^{m-n} удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы, что и завершает рассмотрение случая 2 и доказательство теоремы. $\square$

§5. Унипотентные представители группы $NKU^{\lambda}_1(R, \Lambda)$

Хорошо известно (см., например, следствие 5.3 из главы 12 в [1]), что для ассоциативного кольца R с 1 любой элемент нильпотентной по Бассу K_1-группы $NK_1(R)$ имеет унипотентный представитель $e_r - aX$ при некотором натуральном r, где $a (\in M_r(R))$ – нильпотентная матрица. Для нильпотентной по Бассу унитарной K_1-группы аналогичный результат вообще говоря не имеет места. Полное описание унипотентных представителей группы $NKU^{\lambda}_1(R, \Lambda)$ для произвольного унитарного кольца (R, Λ) дается в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть матрицы $a, b, c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 1 при некоторых натуральных r и n. Тогда, в обозначениях теоремы 1, справедливы следующие утверждения:*

1) *матрица* $[a;b,c]_1 = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X$ *является унипотентной, причем матрица* $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}$ *имеет степень нильпотентности* 2;

2) *при* $n \geqslant 2$ *матрица* $[a;b,c]_n$ *является унипотентной тогда и только тогда, когда матрица* $e_r - aX$ *унипотентна, и в этом случае класс матрицы* $[a;b,c]_n$ *в группе* $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ *совпадает с классом гиперболической матрицы* $H(e_r - aX) = [a;0,0]_n$.

Напомним, что в силу предложения 5, $[a;b,c]_n \in U_{2r}^\lambda(R[X],\Lambda[X])$ и, по определению, $[a;b,c]_n$ представляет некоторый элемент группы $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$, а в силу теоремы 1, любой элемент группы $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$ имеет представитель вида $[a;b,c]_n$ при некоторых натуральных r и n, где $a,b,c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 1.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 1). Рассмотрим матрицу $[a;b,c]_1 = e_{2r} - \begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix} X$, где, в силу условий 1)–3) теоремы 1, матрицы a и ab $\bar{\Lambda}$-эрмитовые, a и ca Λ-эрмитовые, причем $ab = ba^*$, $ca = ac^*$, $bc = a^2$, $cb = (a^*)^2$. Используя эти соотношения, получаем, что $\begin{pmatrix} a & -b \\ c & -a^* \end{pmatrix}^2 = 0_{2r}$. Следовательно, $[a;b,c]_1$ является унипотентной $\Lambda[X]$-унитарной матрицей, представляющей элемент группы $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$.

Предположим, что $n \geqslant 2$. Рассмотрим $\Lambda[X]$-унитарную матрицу $[a;b,c]_n = e_{2r} - \alpha X$, где $\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ cX^{n-1} & -a^*(e_r + aX + \cdots + (aX)^{n-1})^* \end{pmatrix}$, причем матрицы $a,b,c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)–3) теоремы 1 и $\alpha(0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & -a^* \end{pmatrix}$. По индукции показывается, что для любого натурального k матрица $\alpha(0)^k = a^k \oplus (a^*)^k$, если k четно, и $\alpha(0)^k = \begin{pmatrix} a^k & -a^{k-1}b \\ 0 & -(a^*)^k \end{pmatrix}$, если k нечетно. Отметим, что формулы для $\alpha(0)^k$ также следуют из формул для $\alpha(X)^k$, которые будут получены в предложении 8 ниже, если положить $X = 0$.

Предположим, что $\alpha = \alpha(X)$ – нильпотентная матрица степени нильпотентности m. Следовательно, $\alpha^m = \alpha(X)^m = 0_{2r}$, и значит, $\alpha(0)^m = 0_{2r}$. Поэтому из выписанных выше формул следует, что

$a^m = 0_{2r}$, и значит, a является нильпотентной матрицей степени нильпотентности, не превосходящей m. Таким образом, матрица $e_r - aX$ является унипотентной, и, в частности, является обратимой, причем $[a; b, c]_n \equiv [a; 0, 0]_n \mod \mathrm{EU}_{4r}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$ в силу примера 8. Необходимость в пункте 2) теоремы – доказана.

Докажем достаточность в пункте 2) теоремы. Вначале рассмотрим частный случай $n = 2$. В этом случае $\alpha = \begin{pmatrix} a & -b \\ cX & -a^*(e_r + a^*X) \end{pmatrix}$. Имеем

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} a^2(e_r - aX) & a^2bX \\ -(a^*)^2cX^2 & (a^*)^2(e_r + a^*X + (a^*)^2X^2) \end{pmatrix} = (a^2 \oplus (a^*)^2)(e_{2r} - \alpha X).$$

Используя равенства $ab = ba^*$, $ca = a^*c$, получаем, что матрицы $a^2 \oplus (a^*)^2$, $e_{2r} - \alpha X$ коммутируют между собой и, следовательно, $\alpha^{2k} = (a^{2k} \oplus (a^*)^{2k})(e_{2r} - \alpha X)^k$ для любого натурального k. Предположим, что a – нильпотентная матрица степени нильпотентности m. Тогда из полученной формулы следует, что $\alpha^{2k} = 0_{2r}$ для любого целого k, удовлетворяющего условию $2k \geqslant m$. Следовательно, матрица $[a; b, c]_2 = e_{2r} - \alpha X$ является унипотентной, причем $[a; b, c]_2 \equiv [a; 0, 0]_2 \mod \mathrm{EU}_{4r}^{\lambda}(R[X], \Lambda[X])$ в силу примера 8, что и завершает доказательство достаточности в пункте 2) теоремы при $n = 2$.

Предположим, что $n \geqslant 3$. Введем ряд обозначений. Положим $Y = Y(X) = aX(\in M_r(R[X]))$, $(Y^k)^* = (a^*)^k X^k$ для любого натурального k. Тогда, в силу следствий 1 и 2, $Y^k \cdot b = b \cdot (Y^k)^*$, $c \cdot Y^k = (Y^k)^* \cdot c$. В этих обозначениях, $\alpha = \alpha(X) = \begin{pmatrix} a & -b \\ cX^{n-1} & -a^*(v(Y) + Y^{n-1})^* \end{pmatrix}$, где $v(Y) = e_r + Y + \cdots + Y^{n-2}$, причем $v(0) = e_r$. Кроме того, обозначим через Z образ кольца целых чисел $\mathbf{Z}$ при естественном гомоморфизме колец $\mathbf{Z} \to R : n \to n \cdot 1_R$, а если $\gamma(Y) \in M_r(Z[Y])$, то, по определению, полагаем $\gamma(0) = \gamma(Y(0))(\in M_r(Z))$.

Предложение 8. *Предположим, что $n \geqslant 3$ и пусть $[a; b, c]_n = e_{2r} - \alpha(X) \cdot X$, причем матрицы $a, b, c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям* 1) – 3) *теоремы* 1. *Тогда для любого натурального k справедливы следующие формулы:*

1)

$$\alpha(X)^{2k} = \begin{pmatrix} a^{2k}(e_r - Y^{n-1}\alpha_{11}(Y)) & a^{2k}bX(k \cdot e_r + Y\alpha_{12}(Y))^* \\ -(a^*)^{2k}cX^n(k \cdot e_r + Y\alpha_{21}(Y)) & (a^*)^{2k}(e_r + Y\alpha_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij}(Y) \in M_r(Z[Y])$ *при всех* $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, *причем* $\alpha_{11}(0) = k \cdot e_r$, $\alpha_{22}(0) = 2k \cdot e_r$;

2)

$$\alpha(X)^{2k+1} = \begin{pmatrix} a^{2k+1}(e_r - Y^{n-1}\alpha_{11}(Y)) & -a^{2k}b(e_r + Y\alpha_{12}(Y))^* \\ (a^*)^{2k}cX^{n-1}(e_r + Y\alpha_{21}(Y)) & -(a^*)^{2k+1}(e_r + Y\alpha_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij}(Y) \in M_r(Z[Y])$ *при всех* $1 \leqslant i,j \leqslant 2$, *причем* $\alpha_{11}(0) = \alpha_{12}(0) = \alpha_{21}(0) = k \cdot e_r$, $\alpha_{22}(0) = (2k+1) \cdot e_r$.

Завершение доказательства теоремы. Докажем достаточность в пункте 2) теоремы при $n \geqslant 3$. Пусть матрица $e_r - aX$ унипотентна, причем матрица $a(\in M_r(R))$ имеет степень нильпотентности m. Если m четно, то в силу формулы 1) из предложения 8, $\alpha(X)^m = 0_{2r}$, и значит, α – нильпотентная матрица степени нильпотентности, не превосходящей m. Если же m нечетно, то в силу формулы 1) из предложения 8, $\alpha(X)^{m+1} = 0_{2r}$, и значит, α – нильпотентная матрица степени нильпотентности, не превосходящей $m+1$. Таким образом, при $n \geqslant 3$ матрица $[a;b,c]_n = e_{2r} - \alpha(X) \cdot X$ унипотентна, причем ее класс в группе $NK_1U^\lambda(R,\Lambda)$ совпадает с классом гиперболической матрицы $H(e_r - aX) = [a;0,0]_{m-1}$ в силу примера 8, что и завершает доказательство достаточности в пункте 2) теоремы в предположении справедливости формул из предложения 8. □

Доказательство предложения 8. Доказательство предложения будем проводить индукцией по k. Пусть $k = 1$. Рассмотрим четную степень. Имеем:

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} a^2(e_r - Y^{n-1}) & a^2bX(e_r + Y(v(Y) - Y^{n-2}))^* \\ -(a^*)^2cX^n(e_r + Y(v(Y) - Y^{n-2})) & (a^*)^2((v(Y) + Y^{n-1})^2 - Y^{n-1})^* \end{pmatrix}.$$

Но $(v(Y) + Y^{n-1})^2 - Y^{n-1} = e_r + Y(2e_r + pY + \cdots + Y^{2n-3})$, где $p = 2$, если $n = 3$ и $p = 3$, если $n \geqslant 4$. Таким образом,

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} a^2(e_r - Y^{n-1}\alpha_{11}(Y)) & a^2bX(e_r + Y\alpha_{12}(Y))^* \\ -(a^*)^2cX^n(e_r + Y\alpha_{21}(Y)) & (a^*)^2(e_r + Y\alpha_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_{11}(Y) &= e_r, \\ \alpha_{12}(Y) &= \alpha_{21}(Y) = v(Y) - Y^{n-2}, \\ \alpha_{22}(Y) &= 2e_r + pY + \cdots + Y^{2n-3}, \end{aligned}$$

причем $\alpha_{11}(0) = e_r$, $\alpha_{22}(0) = 2e_r$, и справедливость формулы при $k = 1$ для четной степени доказана.

Рассмотрим нечетную степень. Используя полученную формулу для α^2, имеем:

$$\alpha^3 = \begin{pmatrix} a^3(e_r - Y^{n-1}\beta_{11}(Y)) & -a^2b(e_r + Y\beta_{12}(Y))^* \\ (a^*)^2cX^{n-1}(e_r + Y\beta_{21}(Y)) & -(a^*)^3(e_r + Y\beta_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \beta_{11}(Y) &= e_r - Yv(Y), \\ \beta_{12}(Y) &= v(Y)^2 + Y^{n-1}v(Y) - Y^{n-2} = e_r + (p-1)Y + \dots + Y^{2n-3}, \\ \beta_{21}(Y) &= \alpha_{22}(Y) - v(Y) = e_r + (p-1)Y + \dots + Y^{2n-3}, \\ \beta_{22}(Y) &= v(Y) + \alpha_{22}(Y) + Yv(Y)\alpha_{22}(Y) - Y^{n-1}v(Y) \\ &= 3e_r + (p+3)Y + \dots + Y^{3n-4} \end{aligned}$$

и где $\alpha_{22}(Y) = 2e_r + pY + \dots + Y^{2n-3}$ взято из формулы для α^2, причем $p = 2$, если $n = 3$ и $p = 3$, если $n \geqslant 4$. Следовательно,

$$\beta_{11}(0) = \beta_{12}(0) = \beta_{21}(0) = e_r, \qquad \beta_{22}(0) = 3e_r,$$

и справедливость формулы при $k = 1$ для нечетной степени также доказана.

Предположим, что $k \geqslant 1$ и справедливость формул для четных степеней $2s$ и для нечетных степеней $2s+1$ при всех $s \leqslant k$ – доказана и докажем справедливость формул для степеней $2(k+1) = 2k+2$ и $2(k+1)+1 = 2k+3$.

Рассмотрим четную степень $\alpha(X)^{2(k+1)} = \alpha(X)^{2k+1} \cdot \alpha(X)$. По предположению индукции,

$$\alpha(X)^{2k+1} = \begin{pmatrix} a^{2k+1}(e_r - Y^{n-1}\alpha_{11}(Y)) & -a^{2k}b(e_r + Y\alpha_{12}(Y))^* \\ (a^*)^{2k}cX^{n-1}(e_r + Y\alpha_{21}(Y)) & -(a^*)^{2k+1}(e_r + Y\alpha_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где $\alpha_{ij}(Y) \in M_r(Z[Y])$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant 2$, причем $\alpha_{11}(0) = \alpha_{12}(0) = \alpha_{21}(0) = k \cdot e_r$, $\alpha_{22}(0) = (2k+1) \cdot e_r$, и значит,

$$\alpha(X)^{2(k+1)} = \begin{pmatrix} a^{2k+2}(e_r - Y^{n-1}\beta_{11}(Y)) & a^{2k+1}b\beta_{12}(Y)^* \\ -(a^*)^{2k+1}cX^{n-1}\beta_{21}(Y) & (a^*)^{2k+2}\beta_{22}(Y)^* \end{pmatrix},$$

где

$$
\begin{aligned}
\beta_{11}(Y) &= \alpha_{11}(Y) + e_r + Y\alpha_{12}(Y),\\
\beta_{12}(Y) &= e_r + Yv(Y) + Y(v(Y) + Y^{n-1})\alpha_{12}(Y) - e_r + Y^{n-1}\alpha_{11}(Y)\\
&= aX((e_r + \alpha_{12}(Y))v(Y) + Y^{n-1}\alpha_{12}(Y) + Y^{n-2}\alpha_{11}(Y)),\\
\beta_{21}(Y) &= e_r + Y\alpha_{22}(Y) - e_r - Y\alpha_{21}(Y)\\
&= aX(\alpha_{22}(Y) - \alpha_{21}(Y)),\\
\beta_{22}(Y) &= v(Y) + Y^{n-1} + Y(v(Y) + Y^{n-1})\alpha_{22}(Y) - Y^{n-1} - Y^{n}\alpha_{21}(Y)\\
&= e_r + Y(v(Y) + (Y^{n-1} + v(Y))\alpha_{22}(Y) - Y^{n-1}\alpha_{21}(Y)).
\end{aligned}
$$

В ходе вычислений мы воспользовались тем, что $Y = aX$. Положим

$$
\begin{aligned}
\gamma_{12}(Y) &= (e_r + \alpha_{12}(Y))v(Y) + Y^{n-1}\alpha_{12}(Y) + Y^{n-2}\alpha_{11}(Y),\\
\gamma_{21}(Y) &= \alpha_{22}(Y) - \alpha_{21}(Y).
\end{aligned}
$$

Так как

$$
\begin{aligned}
\gamma_{12}(0) &= (e_r + \alpha_{12}(0))v(0) = (k+1)e_r,\\
\gamma_{21}(0) &= \alpha_{22}(0) - \alpha_{21}(0) = (k+1)e_r,
\end{aligned}
$$

то

$$
\gamma_{12}(Y) = (k+1)e_r + Y\delta_{12}(Y), \qquad \gamma_{21}(Y) = (k+1)e_r + Y\delta_{21}(Y)
$$

при некоторых $\delta_{12}(Y), \delta_{21}(Y) \in M_r(Z[Y])$. Положим

$$
\delta_{11}(Y) = \alpha_{11}(Y) + e_r + Y\alpha_{12}(Y),
$$

$$
\delta_{22}(Y) = v(Y) + (Y^{n-1} + v(Y))\alpha_{22}(Y) - Y^{n-1}\alpha_{21}(Y).
$$

Тогда, используя равенства $ba^* = ab$, $ca = a^*c$, получаем, что

$$
\begin{aligned}
&\alpha(X)^{2(k+1)}\\
&= \begin{pmatrix} a^{2k+2}(e_r - Y^{n-1}\delta_{11}(Y)) & a^{2k+2}bX((k+1)e_r + Y\delta_{12}(Y))^* \\ -(a^*)^{2k+2}cX^n((k+1)e_r + Y\delta_{12}(Y)) & (a^*)^{2k+2}(e_r + Y\delta_{22}(Y))^* \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

причем

$$
\delta_{11}(0) = \alpha_{11}(0) + e_r = (k+1)e_r, \quad \delta_{22}(0) = v(0) + v(0)\alpha_{22}(0) = 2(k+1)e_r,
$$

и справедливость формулы при $k+1$ для четной степени $\alpha(X)^{2(k+1)}$ – доказана.

Рассмотрим нечетную степень $\alpha(X)^{2(k+1)+1} = \alpha(X)^{2(k+1)} \cdot \alpha(X)$. Используя доказанную формулу для $\alpha(X)^{2(k+1)}$, получаем:

$$\alpha(X)^{2(k+1)+1} = \begin{pmatrix} a^{2k+3}(e_r - Y^{n-1}\epsilon_{11}(Y)) & -a^{2k+2}b(e_r + Y\epsilon_{12}(Y))^* \\ (a^*)^{2k+2}cX^{n-1}(e_r + Y\epsilon_{21}(Y)) & -(a^*)^{2k+2}(e_r + Y\epsilon_{22}(Y))^* \end{pmatrix},$$

где

$$\epsilon_{11}(Y) = \delta_{11}(Y) - (k+1)Y - Y^2\delta_{12}(Y),$$

$$\epsilon_{12}(Y) = (k+1)(v(Y) + Y^{n-1}) + Y(v(Y) + Y^{n-1})\delta_{12}(Y) - Y^{n-2}\delta_{11}(Y),$$

$$\epsilon_{21}(Y) = \delta_{22}(Y) - (k+1)e_r - Y\delta_{21}(Y),$$

$$\epsilon_{22}(Y) = v(Y) + (v(Y) + Y^{n-1})\delta_{22}(Y) - (k+1)Y^{n-1} - Y^n\delta_{21}(Y),$$

причем

$$\epsilon_{11}(0) = \delta_{11}(0) = (k+1)e_r,$$

$$\epsilon_{12}(0) = (k+1)v(0) = (k+1)e_r,$$

$$\epsilon_{21}(0) = \delta_{22}(0) - (k+1)e_r = 2(k+1)e_r - (k+1)e_r = (k+1)e_r,$$

$$\epsilon_{22}(0) = v(0) + v(0)\delta_{22}(0) = e_r + 2(k+1)e_r = (2k+3)e_r.$$

Таким образом, справедливость формулы при $k+1$ для нечетной степени $\alpha(X)^{2(k+1)+1}$ также доказана, что и завершает доказательство как предложения 8, так и теоремы 2. □

В заключение введем одну операцию на группе $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$, при которой любому элементу группы $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$ сопоставляется элемент с унипотентным представителем. Более точно, если элемент группы $NKU_1^\lambda(R,\Lambda)$ представляется $\Lambda[X]$-унитарной матрицей $[a;b,c]_n$, где матрицы $a,b,c \in M_r(R)$ удовлетворяют условиям 1)-3) теоремы 1, то классу матрицы $[a;b,c]_n$ сопоставляется класс матрицы $[a^{k+1};ab,c]_1$, если $n = 2k$ и сопоставляется класс матрицы $[a^{k+1};b,c]_1$, если $n = 2k+1$. Отметим, что класс унипотентной матрицы $[a;b,c]_1$ под действием операции переходит в себя, а класс гиперболической матрицы $[a;0,0]_n$, где n равно $2k$ или $2k+1$, переходит в класс гиперболической матрицы $[a^{k+1};0,0]_1$.

Литература

1. Х. Басс, *Алгебраическая K-теория.* Мир, М., 1973.
2. G. Cortinas, C. Haesemeyer, M. E. Walker, C. Weibel, *Bass' NK groups and cdh-fibrant Hochschild homology.* — Invent. Math. **89** (2010), 421–448.
3. J. F. Davis, *Some remarks on Nil groups in algebraic K-theory.* — Preprint, available at `http://arXiv org/math.KT/0803.1641v2`.

4. H. Bass, *Some problems in "classical" algebraic K-theory*, — Lect. Notes Math. **342** (1973), 3–73.
5. S. E. Cappell, *Unitary nilpotent groups and hermitian K-theory.* — Bull. AMS **80** (1974), 1117–1122.
6. F. T. Farrell, *The exponent of UNil.* — Topology **18** (1979), 305–312.
7. F. Connolly, A. Ranicki, *On the calculation of UNil.* — Adv. Math. **195** (2005), 205–258.
8. В. И. Копейко, *О гомотопизации унитарного K_1-функтора.* — Алгебра и анализ **20** (2008), No. 5, 99–108.
9. H. Bass, *Unitary algebraic K-theory*, — Lect. Notes Math. **343** (1973), 57–265.
10. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al., 1989.
11. В. И. Копейко, *Трансфер унитарного K_1-функтора при полиномиальных расширениях колец.* — Алгебра и анализ **29** (2017), No. 3, 34–60.
12. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация унитарных и ортогональных групп над кольцами с инволюцией.* — Мат. сборник **81** (1970), No. 3, 328–351.
13. H. Bass, J. Milnor, J.-P. Serre, *Solution of the congruence subgroup problem for $SL_n(n \geqslant 3)$ and $Sp_{2n}(n \geqslant 2)$.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 33 (1967), 59–133. (Русский перевод: Матем. (сб. переводов), т. 14 (1970), No 6, 64–128; т. 15 (1971), No. 1, 44–60.)
14. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Мат. сборник **106** (1978), No. 1, 94–107.
15. M. Karoubi, *Périodicité de la K-théorie hermitienne.* — Lect. Notes Math. **343** (1973), 301–411.

Kopeiko V. I. Bass' nilpotent unitary K_1-group of unitary ring.

In this paper we introduce and study Bass' nilpotent unitary K_1-group of the unitary ring. We obtain a set of the unitary representative of this group and describe all representative one by unitary unipotent matrix.

Калмыцкий государственный
университет им.Б.Б.Городовикова
ул. Пушкина, 11
358000 Элиста, Россия
E-mail: kopeiko52@mail.ru

Поступило 15 сентября 2017 г.