Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

Д. Д. Киселев

МЕТАЦИКЛИЧЕСКИЕ 2-РАСШИРЕНИЯ С ЦИКЛИЧЕСКИМ ЯДРОМ И ВОПРОСЫ УЛЬТРАРАЗРЕШИМОСТИ

§1. Введение

1.1. Задача погружения, связанная с точной последовательностью конечных групп,

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F = \mathrm{Gal}(K/k) \longrightarrow 1,$$

состоит в том, чтобы построить k-алгебру Галуа L с группой G, содержащую поле K, таким образом, чтобы эпиморфизм ограничения автоморфизмов L на K совпадал бы с φ. Поиск решений в классе алгебр Галуа (не обязательно полей) принципиален по нескольким причинам: в случае нильпотентного ядра и расширения полей алгебраических чисел поиски решения задачи погружения в смысле алгебр Галуа и в смысле полей эквивалентны (см. [1]), в случае абелева ядра можно применить аппарат гомологической алгебры (именно так А. В. Яковлевым в [2] были получены условия разрешимости задачи погружения для абелева ядра).

В то же время интересен случай, когда априори можно гарантировать, что все решения задачи погружения окажутся полями (такие задачи мы в дальнейшем, следуя [3], называем ультраразрешимыми). Простейшее условие таково: ядро задачи погружения лежит в группе Фраттини накрывающей группы (см. [4, Гл. 1, §6, следствие 5]). Первые нетривиальные примеры (когда указанное условие на группу Фраттини не выполняется) были построены в [3, 5]. В связи с работами [3, 5] А. В. Яковлев поставил следующую проблему.

Проблема 1 (А. В. Яковлев). *Пусть*

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} F \longrightarrow 1 \tag{1}$$

Ключевые слова: ультраразрешимость, задача погружения, метациклические расширения.

– расширение конечных групп с абелевым ядром A. При каких условиях существует расширение Галуа числовых полей K/k с группой F, такое, что получившаяся задача погружения ультраразрешима?

По существу систематическое изучение проблемы 1 было начато в работах [6–8], где получено решение проблемы 1 в следующих случаях: расширение (1) является p-расширением нечетного порядка с циклическим ядром A и абелевой факторгруппой F; расширение (1) является *минимальным*[1] p-расширением нечетного порядка с циклическим ядром A и произвольной факторгруппой F.

В рассмотренных случаях сначала показывалась ультраразрешимость расширения (1) над локальными полями, а потом применялся результат [9, теорема 1].

В данной работе мы сначала даем необходимые и достаточные условия 2-локальной ультраразрешимости метациклических 2-расширений (теорема 1), после чего в теореме 2 устанавливаем[2] редукционный результат: если сопутствующее расширение второго рода ультраразрешимо локально, то исходное расширение ультраразрешимо. Наконец, объединяя теоремы 1, 2 и результат [8, Theorem 3] мы в теореме 3 устанавливаем ультраразрешимость для достаточно широкого класса 2-расширений с циклическим ядром.

1.2. Под p-локальным полем мы будем понимать конечное расширение поля $\mathbb{Q}_p$. Под числовым полем мы будем понимать конечное расширение поля $\mathbb{Q}$. Для локального поля k символ θ_k обозначает локальный символ Артина. Для числового поля k и его некоторой простой точки $\mathfrak{p}$ символом $k_\mathfrak{p}$ обозначается $\mathfrak{p}$-адическое пополнение поля k. Символ $\mathcal{O}_k$ обозначает кольцо целых алгебраических чисел числового поля k, а $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ – кольцо нормирований поля $k_\mathfrak{p}$. Символом k^* обозначается мультипликативная группа поля k. Для расширения Галуа K/k символом $N_{K/k}(K^*)$ обозначается множество элементов из k^*, представимых в виде нормы относительно расширения K/k. Символом $\nu_p(m)$ мы обозначаем значение p-адического показателя целого числа m. Символом ε_m будем обозначать некоторый примитивный корень степени m из единицы. При этом если $m_1 \mid m_2$, то соответствующие корни из единицы всегда будут выбираться с условием нормировки: $\varepsilon_{m_1} = \varepsilon_{m_2}^{m_2/m_1}$.

[1]Терминология разъясняется в п. 1.2.

[2]Используя недавний результат А. В. Яковлева (см. предложение 1), обобщающий [9, Предложение 1].

Для конечного расширения полей K/k символом $(K : k)$ обозначается размерность K как векторного пространства над k. Для полей нулевой характеристики k_1, k_2 символ $k_1 \cdot k_2$ обозначает их композит.

Все рассматриваемые далее группы являются конечными, если не оговорено противное. Для элементов x, y некоторой группы обозначим $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. В дальнейшем расширение (1) будем называть *ультраразрешимым*, если проблема 1 для него решается положительно. Расширение (1) будем называть 2-*локально ультраразрешимым*, если проблема 1 для такого расширения решается положительно над 2-локальными полями.

2-расширение (1) будем называть *расширением кватернионного типа*, если группа G задается копредставлением

$$G = Q_{2^{n+1}} = \langle a,\, b \mid a^{2^n} = 1,\, b^2 = a^{2^{n-1}},\, a^b = a^{-1}\rangle,$$

где a – образующий элемент группы A, а $\varphi(b)$ – образующий элемент группы F; разумеется, при этом $n \geqslant 2$.

Напомним понятие брауэровской задачи погружения. Пусть $(K/k, G, \varphi)$ – задача погружения с циклическим ядром A порядка m, а характеристика поля k не делит m. Пусть далее $\varepsilon_m \in K$. Группу $\operatorname{Hom}(A, K^*)$ можно естественным образом превратить в $\operatorname{Gal}(K/k)$-модуль:

$$\chi^f(a) = \chi(a^{f^{-1}})^f, \ \ \forall\, \chi \in \operatorname{Hom}(A, K^*), \ \ f \in \operatorname{Gal}(K/k), \ \ a \in A.$$

Задача $(K/k, G, \varphi)$ является по определению брауэровской, если для любого $\chi \in \operatorname{Hom}(A, K^*)$ и любого $f \in \operatorname{Gal}(K/k)$ выполнено $\chi^f = \chi$.

Для любой задачи погружения $(K/k, G, \varphi)$ с абелевым ядром A периода m, взаимно простого с характеристикой поля k, такой, что $\varepsilon_m \in K$, можно определить для $\chi \in \operatorname{Hom}(A, K^*)$ сопутствующую брауэровскую задачу погружения: $(K/K_\chi, G_\chi/\ker\chi, \varphi_\chi)$, где G_χ – полный прообраз относительно φ подгруппы $F_\chi = \operatorname{Gal}(K/K_\chi)$ группы $\operatorname{Gal}(K/k)$, действие которой на χ тривиально; при этом φ_χ – индуцированный эпиморфизм. Для задачи $(K/k, G, \varphi)$ с абелевым ядром A периода m, взаимно простого с характеристикой поля k, и для любого[3] $\chi \in \operatorname{Hom}(A, K^*)$, неподвижного относительно $\operatorname{Gal}(K/k)$, можно определить элементарную сопутствующую брауэровскую задачу $(K/k, G/\ker\chi, \varphi_\chi)$, где φ_χ – эпиморфизм, индуцированный φ. Если k – локальное поле, то известная теорема Демушкина–Шафаревича

[3] При этом уже не требуется, чтобы $\varepsilon_m \in K^*$.

(см. [4, Гл. 3, §14, теорема 3.14.1]) утверждает, что для разрешимости задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с абелевым ядром необходима и достаточна разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач.

С каждой задачей погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ с условием $\ker\varphi \nleq \Phi(G)$ можно связать максимальную присоединенную задачу: именно, возьмем некоторую максимальную подгруппу H группы G, не содержащую ядра задачи погружения и рассмотрим задачу $(K/k,\, H,\, \varphi)$. Хорошо известно (см. [3, теорема 1]), что для ультраразрешимости задачи $(K/k,\, G,\, \varphi)$ необходима и достаточна ее разрешимость, а также неразрешимость всех максимальных присоединенных задач.

Пусть в расширении (1) фиксирована собственная подгруппа $F_1 < F$, а G_1 – ее полный прообраз в G относительно эпиморфизма φ. Расширение F_1 до G_1 с помощью $A = \ker\varphi$, полученное таким образом, называется сопутствующим расширением второго рода. Пусть теперь в расширении (1) фиксирована собственная подгруппа A_1 ядра A, нормальная в G. В таком случае эпиморфизм φ индуцирует эпиморфизм $\widehat{\varphi}\colon G/A_1 \to F$ с ядром A/A_1. Полученное расширение называется сопутствующим расширением первого рода. В дальнейшем под сопутствующим расширением мы будем понимать как сопутствующие расширения первого и второго родов, так и расширения, получающиеся как композиция: сначала переход к сопутствующему расширению второго рода, а потом переход от полученного расширения к сопутствующему расширению первого рода.

Расширение (1) будем называть *минимальным*, если (1) не является полупрямым, а все сопутствующие расширения полупрямые.

Расширение (1) будем называть *метациклическим*, если в (1) A и F являются циклическими группам.

Для задачи погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ над числовым полем k и простой точки $\mathfrak{p}$ поля k можно определить $\mathfrak{p}$-локализацию $(K \otimes_k k_\mathfrak{p}/k_\mathfrak{p},\, G,\, \varphi)$; при этом если L – решение исходной задачи, то алгебра Галуа $L \otimes_k k_\mathfrak{p}$ будет решением $\mathfrak{p}$-локальной задачи.

Пусть L_0/k – расширение Галуа полей с группой G_0. Пусть далее задан мономорфизм $i\colon G_0 \to G$. Группа G может быть представлена как объединение смежных классов по G_0: $G = \bigcup\limits_\rho \rho = \bigcup\limits_\rho G_0\overline{\rho}$, где $\overline{\rho}$ – представители смежных классов ρ в G (при этом мы считаем $\overline{\rho}_0 = 1$ для класса $\rho_0 = G_0$). Алгебра Галуа L с группой G и полем-ядром L_0

является прямой суммой полей $\bigoplus\limits_{\rho} L_0 E_{\overline{\rho}}$, где $E_{\overline{\rho}}$ – минимальные идемпотенты такие, что $\sum\limits_{\rho} E_{\overline{\rho}} = 1$. Определим действие автоморфизма $g \in G$ на L посредством формулы

$$\left(\sum_{\rho} X_{\overline{\rho}} E_{\overline{\rho}}\right)^g = \sum_{\rho} X_{\overline{\overline{\rho}}^{\rho g \overline{\rho g}^{-1}}} E_{\overline{\rho g}},$$

т.е. $E_{\overline{\rho}}^g = E_1^{\overline{\rho} g} = E_1^{\overline{\rho g}}$ (заметим, что $\overline{\rho}$ и $\overline{\rho g}$ лежат в одном и том же смежном классе, а потому $\overline{\rho} g \overline{\rho g}^{-1} \in G_0$). Мы построили алгебру Галуа L над k с группой G и полем-ядром L_0. Нетрудно видеть, что L является индуцированным G-модулем $\mathrm{ind}_{G_0}^G L_0$.

§2. О метациклических 2-расширениях

2.1. Начнем со следующего простого результата.

Лемма 1. *Пусть i – некоторое натуральное число. Пусть k – произвольное поле нулевой характеристики, такое, что для простого $p > 2$ выполнено $\varepsilon_{p^i} \in k$, но $\varepsilon_{p^{i+1}} \notin k$. Тогда для любого $n > i$ степень расширения $k(\varepsilon_{p^n})/k$ равна p^{n-i}. Аналогичный результат справедлив и для $p = 2$, если $i \geqslant 2$.*

Доказательство. Ясно,что расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$ имеет степень p^{n-i}. Заметим теперь, что $k \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n}) = \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. Именно, так как $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i}))$ – циклическая p-группа, то в случае $k \cap \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n}) \neq \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$ необходимо было бы $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^{i+1}}) \subseteq k$, что противоречит условию леммы. Таким образом, поля k и $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})$ линейно разделены над $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. Поэтому алгебра $k \otimes_{\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})} \mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})$ является полем, и расширение $k(\varepsilon_{p^n})/k$ имеет с точностью до изоморфизма ту же группу Галуа, что и расширение $\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^n})/\mathbb{Q}(\varepsilon_{p^i})$. $\square$

Рассмотрим случай, когда (1) – метациклическое 2-расширение. Установим критерий 2-локальной ультраразрешимости таких расширений.

Теорема 1. *Метациклическое 2-расширение (1) является 2-локально ультраразрешимым тогда и только тогда, когда оно неполупрямое и не является расширением кватернионного типа (кроме случая, когда порядок ядра расширения (1) либо 4, либо 8).*

Доказательство. В зависимости от действия факторгруппы $F = \langle b_0\rangle$ расширения (1) на ядре $A = \langle a\rangle$ рассмотрим несколько случаев. В силу [4, Гл. 1, §6, следствие 5] мы можем считать, что $|A| = 2^n$ для некоторого $n \geqslant 2$.

Случай 1. Пусть либо $a^{b_0} = a$, либо при $n \geqslant 3$ выполнено $a^{b_0} = a^{1+2^{2+j}}$ для некоторого $j \in [0,\, n-3] \cap \mathbb{N}$. Пусть сначала $a^{b_0} = a^{1+2^{2+j}}$. В этом случае положим $i = 2 + j$, при этом группа G в (1) задается копредставлением

$$G = \langle a,\, b \mid a^{2^n} = 1,\, b^{2^m} = a^{2^s},\, a^b = a^{1+2^i}\rangle. \tag{2}$$

Заметим, что $m \geqslant n - i$, а $s + i \geqslant n$. Кроме того, $n > s$. Покажем, что также и $m > s$.

Предположим, что $m \leqslant s$ и рассмотрим элемент $\widehat{b} = ba^{-2^{s-m}}$. Мы имеем

$$\widehat{b}^{2^m} = a^{2^s - 2^{s-m}(1+(1+2^i)+\ldots+(1+2^i)^{2^m-1})}.$$

Отметим, что $\nu_2(C^l_{2^m} 2^{i(l-1)}) = m + i(l-1) - \nu_2(l)$ для всех $l \in [1,\, 2^m] \cap \mathbb{N}$. Покажем, что при $l > 2$ выполнено $i(l-1) \geqslant \nu_2(l) + i$. Пусть $l = w2^r$, где $(w,\, 2) = 1$, тогда $\nu_2(l) = r$, а $i(l-1) \geqslant i(2^r - 1)$. Можно считать $r > 0$, так как при $r = 0$ проверяемое неравенство очевидно. Покажем, что при $r > 1$ выполнено неравенство[4]

$$2(2^r - 2) \geqslant r. \tag{3}$$

Рассмотрим функцию $x \mapsto 2^{1+x} - x - 4$. Нетрудно видеть, что при $x \geqslant 1$ данная функция монотонно возрастает и положительна при $x \geqslant 2$. Но тогда при $r > 1$ проверяемое неравенство (3) установлено.

Пусть теперь $r = 1$, а $l > 2$. В таком случае $i(l-1) \geqslant 2i$, а $\nu_2(l) + i = i + 1$. Поскольку $2i > i + 1$ для $i \geqslant 2$, то для всех $l > 2$ справедливость неравенства $i(l-1) \geqslant \nu_2(l) + i$ установлена. Но тогда имеем в силу $s + i \geqslant n$

$$\widehat{b}^{2^m} = a^{2^s - 2^{s-m}(2^m + 2^{m-1}(2^m-1)2^i)} = a^{-2^{s+i-1}(2^m-1)}. \tag{4}$$

Таким образом, если в (2) $m \leqslant s$, то расширение (1) не расщепляется лишь при $s = n - i$. Но тогда из-за $m \geqslant n - i$ и в предположении $m \leqslant s$ получаем, что и $m = n - i$. В таком случае рассмотрим элемент

[4]Тогда в силу $i \geqslant 2$ при $r > 1$ будет выполнено $i(l-1) \geqslant \nu_2(l) + i$.

$\widetilde{b} = ba^{-1}$ и вычислим в этом случае $\widetilde{b}^{2^m}$. Имеем[5]

$$\widetilde{b}^{2^m} = \widetilde{b}^{2^{n-i}} = a^{2^{n-i}-(2^{n-i}+2^{n-i-1}(2^{n-i}-1)2^i)} = a^{-2^{n-1}(2^{n-i}-1)}.$$

Заменим в (2) образующую a на $\widetilde{a} = a^{-(2^{n-i}-1)}$, тогда получим

$$G = \langle \widetilde{a}, \widetilde{b} \mid \widetilde{a}^{2^n} = 1, \widetilde{b}^{2^{n-i}} = \widetilde{a}^{2^{n-1}}, \widetilde{a}^{\widetilde{b}} = \widetilde{a}^{1+2^i} \rangle. \tag{5}$$

Поскольку $i \geqslant 2$, то, заменяя в (5) образующую $\widetilde{b}$ на $\widetilde{b}a^{-2^{n-1-(n-i)}} = \widetilde{b}a^{-2^{i-1}}$, получим расщепляемость расширения (1) с учетом проведенных вычислений.

Итак, в (2) мы можем считать $m > s$. Профакторизуем копредставление (2) по соотношению $a^{2^{s+1}} = 1$. Получим группу $\widetilde{G}$ с копредставлением

$$\widetilde{G} = \langle a, b \mid a^{2^{s+1}} = 1, b^{2^m} = a^{2^s}, a^b = a^{1+2^i} \rangle. \tag{6}$$

Определим эпиморфизм $\widetilde{\varphi}\colon \widetilde{G} \to F$ следующим образом: $\widetilde{\varphi}(a) = 1$, $\widetilde{\varphi}(b) = b_0$. В (6) либо $i = s+1$ (т.е. действие тривиально), либо $n \geqslant 3$, а $i \in [2, s] \cap \mathbb{N}$.

Построим некоторое специальное расширение 2-локальных полей K'/k' с группой F. Именно, пусть k' – 2-локальное поле, такое, что $\varepsilon_{2^i} \in k'$, но $\varepsilon_{2^{i+1}} \notin k'$. Рассмотрим расширение Галуа $k'(\varepsilon_{2^s})/k'$ с циклической группой порядка 2^{s-i} в силу[6] леммы 1. Задача погружения расширения $k'(\varepsilon_{2^s})/k'$ в поле с циклической группой порядка 2^{2+1-i} разрешима: годится[7], например, решение $k'(\varepsilon_{2^{s+1}})$. Согласно [4, Гл. 3, §1] все решения такой задачи имеют вид $k'(\sqrt{\varepsilon_{2^s} x})$, где x пробегает всю группу k'^*. Пусть t – остаток от деления числа $m-(s+1-i)$ на i. Отметим для дальнейшего, что $m-(s+1-i) \geqslant i$. Действительно, данное неравенство равносильно неравенству $m \geqslant s+1$, которое выполнено в силу $m > s$. Положим $K_1' = k'(\sqrt[2^{t+1}]{\varepsilon_{2^s} x})$. Ясно, что расширение K_1'/k' является расширением Галуа с циклической группой порядка $2^{s+1-i+t}$ (так как $t < i$, а $\varepsilon_{2^i} \in k'$; мы также учитываем лемму 1 и неравенство $i \geqslant 2$). Наша цель состоит в том, чтобы, двигаясь шагами от расширения K_1'/k', дойти до расширения K'/k' с группой F.

[5]Напомним, что при $l > 2$ выполнено $i(l-1) \geqslant \nu_2(l) + i$, а $\nu_2(C^l_{2^m} 2^{i(l-1)}) = m + i(l-1) - \nu_2(l)$ для всех $l \in [1, 2^m] \cap \mathbb{N}$.

[6]Ведь $\varepsilon_4 \in k'$.

[7]Опять-таки в силу леммы 1.

Рассмотрим первый шаг. Найдем условия погружения расширения K_1'/k' в поле с циклической группой порядка 2^{s+1+t}. Ядро такой задачи – циклическая группа порядка 2^i, причем такая задача является брауэровской, ибо $\varepsilon_{2^i} \in k'$. Условия погружения такой задачи хорошо известны и состоят в том, что элемент ε_{2^i} является нормой относительно расширения K_1'/k'. Таким образом, значение локального символа Артина $\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})$ должно определять тривиальный элемент группы Галуа расширения K_1'/k'. Иными словами, условие разрешимости таково

$$\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})(\sqrt[2^{t+1}]{\varepsilon_{2^s} x}) = \sqrt[2^{t+1}]{\varepsilon_{2^s} x}. \tag{7}$$

Ясно, что при $x = 1$ условие (7) выполнено: присоединяя к K_1' нужный корень из единицы, получаем решение задачи погружения. Это означает, что условие (7) эквивалентно условию

$$\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})(\sqrt[2^{t+1}]{x}) = \sqrt[2^{t+1}]{x}. \tag{8}$$

Поскольку $t+1 \leqslant i$, то условие (8) равносильно тривиальности символа Гильберта 2^{t+1}-й степени (ε_{2^i}, x). Ясно, что можно подобрать $x \in k'^*$ так, чтобы $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin K_1'$, причем $(\varepsilon_{2^i}, x) = 1$. В дальнейшем будем считать, что x с указанными свойствами выбран.

Все решения задачи погружения расширения K_1'/k' с поле с циклической группой порядка 2^{s+1+t} имеют согласно [4, Гл. 3, §1] вид $K_2' = K_1'(\sqrt[2^i]{yx_2})$, где y – некоторый вполне определенный элемент поля K_1', а x_2 пробегает группу k'^*. На втором шаге рассмотрим задачу погружения расширения K_2'/k' в поле с циклической группой и ядром порядка 2^i. Такая задача является брауэровской, условия разрешимости которой состоят в том, что элемент ε_{2^i} представим в виде нормы относительно расширения K_2'/k'. Т.е. символ Артина $\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})$ должен тривиально действовать на поле K_2'. Но в силу выбора поля K_1' (а точнее, элемента $x_1 = x$) это равносильно условию

$$\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})(\sqrt[2^i]{yx_2}) = \sqrt[2^i]{yx_2}. \tag{9}$$

Символ $\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})$ действует на $\sqrt[2^i]{y}$ как умножение на корень из единицы степени 2^i (возможно, что не примитивный): ведь символ $\theta_{k'}(\varepsilon_{2^i})$ неподвижно действует на поле K_1'. Покажем, что надлежащим выбором элемента $x_2 \in k'^*$ мы можем получить[8] $(\varepsilon_{2^i}, x_2) = \varepsilon_{2^i}$. В этом случае нетрудно добиться выполнения условия (9). Выясним, какие значения

[8] Здесь (ε_{2^i}, x_2) – символ Гильберта 2^i-й степени.

может принимать выражение $(\varepsilon_{2^i},\, x_2)^{2^{i-1}}$. Имеем (в силу билинейности символа Гильберта)

$$(\varepsilon_{2^i},\, x_2)^{2^{i-1}} = (\varepsilon_{2^i}^{2^{i-1}},\, x_2) = (-1,\, x_2). \tag{10}$$

Если символ $(\varepsilon_{2^i},\, x_2)$ ни при каких значениях x_2 не равен ε_{2^i}, то из (10) получаем $(-1,\, x_2) \equiv 1$. Но тогда элемент -1 является 2^i-й степенью некоторого элемента поля k'; получаем противоречие с условием $\varepsilon_{2^{i+1}} \notin k'$.

Итак, элемент $x_2 \in k'^*$, удовлетворяющий условию (9), существует. Тем самым, определено поле K_2'. Рассуждая аналогичным образом, построим поле K_3', решающее задачу погружения расширения K_2'/k' в поле с циклической группой и ядром порядка 2^i. И так далее. На каждом шаге условиями погружения будут условия вида (9), которым легко удовлетворить подходящим выбором элемента x_j. Как уже отмечалось, $m-(s+1-i) \geqslant i$, а потому хотя бы один из рассмотренных шагов будет сделан.

Поскольку число $m-(s+1-i)-t$ нацело делится на i, то некоторое поле K_r' дает над k' расширение Галуа с группой F. Ясно, что $K_r' = K_{r-1}'(\sqrt[2^i]{y_{r-1}x_r})$, где y_{r-1} – некоторый вполне определенный элемент поля K_{r-1}', а x_r пробегает группу k'^*. Подберем x_r так, чтобы элемент -1 не представлялся в виде нормы относительно расширения K_r'/k'. Символ Артина $\theta_{k'}(-1)$ тривиально действует на K_{r-1}' по построению поля K_{r-1}'. Таким образом, мы должны указать такой $x_r \in k'^*$, чтобы было выполнено условие

$$\theta_{k'}(-1)(\sqrt[2^i]{y_{r-1}x_r}) \neq \sqrt[2^i]{y_{r-1}x_r}. \tag{11}$$

Ясно, что символ $\theta_{k'}(-1)$ действует на $\sqrt[2^i]{y_{r-1}}$ как умножение на корень 2-й степени из единицы (возможно, не примитивный): ведь символ $\theta_{k'}(-1)$ неподвижно действует на поле K_{r-1}'. Таким образом, вопрос об условии (11) сводится к тому, что символ Гильберта 2^i-й степени $(-1,\, x_r)$ нетривиален как функция от x_r. Но если $(-1,\, x_r) \equiv 1$, то получаем противоречие с условием $\varepsilon_{2^{i+1}} \notin k'$. Итак, существует элемент $x_r \in k'^*$, удовлетворяющий условию (11). Возьмем в качестве K' поле K_r' для такого x_r. При этом по построению $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin K'$.

Пусть теперь $i = s+1$ (т.е. b действует на a в (6) тривиально), причем дополнительно $s \geqslant 2$. Возьмем в качестве k' 2-локальное поле с условием $\varepsilon_{2^s} \in k'$, но $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin k'$. Дальнейшее построение расширения K'/k' проводится аналогично случаю $i < s+1$, только шаги делаем как при $i = s$ (т.е. каждый раз решаем задачу погружения с циклическим ядром порядка 2^s); $K_1' = k'(\sqrt[2^{t+1}]{\varepsilon_{2^s} x})$, где t – остаток от деления числа $m-1$ на s. Получаем в конце поле $K_r' = K_{r-1}'(\sqrt[2^s]{y_{r-1}x_r})$, где y_{r-1} – некоторый вполне определенный элемент поля K_{r-1}', а x_r пробегает группу k'^*. Выберем x_r так, чтобы при $i = s$ выполнялось условие (11). Возьмем в качестве K' поле K_r' для такого x_r. При этом по построению $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin K'$.

Пусть, наконец, $i = s+1$, а $s = 1$. В этом случае в качестве k возьмем 2-локальное поле, такое, что $\varepsilon_4 \notin k$, а также $\sqrt{2} \notin k$, причем дополнительно $\varepsilon_4 \notin k(\sqrt{2})$. Поскольку для символа Гильберта 2-й степени имеем равенство $(2, -1) = 1$, то квадратичное расширение $k(\sqrt{2})/k$ погружается в поле с группой F: достаточно показать разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач (см. [4, Гл. 4, §1, следствие]), а поскольку $\varepsilon_4 \notin k(\sqrt{2})$, то достаточно показать возможность погружения в поле с циклической группой порядка 4, что гарантируется условием $(2, -1) = 1$. Погрузим расширение $k(\sqrt{2})/k$ в поле K_1, имеющее над k циклическую группу Галуа порядка 2^{m-1} (ясно, что в рассматриваемом случае непременно должно быть $m > 1$). Поле K_1 можно выбрать так, чтобы расширение K_1/k погружалось в поле с циклической группой порядка 2^m над k. Все решения такой брауэровской задачи имеют, согласно [4, Гл. 3, §1], вид $K_x = K_1(\sqrt{yx})$, где y – некоторый вполне определенный элемент группы K_1^*, а x пробегает группу k^*. Выберем x так, чтобы $-1 \notin N_{K_x/k}(K_x^*)$ – это возможно, ибо символ Гильберта 2-й степени $(x, -1)$ над k нетривиален как функция от x.

Нетрудно видеть, что задача $(K'/k', G, \varphi)$ разрешима. В самом деле, так как k' – локальное поле, то достаточно показать разрешимость всех элементарных сопутствующих брауэровских задач, полученных факторизацией по ядрам F-операторных характеров (см. [4, Гл. 3, §14, теорема 3.14.1]). Но по построению $\varepsilon_{2^{s+1}} \notin K'$, поэтому заведомо факторизовать нужно по ядрам таких характеров $\chi \in \operatorname{Hom}(A, K'^*)$, которые принимают значения в группе $\langle \varepsilon_{2^s} \rangle$. Ядра таких характеров заведомо содержат подгруппу $\langle a^{2^s} \rangle$. Но тогда добавление к копредставлению (6) (ведь в (6) $s < m$) соотношения $a^{2^s} = 1$ делает любую из элементарных сопутствующих брауэровских задач к $(K'/k', G, \varphi)$ полупрямой.

Покажем, что уже задача $(K'/k', \widetilde{G}, \widetilde{\varphi})$, где $\widetilde{G}$ – группа из копредставления (6), ультраразрешима. Поскольку эта задача получается из

$(K'/k', G, \varphi)$ факторизацией по подгруппе $\langle a^{2^{s+1}} \rangle$, то она разрешима. Выясним, каково строение максимальных подгрупп группы $\widetilde{G}$, не содержащих $\ker \widetilde{\varphi}$. Любая такая максимальная подгруппа H_j порождается элементами a^2 и ba^j, где j – целое неотрицательное число, причем при $j > 0$ выполнено равенство $(j, 2) = 1$. Вычислим[9] элемент $(ba^j)^{2^m}$. Имеем

$$(ba^j)^{2^m} = b^2 a^{j(1+(1+2^i))}(ba^j)^{2^m-2} = \ldots$$
$$= b^{2^m} a^{j(1+(1+2^i)+\ldots+(1+2^i)^{2^m-1})} = a^{2^s+j(1+(1+2^i)+\ldots+(1+2^i)^{2^m-1})}.$$

Вновь отметим, что $\nu_2(C^l_{2^m} 2^{i(l-1)}) = m + i(l-1) - \nu_2(l)$ для всех $l \in [1, 2^m] \cap \mathbb{N}$. Покажем, что при $l > 1$ выполнено равенство $i(l-1) \geqslant \nu_2(l)$. Пусть $l = w2^r$, где $(w, 2) = 1$, тогда $\nu_2(l) = r$, а $i(l-1) \geqslant i(2^r - 1)$. Можно считать $r > 0$, так как при $r = 0$ проверяемое неравенство очевидно. Таким образом, достаточно установить неравенство[10]

$$2(2^r - 1) \geqslant r. \tag{12}$$

Рассмотрим функцию $x \mapsto 2^{1+x} - x - 2$. Нетрудно видеть, что при $x \geqslant 1$ данная функция монотонно возрастает и положительна. Но тогда при $r \geqslant 1$ проверяемое неравенство (12) установлено.

Таким образом, получаем

$$H_j = \langle d, \varkappa \mid d^{2^s} = 1, \varkappa^{2^m} = d^{2^{s-1}}, d^{\varkappa} = d^{1+2^i} \rangle, \tag{13}$$

где, конечно, $\varkappa = ba^j$, а $d = a^2$.

По построению расширения K'/k' выполнено условие $-1 \notin N_{K'/k'}(K'^*)$, что влечет неразрешимость присоединенной задачи $(K'/k', H_j, \widetilde{\varphi})$: ведь такая задача является брауэровской, а потому d можно отождествить с ε_{2^s}. Таким образом, задача $(K'/k', \widetilde{G}, \widetilde{\varphi})$ разрешима, а все ее максимальные присоединенные задачи неразрешимы. Но тогда в силу [3, теорема 1] задача $(K'/k', \widetilde{G}, \widetilde{\varphi})$ ультраразрешима.

Поскольку решения L' задачи $(K'/k', G, \varphi)$ получаются из решений задачи $(\widetilde{L}/k', G, \varphi_0)$, где $\varphi_0 \colon G \to \widetilde{G}$ – естественный эпиморфизм, причем $\varphi = \widetilde{\varphi}\varphi_0$, а $\widetilde{L}$ – некоторое решение задачи $(K'/k', \widetilde{G}, \widetilde{\varphi})$, то из-за ультраразрешимости $(K'/k', \widetilde{G}, \widetilde{\varphi})$ и из-за включения $\ker \varphi_0 \leqslant \Phi(G)$ получаем: L' – поле. В частности, задача $(K'/k', G, \varphi)$ ультраразрешима.

---

[9]При $i < s + 1$.

[10]Снова вспомним, что $i \geqslant 2$ при $i < s + 1$.

Случай 2. Пусть при $n \geqslant 3$ выполнено $a^{b_0} = a^{-(1+2^{2+j})}$ для некоторого $j \in [0, n-3] \cap \mathbb{N}$. В этом случае группа G из расширения (1) задается копредставлением

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1, b^{2^m} = a^{2^s}, a^b = a^{-(1+2^{2+j})}\rangle; \tag{14}$$

в копредставлении (14) $s = n-1$, ибо $a^{2^s} = a^{-2^s(1+2^{2+j})}$, а тогда $s+1 \geqslant n$. Также заведомо выполняется неравенство $m \geqslant n-j-2$. Покажем, что в (14) $m \geqslant n-j-1$. Действительно, вновь рассмотрим для некоторого $r \geqslant 0$ элемент $\widehat{b} = ba^{2^r}$. Имеем (для краткости положим $i = 2+j$)

$$(ba^{2^r})^{2^m} = b^2 a^{2^r(1-(1+2^i))}(ba^{2^r})^{2^m-2} = \ldots$$
$$= a^{2^{n-1}+2^r(1-(1+2^i)+(1+2^i)^2-(1+2^i)^3+\ldots-(1+2^i)^{2^m-3}+(1+2^i)^{2^m-2}-(1+2^i)^{2^m-1})}$$
$$= a^{2^{n-1}-2^{r-1}((1+2^i)^{2^m}-1)(1+2^{i-1})^{-1}}.$$

Заметим, что при $r > 0$ элемент $(ba^{2^r})^{2^m}$ отличен от 1 для любого $m \geqslant n-j-2$, ибо в противном случае должно выполняться равенство $m+2+j-1+r = n-1$, что противоречит неравенству $m \geqslant n-j-2$. В случае $r = 0$ и $m = n-j-2$ имеем

$$2^{n-1} - 2^{-1}((1+2^{2+j})^{2^m}-1)(1+2^{1+j})^{-1} \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2^n),$$

что проверяется непосредственно.

Таким образом, мы показали, что в (14) $s = n-1$, а $m \geqslant n-j-1$. При любых таких параметрах соответствующее расширение (1) неполупрямое.

Пусть сначала $n > 3+j$. В этом случае обозначим через k 2-локальное поле, для которого выполнены следующие условия

$$\varepsilon_4 \notin k, \ (\varepsilon_{2^{3+j}} + \varepsilon_{2^{3+j}}^{-1})\varepsilon_4 \in k, \ (\varepsilon_{2^{3+j}} - \varepsilon_{2^{3+j}}^{-1}) \in k, \ \varepsilon_{2^{4+j}} \notin k(\varepsilon_4). \tag{15}$$

Несложно видеть, что поле k с указанными свойствами (15) существует. В самом деле, рассмотрим расширение Галуа $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$ и возьмем в качестве k неподвижное поле относительно автоморфизма $\varepsilon_{2^{n-1}} \mapsto \varepsilon_{2^{n-1}}^{-(1+2^{2+j})}$ расширения $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$.

В таком случае поле $k_1 = k(\varepsilon_4)$ содержит элемент $\varepsilon_{2^{3+j}}$, но не содержит $\varepsilon_{2^{4+j}}$. В частности, $\varepsilon_{2^n} \notin k_1$. Из условий (15) вытекает, что $\varepsilon_8 + \varepsilon_8^{-1} = \sqrt{2} \in k$. В частности, размерность $(k : \mathbb{Q}_2)$ четна. Рассмотрим поле $K_0 = k(\varepsilon_{2^{n-1}})$; ясно, что K_0/k – циклическое расширение

Галуа степени 2^{n-3-j}; это вытекает из леммы 1, примененной к полю $k(\varepsilon_4)$.

Будем погружать расширение K_0/k в поле K с циклической группой порядка 2^m над k, причем таким образом, что $\varepsilon_{2^n} \notin K$. Сначала погрузим расширение K_0/k в поле с циклической группой порядка 2^{n-j-2} над k. Такая задача разрешима (годится, например, решение $K_0(\varepsilon_{2^n})$). Все решения такой задачи имеют, согласно [4, Гл. 3, §1], вид $K_1 = K_0(\sqrt{\varepsilon_{2^{n-1}} x_1})$ для некоторого $x_1 \in k^*$. Мы будем двигаться шагами (каждый раз решая брауэровскую задачу погружения с ядром порядка 2) от поля K_1 к полю K_t, причем K_t/k – циклическое расширение Галуа порядка 2^m. Рассмотрим процесс построения поля K_2. Задача погружения расширения K_1/k в поле с циклической группой и ядром порядка 2 является брауэровской. Выберем x_1 так, чтобы данная задача была разрешима. Условием разрешимости такой задачи является представимость -1 в виде нормы относительно расширения K_1/k, т.е. тривиальность действия символа Артина $\theta_k(-1)$ на поле K_1. Но на элементе ε_{2^n} символ $\theta_k(-1)$ действует тривиально, ибо при $x_1 = 1$ можно положить $K_0(\varepsilon_{2^{n+1}})$ в качестве решения рассматриваемой задачи погружения. Таким образом, условием разрешимости будет

$$\theta_k(-1)(\sqrt{x_1}) = \sqrt{x_1},$$

что равносильно тривиальности символа Гильберта 2-й степени $(-1, x_1)$ над k. Ясно, что искомый x_1 существует и может быть выбран из множества $k^* \setminus k^{*2}$. В этом случае $\varepsilon_{2^n} \notin K_1$, и существует вполне определенный элемент $y_1 \in K_1^*$, такой, что $K_2 = K_1(\sqrt{y_1 x_2})$ для некоторого $x_2 \in k^*$. Согласно [4, Гл. 3, §1] так устроены все решения. Выберем теперь x_2 так, чтобы задача погружения расширения K_3/k в поле с циклической группой и ядром порядка 2 была разрешима. Поскольку по построению $\theta_k(-1)$ тривиально действует на K_1, то условием разрешимости указанной задачи будет

$$\theta_k(-1)(\sqrt{y_1 x_2}) = \sqrt{y_1 x_2}. \tag{16}$$

Если $\theta_k(\sqrt{y_1}) = \sqrt{y_1}$, то можно положить $x_2 = 1$. Если же $\theta_k(\sqrt{y_1}) \neq \sqrt{y_1}$, то из-за тривиальности (по построению) действия $\theta_k(-1)$ на K_1 непременно будет $\theta_k(-1)(\sqrt{y_1}) = -\sqrt{y_1}$. Таким образом, для выполнения условия (16) в этом случае необходимо и достаточно существование такого $x_2 \in k^*$, что для символа Гильберта (над k) 2-й степени имеем равенство $(-1, x_2) = -1$. Такой x_2 существует, ибо $\varepsilon_4 \notin k$ в силу условия (15). В таком случае существует вполне определенный элемент $y_2 \in K_2^*$, такой, что $K_3 = K_2(\sqrt{y_2 x_3})$ для некоторого $x_3 \in k^*$.

Действуя таким образом, мы построим поле $K_t = K_{t-1}(\sqrt{y_{t-1}x_t})$, где $y_{t-1} \in K_{t-1}^*$ – некоторый вполне определенный элемент, а $x_t \in k^*$ может быть выбран произвольным образом. Выберем x_t так, чтобы расширение K_t/k не погружалось ни в какое циклическое 2-расширение большего порядка. Указанное условие равносильно (в силу тривиальности действия $\theta_k(-1)$ на K_{t-1} по построению) условию

$$\theta_k(-1)(\sqrt{y_{t-1}x_t}) \neq \sqrt{y_{t-1}x_t}. \tag{17}$$

Нетрудно добиться выполнения условия (17) из-за того, что $\varepsilon_4 \notin k$: в самом деле, если $\theta_k(-1)(\sqrt{y_{t-1}}) \neq \sqrt{y_{t-1}}$, то положим $x_t = 1$; если же $\theta_k(-1)\ (\sqrt{y_{t-1}}) = \sqrt{y_{t-1}}$, то выберем x_t с условием $\theta_k(-1)(\sqrt{x_t}) = -\sqrt{x_t}$.

Итак, мы построили расширение K_t/k с циклической группой порядка 2^m. При этом действие порождающего элемента b_0 группы $\mathrm{Gal}(K_t/k)$ на $\varepsilon_{2^{n-1}}$ согласовано с действием $a^b = a^{-(1+2^{2+j})}$ в копредставлении (14). Рассмотрим задачу погружения $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$, где G задана копредставлением (14) с параметрами $s = n-1$, $m \geqslant n-j-1$, $n > 3+j$, а $\varphi(a) = 1$, $\varphi(b) = b_0$. По построению задача $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$ не является брауэровской, ибо $\varepsilon_{2^n} \notin K_t$. Поэтому такая задача разрешима: все элементарные сопутствующие брауэровские задачи, отвечающие $\langle b_0\rangle$-операторным характерам ядра, полупрямые, а потому разрешимость рассматриваемой задачи вытекает из [4, Гл. 4, §1, следствие]. Покажем ультраразрешимость задачи $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$. Для этого рассмотрим произвольную максимальную подгруппу $H_l = \langle a^2,\, ba^l\rangle$ группы G, не содержащую a. Ясно, что при этом либо $l = 0$, либо $(2,\, l) = 1$ при $l > 0$. Согласно [3, теорема 1] достаточно показать неразрешимость всех задач $(K_t/k,\, H_l,\, \varphi)$. По построению расширения K_t/k все такие задачи являются брауэровскими. Вычислим элемент $(ba^l)^{2^m}$. Имеем (аналогичного рода вычисление уже проводилось) $(ba^l)^{2^m} = a^{2^{n-1}}$ для любого рассматриваемого l. Таким образом, H_l может быть задана копредставлением

$$H_l = \langle d,\, \varkappa \mid d^{2^{n-1}},\, \varkappa^{2^m} = d^{2^{n-2}},\, d^{\varkappa} = d^{-(1+2^{2+j})}\rangle, \tag{18}$$

где, разумеется, $d = a^2$, а $\varkappa = ba^l$.

Покажем, что задача $(K_t/k,\, H_l,\, \varphi)$ неразрешима. Как уже отмечалось, это брауэровская задача, а потому условием ее разрешимости является представимость -1 в виде нормы относительно расширения K_t/k, что вытекает из (18). Однако, по построению расширения K_t/k выполнено $-1 \notin N_{K_t/k}(K_t^*)$.

Пусть теперь $n = 3 + j$. В этом случае в качестве k возьмем 2-локальное поле с условиями

$$\begin{gathered}\varepsilon_4 \notin k,\ (\varepsilon_{2^{2+j}} + \varepsilon_{2^{2+j}}^{-1}) \in k,\ (\varepsilon_{2^{2+j}} - \varepsilon_{2^{2+j}}^{-1})\varepsilon_4 \in k; \\ \varepsilon_{2^{3+j}} \notin k(\varepsilon_4),\ (k : \mathbb{Q}_2) \equiv 0(\operatorname{mod} 2).\end{gathered} \tag{19}$$

Несложно видеть, что поле k с указанными свойствами (19) существует. В самом деле, рассмотрим расширение Галуа $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$ и возьмем в качестве k неподвижное поле относительно автоморфизма $\varepsilon_{2^{n-1}} \mapsto \varepsilon_{2^{n-1}}^{-1}$ расширения $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$. Если $j > 0$, то $\sqrt{2} \in k$, т.е. $(k : \mathbb{Q}_2) \equiv 0(\operatorname{mod} 2)$. Если же $j = 0$, то вместо k рассмотрим поле $k(\varepsilon_5)$.

Дальнейшее построение расширения K_t/k с циклической группой порядка 2^m и порождающим элементом b_0 проводится так же, как и в случае $n > 3 + j$. Мы используем четность $(k : \mathbb{Q}_2)$, чтобы гарантировать тривиальность символа Гильберта 2-й степени $(-1, -1)$ над k – это обеспечивает возможность выбрать поле K_1 и все последующие. При этом b_0 действует на $\varepsilon_{2^{n-1}}$ согласованно с действием $a^b = a^{-(1+2^{2+j})}$ в копредставлении (14), кроме того, $\varepsilon_{2^n} \notin K_t$, что вытекает из условий (19). В таком случае задача погружения $(K_t/k, G, \varphi)$ разрешима (по тем же причинам, что и при $n > 3 + j$; разумеется, $\varphi(a) = 1$, а $\varphi(b) = b_0$). Пусть $H_l = \langle a^2, ba^l\rangle$ – произвольная максимальная подгруппа группы G, не содержащая a. В таком случае либо $l = 0$, либо при $l > 0$ выполнено $(2, l) = 1$. Заметим, что H_l может быть задана копредставлением[11]

$$H_l = \langle d, \varkappa \mid d^{2^{n-1}} = 1,\ \varkappa^{2^m} = d^{2^{n-2}},\ d^{\varkappa} = d^{-1}\rangle, \tag{20}$$

где $d = a^2$, $\varkappa = ba^l$. При этом из условия $m \geqslant n - j - 1$ вытекает, что $m \geqslant 2$. Расширение K_t/k было построено так, что $-1 \notin N_{K_t/k}(K_t^*)$, а потому для всех l брауэровская задача $(K_t/k, H_l, \varphi)$ неразрешима. Таким образом, задача $(K_t/k, G, \varphi)$ ультраразрешима.

Случай 3. Пусть группа G расширения (1) при $n \geqslant 2$ задается копредставлением

$$G = \langle a, b \mid a^{2^n} = 1,\ b^{2^m} = a^{2^{n-1}},\ a^b = a^{-1}\rangle. \tag{21}$$

[11] В силу того, что $n = 3 + j$.

Рассмотрим при $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ в качестве k 2-локальное поле, удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered}\varepsilon_4 \notin k,\ (\varepsilon_{2^{n-1}} + \varepsilon_{2^{n-1}}^{-1}) \in k,\ (\varepsilon_{2^{n-1}} - \varepsilon_{2^{n-1}}^{-1})\varepsilon_4 \in k; \\ \varepsilon_{2^n} \notin k(\varepsilon_4),\ (k : \mathbb{Q}_2) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2).\end{gathered} \tag{22}$$

Несложно видеть, что поле k с указанными свойствами (22) существует. В самом деле, рассмотрим расширение Галуа $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$ и возьмем в качестве k неподвижное поле относительно автоморфизма $\varepsilon_{2^{n-1}} \mapsto \varepsilon_{2^{n-1}}^{-1}$ расширения $\mathbb{Q}_2(\varepsilon_{2^{n-1}})/\mathbb{Q}_2$. При $n > 3$ получаем, что $\sqrt{2} \in k$, т.е. $(k : \mathbb{Q}_2) \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$. При $n = 3$ рассмотрим вместо k поле $k(\varepsilon_5)$.

Если же $n = 2$, то в качестве k возьмем произвольное 2-локальное поле, не содержащее ε_4. Наконец, при $n = 3$ и $m = 1$ в качестве k возьмем произвольное 2-локальное поле с условием $(k : \mathbb{Q}_2) \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$.

Вновь проведем построение расширения K_t/k с циклической группой порядка 2^m так же, как и в случае 2. Это возможно потому, что при $n \geqslant 3$ и $m \geqslant 2$ степень $(k : \mathbb{Q}_2)$ четна, что гарантируется условиями (22); при этом символ Гильберта 2-й степени $(-1, -1)$ над k тривиален; это обеспечивает возможность выбрать поле K_1 и все последующие, наконец, условие $m \geqslant 2$ дает возможность выбрать элемент $x_t \in k^*$ (который вместе с элементом $y_{t-1} \in K_{t-1}^*$ определяет поле $K_t = K_{t-1}(\sqrt{y_{t-1}x_t})$) с нужным нам свойством $-1 \notin N_{K_t/k}(K_t^*)$; – при $m = 1$ имеем $K_t = k(\varepsilon_4)$, что в случае $n > 3$ делало бы невозможным одновременно выбрать x_t подходящим образом и обеспечить условия (22); в случае $m = 1$ и $n = 3$ поле $k(\varepsilon_4)$ годится, так как для символа Гильберта (над k) 2-й степени имеем $(-1, -1) = -1$, поскольку $(k : \mathbb{Q}_2) \not\equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$ в этом случае. При $n = 2$ построение проводится так же, как и в случае 2 – условие $m \geqslant 2$ в данном случае не важно́: достаточно просто обеспечить условие $\varepsilon_4 \notin K_1$, а отсутствие ε_4 в k дает возможность найти элемент $x \in k \setminus \{-1\}$, для которого символ Гильберта (над k) 2-й степени $(x, -1)$ как нетривиален, так и тривиален. Например, при $m \geqslant 2$ и $k = \mathbb{Q}_2$ годится $K_1 = k(\sqrt{2})$, ибо для символа Гильберта 2-й степени (над k) имеем $(2, -1) = 1$, а потому дальнейшее погружение возможно; при $m = 1$ и $k = \mathbb{Q}_2$ годится $K_1 = k(\sqrt{3})$, ибо для символа Гильберта 2-й степени (над k) имеем $(3, -1) = -1$, а потому дальнейшее погружение невозможно.

Порождающий элемент b_0 группы Галуа расширения K_t/k действует на $\varepsilon_{2^{n-1}}$ согласованно с действием $a^b = a^{-1}$ в копредставлении (21).

При этом $\varepsilon_{2^n} \notin K_t$, что вытекает из условий (22) и специального выбора поля k в случае $n = 2$ и $n = 3$, $m = 1$. Поэтому задача (где $\varphi(a) = 1$, а $\varphi(b) = b_0$) $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$ не является брауэровской, а потому разрешима: все элементарные сопутствующие брауэровские задачи, отвечающие $\langle b_0\rangle$-операторным характерам ядра, полупрямые, а тогда разрешимость рассматриваемой задачи вытекает из [4, Гл. 4, §1, следствие]. Возьмем произвольную максимальную подгруппу $H_r = \langle a^2,\, ba^r\rangle$ группы G, не содержащую a; при этом либо $r = 0$, либо при $r > 0$ выполнено $(2,\, r) = 1$. Группа H_r задается копредставлением

$$H_r = \langle d,\, \varkappa \mid d^{2^{n-1}} = 1,\, \varkappa^{2^m} = d^{2^{n-2}},\, d^{\varkappa} = d^{-1}\rangle, \tag{23}$$

где $d = a^2$, $\varkappa = ba^r$, что проверяется непосредственно. Рассмотрим брауэровскую задачу $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$. Ее условия разрешимости состоят (как это вытекает из (23)) в представимости -1 в виде нормы относительно расширения K_t/k. Однако, расширение K_t/k было построено таким образом, что $-1 \notin N_{K_t/k}(K_t^*)$. Итак, задача $(K_t/k,\, G,\, \varphi)$ ультраразрешима.

Остается еще раз отметить, что если в копредставлении (21) $m=2$ и $n>3$, то невозможно построить ультраразрешимую задачу $(K/k, G, \varphi)$ ни для какого расширения Галуа K/k 2-локальных полей (см. [10, теорема 1, лемма 1] и [10, замечание 3]). $\square$

§3. О редукции к сопутствующим задачам

3.1. Следующее предложение, анонсированное А. В. Яковлевым, существенно усиливает результат [9, предложение 1].

Предложение 1 (А. В. Яковлев). *Пусть $\widetilde{k}$ – числовое поле, $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$ – его некоторые различные простые точки. Пусть для каждого $i \in [1,\, m] \cap \mathbb{N}$ конечная группа G реализована как группа Галуа $\widetilde{k}_{\mathfrak{q}_i}$-алгебр Галуа A_i. Тогда существует числовое поле k, содержащее $\widetilde{k}$, простые точки $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ поля k и расширение Галуа K/k с группой G со свойствами: для всех $i \in [1,\, m] \cap \mathbb{N}$ точка $\mathfrak{p}_i$ лежит над $\mathfrak{q}_i$, $\widetilde{k}_{\mathfrak{q}_i} = k_{\mathfrak{p}_i}$ а также $A_i \cong K \otimes_k k_{\mathfrak{p}_i}$.*

Предложение 1 может быть применено к редукции вопроса об ультраразрешимости расширения (1) к локальной ультраразрешимости некоторого сопутствующего расширения второго рода.

Теорема 2. *Пусть некоторое сопутствующее расширение второго рода к расширению* (1) *является локально ультраразрешимым. Тогда расширение* (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. Итак, пусть имеется некоторая подгруппа F_1 группы F, такая, что сопутствующее расширение второго рода к расширению (1)

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow G_1 \xrightarrow{\varphi} F_1 \longrightarrow 1, \tag{24}$$

где $G_1 = \varphi^{-1}(F_1)$, является локально ультраразрешимым. В таком случае существует расширение Галуа локальных полей K_1/k_1 с группой F_1, такое, что задача $(K_1/k_1, G_1, \varphi)$ является ультраразрешимой. Пусть L_1 – некоторое ее решение. Применим предложение 1 с $m = 1$, числовым полем $\widetilde{k}$, таким, что $\widetilde{k}_{\mathfrak{q}_1} = k_1$, (здесь $\mathfrak{q}_1$ – некоторая простая точка поля $\widetilde{k}$) и k_1-алгеброй Галуа $A_1 = \mathrm{ind}_{G_1}^{G} L_1$ с группой G. Найдется числовое поле k, содержащее $\widetilde{k}$, и расширение Галуа L/k с группой G, причем $A_1 \cong L \otimes_k k_1$. Положив $K = L^G$, получим ультраразрешимую задачу $(K/k, G, \varphi)$: она разрешима по построению, а ультраразрешимость получается из-за того, что $\mathfrak{q}_1$-локализация сопутствующей задачи погружения второго рода $(K/K^{F_1}, G_1, \varphi)$ совпадает с ультраразрешимой задачей $(K_1/k_1, G_1, \varphi_1)$. □

Замечание 1. Отметим, что в теореме 2 ядро A расширения (1) совершенно произвольно. Ряд результатов Б. Б. Лурье (см. [4, Гл. 4, §2]) а также работа В. В. Ишханова и Б. Б. Лурье [11] о равносильности задач погружения для p-расширений над p-локальными полями и их абелевых сопутствующих задач погружения первого рода, полученных факторизацией по коммутанту ядра, показывают *глубокие* возможности для применения теоремы 2.

§4. Ультраразрешимые 2-расширения с циклическим ядром

4.1. Сформулируем важные для дальнейшего

Условия 1. Пусть (1) – минимальное 2-расширение с циклическим ядром порядка 2^n для $n \geqslant 3$ с порождающим элементом a. Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, A$ в этом случае порождается элементами σ, τ, причем

$$a^\sigma = a^5,\ a^\tau = a^{-1}.$$

Пусть либо A является тривиальным F-модулем, либо действие F на A определяется гомоморфизмом $\gamma\colon F \to \operatorname{Aut} A$, образ которого является подгруппой в группе $\langle\sigma\rangle$.

Редукционный результат теоремы 2, теорема 1 а также [8, Theorem 3] позволяют установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть* (1) – 2*-расширение с циклическим ядром, определяемое классом* $h \in H^2(F, A)$. *Пусть существует подгруппа* F_1 *группы* F, *удовлетворяющая одному из следующих условий:*

(1) *либо* F_1 *циклическая, а ограничение* $h_1 \in H^2(F_1, A)$ *класса* h *не расщепляется и не является* (*кроме случаев* $|A| \in \{4, 8\}$) *обобщенно-кватернионным;*

(2) *либо ограничение* $h_1 \in H^2(F_1, A)$ *класса* h *определяет минимальное расширение, причем* F_1*-модульное действие на* A *определяется условиями* 1.

Тогда расширение (1) *ультраразрешимо.*

Доказательство. Если выполнено условие (1) на подгруппу F_1, то результат немедленно получается применением теоремы 1, устанавливающей 2-локальную ультраразрешимость расширения с классом h_1, и последующим применением редукционного результата теоремы 2.

Пусть выполнено условие (2) на подгруппу F_1. В таком случае из доказательства результата [8, Theorem 3] вытекает помимо прочего 2-локальная ультраразрешимость расширения с классом h_1, а потому вновь можно применить редукционную теорему 2. $\square$

Список литературы

1. В. В. Ишханов, *О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., **40**, No. 1 (1976), 3–25.
2. А. В. Яковлев, *Задача погружения полей.* — Изв. АН СССР. Сер. мат., **28**, No. 3 (1964), 645–660.
3. Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье, *Ультраразрешимость и сингулярность в проблеме погружения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **414** (2013), 113–126.
4. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Наука, М., 1990.
5. Д. Д. Киселев, *Примеры задач погружения, у которых решения только поля.* — УМН, **68**, No. 4 (2013), 181–182.
6. Д. Д. Киселев, *Об ультраразрешимости групповых p-расширений абелевой группы с помощью циклического ядра.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 108–131.

7. Д. Д. Киселев, И. А. Чубаров, *Об ультраразрешимости некоторых классов минимальных неполупрямых p-расширений с циклическим ядром для $p > 2$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 132–157.
8. D. D. Kiselev, *Minimal p-extensions and the embedding problem.* — Communications in Algebra, (2017), doi:http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2017.1324869 10.1080/00927872.2017.1324869.
9. А. В. Яковлев, *Об ультраразрешимых задачах погружения для числовых полей.* — Алгебра и анализ, **27**, No. 6 (2015), 260–263.
10. Д. Д. Киселев, *Ультраразрешимые накрытия группы Z_2 группами Z_8, Z_{16} и Q_8.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **435** (2015), 47–72.
11. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Задача погружения с неабелевым ядром для локальных полей*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **365** (2009), 172–181.

Kiselev D. D. Metacyclic 2-extensions with cyclic kernel and the ultrasolvability questions.

We give a necessary and sufficient conditions for 2-local ultrasolvability of the metacyclic extensions. Then we derive the ultrasolvability for an arbibrary group extension, which has a local ultrasolvable associated subextension of the second type. Finally, using the above reductions, we establish the ultrasolvability results for a wide class of non-split 2-extensions with cyclic kernel.

Всероссийская академия
внешней торговли
минэкономразвития РФ,
Пудовкина 4а, 119285, Москва,
Россия
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступило 05 октября 2017 г.