

А. И. Генералов, М. А. Филиппов

**КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР
ДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА, VII. СЕРИЯ $D(3\mathcal{R})$**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена вычислению групп когомологий Хохшильда для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{R})$, и тем самым она продолжает серию статей, посвященных исследованию когомологий Хохшильда алгебр диэдрального типа; см. [1]–[6]. Напомним, что алгебры диэдрального типа, а также полудиэдрального и кватернионного типов возникли в работе К.Эрдманн [7] при классификации групповых блоков ручного типа представления.

Как и в предыдущих работах, мы используем подход работы [1], в которой была описана алгебра когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для алгебр диэдрального типа из серии $D(3\mathcal{K})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 (мы вновь используем обозначения из [7]). Указанный подход состоит в том, что сначала на основе некоторых эмпирических вычислений строится минимальная проективная бимодульная резольвента для рассматриваемых алгебр, а затем с использованием этой резольвенты вычисляются группы когомологий Хохшильда, а также умножения в алгебре когомологий. Этот подход был применен также к некоторым сериям алгебр полудиэдрального типа [8–15], а в [16–19] — для некоторых серий алгебр кватернионного типа.

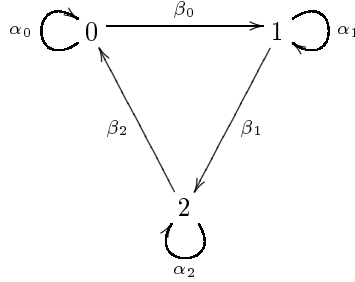
Кратко опишем структуру работы. В разделе 2 вводятся необходимые основные определения и обозначения. В разделе 3 строится минимальная проективная резольвента алгебры R , рассматриваемой как модуль над своей обёртывающей алгеброй $\Lambda = R^e = R \otimes_{\mathbb{F}} R^{\mathrm{op}}$. Наконец, используя эту резольвенту, в разделе 4 мы вычисляем группы $\mathrm{HH}^n(R)$ для алгебр рассматриваемого семейства.

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры диэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00258. Первый из авторов благодарит за частичную поддержку грант НШ-9721.2016.1 Президента РФ по государственной поддержке ведущих школ РФ. Второй из авторов благодарит за частичную поддержку грант Президента РФ для молодых кандидатов МК-1378.2017.1.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть \mathbb{F} – алгебраически замкнутое поле. Алгебры $R^{k,s,t,u}$, где $k, s, t, u \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $s, t, u \geq 2$, составляющие серию $D(3\mathcal{R})$ из классификации К. Эрдманн [7], определяются как \mathbb{F} -алгебры путей колчана \mathcal{Q} с соотношениями:



$$\beta_0 \alpha_0 = \beta_1 \alpha_1 = \beta_2 \alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_1 \beta_0 = \alpha_2 \beta_1 = \alpha_0 \beta_2 = 0,$$

$$\alpha_0^s = (\beta_2 \beta_1 \beta_0)^k, \alpha_1^t = (\beta_0 \beta_2 \beta_1)^k, \alpha_2^u = (\beta_1 \beta_0 \beta_2)^k.$$

Через e_i , $i = 0, 1, 2$, обозначим идемпотенты алгебры $R = R^{k,s,t,u}$, соответствующие вершинам колчана \mathcal{Q} . Тогда

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j), \quad i, j \in \{0, 1, 2\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ -модулей, где $\Lambda = R^e$.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм \hat{w} левого Λ -модуля Λ , кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то \hat{w} индуцирует гомоморфизм $\hat{w}: P_{ij} \rightarrow P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w .

Мы будем отождествлять множество \mathcal{Q}_0 вершин колчана \mathcal{Q} с кольцом вычетов $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ и использовать соответствующие обозначения для понятий, связанных с вершинами \mathcal{Q} .

Рассмотрим отображение $p: \mathcal{Q}_0 \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $p(0) = s$, $p(1) = t$, $p(2) = u$, а затем введём следующие краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R :

$$b_i = (\beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i)^{k-1}, \quad c_i = \beta_{i+1}\beta_i b_i, \\ g_i = \alpha_i^{p(i)-1}, \quad d_i = \beta_{i+2}\beta_{i+1}\beta_i \quad \text{для } i \in \mathcal{Q}_0.$$

§3. РЕЗОЛЬВЕНТА

Пусть $R = R^{k,s,t,u}$, $k \geq 1$, $s, t, u \geq 2$ — \mathbb{F} -алгебра серии $D(3\mathcal{R})$, введённая в разделе 2. Для описания бимодульной резольвенты алгебры R введём ряд дополнительных обозначений. Рассмотрим \mathbb{F} -пространство $V := \mathbb{F}\mathcal{Q}_0 \oplus \mathbb{F}\mathcal{Q}_1$. Определим изоморфизм $s : V \rightarrow V$ так, что $s(e_i) = e_{i+1}$, $s(\alpha_i) = \alpha_{i+1}$, $s(\beta_i) = \beta_{i+1}$. Он очевидным образом продолжается до \mathbb{F} -линейного отображения $s : V \otimes V^{\text{op}} \subset \Lambda \rightarrow V \otimes V^{\text{op}} \subset \Lambda$, и затем введём обозначение

$$S(x, y, z) := \begin{pmatrix} x & y & z \\ s(z) & s(x) & s(y) \\ s^2(y) & s^2(z) & s^2(x) \end{pmatrix}, \quad \text{где } x, y, z \in \Lambda.$$

Наконец, рассмотрим следующие вспомогательные проективные Λ -модули:

$$L_0 = \bigoplus_{i=0}^2 P_{ii}, \quad L_1 = \bigoplus_{i=0}^2 P_{i+1,i}, \quad L_2 = \bigoplus_{i=0}^2 P_{i,i+1}, \\ L_{01} = L_0 \oplus L_1, \quad L_{12} = L_1 \oplus L_2, \quad L_{20} = L_2 \oplus L_0.$$

Теперь в категории (левых) Λ -модулей построим следующий бикомплекс $\mathcal{D}_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости:

$$\begin{array}{ccccccc}
& \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
\sigma_2 \downarrow & & & \tilde{\sigma}_1 \downarrow & & \downarrow \sigma_6 & & \\
L_1^2 & \xleftarrow{\tau_1} & L_{01} & \xleftarrow{\tilde{\tau}_6} & L_0^2 & \xleftarrow{\tau_5} & \dots & \\
\sigma_1 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_6 & & \downarrow \sigma_5 & & \\
L_{01} & \xleftarrow{-\tau_6} & L_0^2 & \xleftarrow{-\tilde{\tau}_5} & L_{20} & \xleftarrow{-\tau_4} & \dots & \\
\sigma_6 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_5 & & \downarrow \sigma_4 & & \\
L_0^2 & \xleftarrow{\tau_5} & L_{20} & \xleftarrow{\tilde{\tau}_4} & L_2^2 & \xleftarrow{\tau_3} & \dots & \\
\sigma_5 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_4 & & \downarrow \sigma_3 & & \\
L_{20} & \xleftarrow{-\tau_4} & L_2^2 & \xleftarrow{-\tilde{\tau}_3} & L_{12} & \xleftarrow{-\tau_2} & \dots & \\
\sigma_4 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_3 & & \downarrow \sigma_2 & & \\
L_2^2 & \xleftarrow{\tau_3} & L_{12} & \xleftarrow{\tilde{\tau}_2} & L_1^2 & \xleftarrow{\tau_1} & \dots & \\
\sigma_3 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_2 & & \downarrow \sigma_1 & & \\
L_{12} & \xleftarrow{-\tau_2} & L_1^2 & \xleftarrow{-\tilde{\tau}_1} & L_{01} & \xleftarrow{-\rho_2} & \dots & \\
\sigma_2 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\sigma}_1 & & \downarrow \rho_1 & & \\
L_1^2 & \xleftarrow{\tau_1} & L_{01} & \xleftarrow{\tilde{\rho}_2} & L_0 & & & \\
\sigma_1 \downarrow & & & \downarrow \tilde{\rho}_1 & & & & \\
L_{01} & \xleftarrow{-\rho_2} & L_0 & & & & & \\
\rho_1 \downarrow & & & & & & & \\
L_0 & . & & & & & &
\end{array} \tag{3.1}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= [\rho_1' \mid \rho_1''], \rho_1' = S(\alpha_0 \otimes e_0 - e_0 \otimes \alpha_0, 0, 0), \\
\rho_1'' &= S(\beta_0 \otimes e_0, 0, -e_0 \otimes \beta_2); \\
\rho_2 &= \begin{bmatrix} \rho_2' \\ \rho_2'' \end{bmatrix}, \\
\rho_2' &= \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{s-1} \alpha_0^j \otimes \alpha_0^{s-1-j} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{j=0}^{t-1} \alpha_1^j \otimes \alpha_1^{t-1-j} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{j=0}^{u-1} \alpha_2^j \otimes \alpha_2^{u-1-j} \end{bmatrix}, \\
\rho_2'' &= \begin{bmatrix} -\sum_{m=0}^{k-1} d_0^m \beta_2 \beta_1 \otimes d_0^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_1^m \otimes \beta_2 \beta_1 d_1^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_2^m \beta_1 \otimes \beta_2 d_2^{k-1-m} \\ -\sum_{m=0}^{k-1} d_0^m \beta_2 \otimes \beta_0 d_0^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_1^m \beta_0 \beta_2 \otimes d_1^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_2^m \otimes \beta_0 \beta_2 d_2^{k-1-m} \\ -\sum_{m=0}^{k-1} d_0^m \otimes \beta_1 \beta_0 d_0^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_1^m \beta_0 \otimes \beta_1 d_1^{k-1-m} & -\sum_{m=0}^{k-1} d_2^m \beta_1 \beta_0 \otimes d_2^{k-1-m} \end{bmatrix}; \\
\tilde{\rho}_1 &= [\tilde{\rho}_1' \mid \tilde{\rho}_1''], \tilde{\rho}_1' = \rho_1', \tilde{\rho}_1'' = -\rho_1''; \\
\tilde{\rho}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_2' \\ \tilde{\rho}_2'' \end{bmatrix}, \tilde{\rho}_2' = \rho_2', \tilde{\rho}_2'' = -\rho_2''; \\
\sigma_1 &= \begin{bmatrix} \sigma_1^{00} & \sigma_1^{01} \\ \sigma_1^{10} & \sigma_1^{11} \end{bmatrix}, \sigma_1^{00} = S(0, 0, e_0 \otimes \beta_2), \sigma_1^{01} = S(\beta_0 \otimes e_0, 0, 0), \\
&\quad \sigma_1^{10} = S(\alpha_1 \otimes e_0, 0, 0), \sigma_1^{11} = S(e_1 \otimes \alpha_0, 0, 0); \\
\sigma_2 &= \begin{bmatrix} \sigma_2^{00} & \sigma_2^{01} \\ \sigma_2^{10} & \sigma_2^{11} \end{bmatrix}, \sigma_2^{00} = S(-e_1 \otimes \alpha_0, 0, 0), \sigma_2^{01} = S(0, 0, \beta_1 \otimes e_0), \\
&\quad \sigma_2^{10} = S(\alpha_1 \otimes e_0, 0, 0), \sigma_2^{11} = S(0, -e_1 \otimes \beta_2, 0); \\
\sigma_3 &= \begin{bmatrix} \sigma_3^{00} & \sigma_3^{01} \\ \sigma_3^{10} & \sigma_3^{11} \end{bmatrix}, \sigma_3^{00} = S(0, e_1 \otimes \beta_2, 0), \sigma_3^{01} = S(0, 0, \beta_1 \otimes e_0), \\
&\quad \sigma_3^{10} = S(\alpha_0 \otimes e_1, 0, 0), \sigma_3^{11} = S(e_0 \otimes \alpha_1, 0, 0); \\
\sigma_4 &= \begin{bmatrix} \sigma_4^{00} & \sigma_4^{01} \\ \sigma_4^{10} & \sigma_4^{11} \end{bmatrix}, \sigma_4^{00} = S(-e_0 \otimes \alpha_1, 0, 0), \sigma_4^{01} = S(0, \beta_0 \otimes e_1, 0), \\
&\quad \sigma_4^{10} = S(\alpha_0 \otimes e_1, 0, 0), \sigma_4^{11} = S(-e_0 \otimes \beta_0, 0, 0);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_5 &= \begin{bmatrix} \sigma_5^{00} & \sigma_5^{01} \\ \sigma_5^{10} & \sigma_5^{11} \end{bmatrix}, \sigma_5^{00} = S(e_0 \otimes \beta_0, 0, 0), \sigma_5^{01} = S(0, \beta_0 \otimes e_1, 0), \\ &\sigma_5^{10} = S(\alpha_0 \otimes e_0, 0, 0), \sigma_5^{11} = S(e_0 \otimes \alpha_0, 0, 0); \\ \sigma_6 &= \begin{bmatrix} \sigma_6^{00} & \sigma_6^{01} \\ \sigma_6^{10} & \sigma_6^{11} \end{bmatrix}, \sigma_6^{00} = S(-e_0 \otimes \alpha_0, 0, 0), \sigma_6^{01} = S(\beta_0 \otimes e_0, 0, 0), \\ &\sigma_6^{10} = S(\alpha_0 \otimes e_0, 0, 0), \sigma_6^{11} = S(0, 0, -e_0 \otimes \beta_2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_1^{00} & \tilde{\sigma}_1^{01} \\ \tilde{\sigma}_1^{10} & \tilde{\sigma}_1^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_1^{00} = \sigma_1^{00}, \tilde{\sigma}_1^{01} = \sigma_1^{01}, \tilde{\sigma}_1^{10} = -\sigma_1^{10}, \tilde{\sigma}_1^{11} = -\sigma_1^{11}; \\ \tilde{\sigma}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_2^{00} & \tilde{\sigma}_2^{01} \\ \tilde{\sigma}_2^{10} & \tilde{\sigma}_2^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_2^{00} = \sigma_2^{00}, \tilde{\sigma}_2^{01} = -\sigma_2^{01}, \tilde{\sigma}_2^{10} = \sigma_2^{10}, \tilde{\sigma}_2^{11} = -\sigma_2^{11}; \\ \tilde{\sigma}_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_3^{00} & \tilde{\sigma}_3^{01} \\ \tilde{\sigma}_3^{10} & \tilde{\sigma}_3^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_3^{00} = \sigma_3^{00}, \tilde{\sigma}_3^{01} = \sigma_3^{01}, \tilde{\sigma}_3^{10} = -\sigma_3^{10}, \tilde{\sigma}_3^{11} = -\sigma_3^{11}; \\ \tilde{\sigma}_4 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_4^{00} & \tilde{\sigma}_4^{01} \\ \tilde{\sigma}_4^{10} & \tilde{\sigma}_4^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_4^{00} = \sigma_4^{00}, \tilde{\sigma}_4^{01} = -\sigma_4^{01}, \tilde{\sigma}_4^{10} = \sigma_4^{10}, \tilde{\sigma}_4^{11} = -\sigma_4^{11}; \\ \tilde{\sigma}_5 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_5^{00} & \tilde{\sigma}_5^{01} \\ \tilde{\sigma}_5^{10} & \tilde{\sigma}_5^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_5^{00} = \sigma_5^{00}, \tilde{\sigma}_5^{01} = \sigma_5^{01}, \tilde{\sigma}_5^{10} = -\sigma_5^{10}, \tilde{\sigma}_5^{11} = -\sigma_5^{11}; \\ \tilde{\sigma}_6 &= \begin{bmatrix} \tilde{\sigma}_6^{00} & \tilde{\sigma}_6^{01} \\ \tilde{\sigma}_6^{10} & \tilde{\sigma}_6^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\sigma}_6^{00} = \sigma_6^{00}, \tilde{\sigma}_6^{01} = -\sigma_6^{01}, \tilde{\sigma}_6^{10} = \sigma_6^{10}, \tilde{\sigma}_6^{11} = -\sigma_6^{11};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \begin{bmatrix} \tau_1^{00} & \tau_1^{01} \\ \tau_1^{10} & \tau_1^{11} \end{bmatrix}, \tau_1^{00} = S(0, -e_1 \otimes c_1, 0), \tau_1^{01} = S(g_1 \otimes e_0, 0, 0), \\ &\tau_1^{10} = S(c_1 \otimes e_0, 0, 0), \tau_1^{11} = S(-e_1 \otimes g_0, 0, 0); \\ \tau_2 &= \begin{bmatrix} \tau_2^{00} & \tau_2^{01} \\ \tau_2^{10} & \tau_2^{11} \end{bmatrix}, \tau_2^{00} = S(e_1 \otimes g_0, 0, 0), \tau_2^{01} = S(g_1 \otimes e_0, 0, 0), \\ &\tau_2^{10} = S(0, -c_0 \otimes e_1, 0), \tau_2^{11} = S(0, 0, -e_0 \otimes c_2); \\ \tau_3 &= \begin{bmatrix} \tau_3^{00} & \tau_3^{01} \\ \tau_3^{10} & \tau_3^{11} \end{bmatrix}, \tau_3^{00} = S(0, 0, -e_0 \otimes c_2), \tau_3^{01} = S(g_0 \otimes e_1, 0, 0), \\ &\tau_3^{10} = S(0, c_0 \otimes e_1, 0), \tau_3^{11} = S(-e_0 \otimes g_1, 0, 0); \\ \tau_4 &= \begin{bmatrix} \tau_4^{00} & \tau_4^{01} \\ \tau_4^{10} & \tau_4^{11} \end{bmatrix}, \tau_4^{00} = S(e_0 \otimes g_1, 0, 0), \tau_4^{01} = S(g_0 \otimes e_1, 0, 0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \tau_4^{10} = S(0, 0, -c_0 \otimes e_0), \tau_4^{11} = S(-e_0 \otimes c_1, 0, 0); \\
\tau_5 &= \begin{bmatrix} \tau_5^{00} & \tau_5^{01} \\ \tau_5^{10} & \tau_5^{11} \end{bmatrix}, \tau_5^{00} = S(-e_0 \otimes c_1, 0, 0), \tau_5^{01} = S(g_0 \otimes e_0, 0, 0), \\
& \tau_5^{10} = S(0, 0, c_0 \otimes e_0), \tau_5^{11} = S(-e_0 \otimes g_0, 0, 0); \\
\tau_6 &= \begin{bmatrix} \tau_6^{00} & \tau_6^{01} \\ \tau_6^{10} & \tau_6^{11} \end{bmatrix}, \tau_6^{00} = S(e_0 \otimes g_0, 0, 0), \tau_6^{01} = S(g_0 \otimes e_0, 0, 0), \\
& \tau_6^{10} = S(-c_1 \otimes e_0, 0, 0), \tau_6^{11} = S(0, -e_1 \otimes c_1, 0); \\
\tilde{\tau}_1 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_1^{00} & \tilde{\tau}_1^{01} \\ \tilde{\tau}_1^{10} & \tilde{\tau}_1^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_1^{00} = \tau_1^{00}, \tilde{\tau}_1^{01} = -\tau_1^{01}, \tilde{\tau}_1^{10} = \tau_1^{10}, \tilde{\tau}_1^{11} = -\tau_1^{11}; \\
\tilde{\tau}_2 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_2^{00} & \tilde{\tau}_2^{01} \\ \tilde{\tau}_2^{10} & \tilde{\tau}_2^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_2^{00} = \tau_2^{00}, \tilde{\tau}_2^{01} = \tau_2^{01}, \tilde{\tau}_2^{10} = -\tau_2^{10}, \tilde{\tau}_2^{11} = -\tau_2^{11}; \\
\tilde{\tau}_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_3^{00} & \tilde{\tau}_3^{01} \\ \tilde{\tau}_3^{10} & \tilde{\tau}_3^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_3^{00} = \tau_3^{00}, \tilde{\tau}_3^{01} = -\tau_3^{01}, \tilde{\tau}_3^{10} = \tau_3^{10}, \tilde{\tau}_3^{11} = -\tau_3^{11}; \\
\tilde{\tau}_4 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_4^{00} & \tilde{\tau}_4^{01} \\ \tilde{\tau}_4^{10} & \tilde{\tau}_4^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_4^{00} = \tau_4^{00}, \tilde{\tau}_4^{01} = \tau_4^{01}, \tilde{\tau}_4^{10} = -\tau_4^{10}, \tilde{\tau}_4^{11} = -\tau_4^{11}; \\
\tilde{\tau}_5 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_5^{00} & \tilde{\tau}_5^{01} \\ \tilde{\tau}_5^{10} & \tilde{\tau}_5^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_5^{00} = \tau_5^{00}, \tilde{\tau}_5^{01} = -\tau_5^{01}, \tilde{\tau}_5^{10} = \tau_5^{10}, \tilde{\tau}_5^{11} = -\tau_5^{11}; \\
\tilde{\tau}_6 &= \begin{bmatrix} \tilde{\tau}_6^{00} & \tilde{\tau}_6^{01} \\ \tilde{\tau}_6^{10} & \tilde{\tau}_6^{11} \end{bmatrix}, \tilde{\tau}_6^{00} = \tau_6^{00}, \tilde{\tau}_6^{01} = \tau_6^{01}, \tilde{\tau}_6^{10} = -\tau_6^{10}, \tilde{\tau}_6^{11} = -\tau_6^{11}.
\end{aligned}$$

Пусть $Q_\bullet = (Q_n, d_n^Q)_{n \geq 0} = \text{Tot}(\mathcal{D}_{\bullet\bullet})$ – тотализация бикомплекса (3.1). В качестве дополняющего отображения $\mu: Q_0 = L_0 \rightarrow R$ мы берем каноническое отображение, индуцированное умножением в R : $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.1. Пусть $R = R^{k,s,t,u}$. Тогда построенный выше комплекс Q_\bullet вместе с дополняющим отображением $\mu: Q_0 \rightarrow R$ является минимальной Λ -проективной резольвентой алгебры R .

Доказательство. То, что $\mu \cdot d_0^Q = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Q_\bullet – комплекс, так как он является тотализацией бикомплекса. Для доказательства того факта, что Q_\bullet – минимальная Λ -проективная резольвента мы используем теорему 1 из [20]. А именно, нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu: Q_\bullet \rightarrow R$

на простой R -модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i . В силу \mathbb{Z}_3 -симметрии достаточно проверить это для $i = 0$.

Требуемое утверждение легко проверяется уже на уровне бикомплексов. Пусть $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс, тотализация которого даёт минимальную проективную резольвенту простого R -модуля S_0 (этот бикомплекс описан в [21] на стр. 250), а $\mathcal{F}_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс, получающийся из бикомплекса $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$ “схлопыванием” относительно главной диагонали (т.е. $\mathcal{F}_{mn} = \mathcal{B}_{mn} \oplus \mathcal{B}_{nm}$ при $m < n$, $\mathcal{F}_{mm} = \mathcal{B}_{mm}$, а дифференциалы $\mathcal{F}_{\bullet\bullet}$ индуцируются соответствующими дифференциалами $\mathcal{B}_{\bullet\bullet}$). Тогда бикомплексы $\mathcal{D}_{\bullet\bullet} \otimes_R S_0$ и $\mathcal{F}_{\bullet\bullet}$ совпадают. \square

Рассмотрим бикомплекс $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$, состоящий из двух первых ненулевых столбцов в бикомплексе $\mathcal{D}_{\bullet\bullet}$ с номерами 0 и 1 (а остальные столбцы в $\mathcal{A}_{\bullet\bullet}$ нулевые). Пусть $X_{\bullet} = \text{Tot}(\mathcal{A}_{\bullet\bullet})$; ясно, что X_{\bullet} – подкомплекс комплекса Q_{\bullet} .

Предложение 3.2. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \rightarrow X_{\bullet} \xrightarrow{i} Q_{\bullet} \xrightarrow{\pi} Q_{\bullet}[-4] \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Доказательство. Утверждение вытекает непосредственно из строения комплекса Q_{\bullet} . \square

§4. ГРУППЫ КОГОМОЛОГИЙ

4.1. Основные обозначения. Пусть по-прежнему $R = R^{k,s,t,u}$ – \mathbb{F} -алгебра серии $D(3\mathcal{R})$, и пусть $p = \text{char } \mathbb{F}$. Для вычисления групп когомологий $\text{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем следующий бикомплекс (в категории \mathbb{F} -векторных пространств):

$$\left(\mathcal{C}^{mn} = \text{Hom}_{\Lambda}(\mathcal{D}_{mn}, R), \delta_I = \text{Hom}_{\Lambda}(d^I, R), \delta_{II} = \text{Hom}_{\Lambda}(d^{II}, R) \right)_{m \geq 0, n \geq 0}, \quad (4.1)$$

где $\mathcal{D}_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс, построенный в разделе 3, а d^I, d^{II} – соответственно вертикальный и горизонтальный дифференциалы этого бикомплекса. Напомним, что тотализация $\text{Tot}(\mathcal{D}_{\bullet\bullet}) = Q_{\bullet}$ является минимальной Λ -проективной резольвентой алгебры R . В дальнейшем мы часто для коцикла $f \in \text{Ker } \delta^n$ его когомологический класс $\text{cl } f \in \text{HH}^n(R)$ также обозначаем через f .

Замечание 4.1. Поскольку $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, то имеется изоморфизм $\text{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R) \simeq e_i R e_j$, и мы используем его для отождествления указанных \mathbb{F} -пространств. Далее, всякий Λ -гомоморфизм $f: \mathcal{D}_{mn} \rightarrow R$ определяется набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех P_{ij} , которые входят в разложение модуля \mathcal{D}_{mn} ; при этом $f(e_i \otimes e_j) \in e_i R e_j$. В дальнейшем мы отождествляем f с этим набором значений. Когда в таком наборе значений f встречается последовательность, состоящая из нулей, скажем, из p штук, то мы такую последовательность обозначаем через O_p . Аналогично нулевую $p \times q$ -матрицу обозначаем через $O_{p,q}$; при этом мы опускаем указание на размеры такой матрицы, если они ясны из контекста.

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \bigcup_{i=0}^2 \mathcal{B}_{ii} \cup \bigcup_{i=0}^2 \mathcal{B}_{i+1,i} \cup \bigcup_{i=0}^2 \mathcal{B}_{i,i+1} \quad (4.2)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ii} &= \{\alpha_i^j, d_i^m \mid 0 \leq j \leq p(i) - 1, 1 \leq m \leq k\}, \\ \mathcal{B}_{i+1,i} &= \{\beta_i d_i^m \mid 0 \leq m \leq k - 1\}, \\ \mathcal{B}_{i,i+1} &= \{\beta_{i+2} \beta_{i+1} d_{i+1}^m \mid 0 \leq m \leq k - 1\}. \end{aligned}$$

Нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 4.2. Для любых $i, j \in \{0, 1, 2\}$ множество \mathcal{B}_{ij} образует \mathbb{F} -базис пространства $\text{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R) \simeq e_i R e_j$.

Доказательство. Проверяется прямыми вычислениями. \square

Следствие 4.3. Размерности пространств $\text{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R)$ описываются следующим образом:

- а) Если $i \neq j$, то $\dim_{\mathbb{F}} \text{Hom}_\Lambda(P_{ij}, R) = \dim_{\mathbb{F}} e_i R e_j = k$;
- б) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Hom}_\Lambda(P_{ii}, R) = \dim_{\mathbb{F}} e_i R e_i = p(i) + k$.

Предложение 4.4. $\text{HH}^n(R) = \text{H}^n(\text{Tot}(\mathcal{C}^{\bullet\bullet}))$.

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что: функтор $\text{Hom}_\Lambda(-, R)$ сохраняет конечные прямые суммы, $\text{Tot}(\mathcal{D}^{\bullet\bullet})$ – минимальная Λ -проективная резольвента R , и из определения $\text{HH}^n(R)$. \square

Для вычисления групп когомологий тотализации бикомплекса существует стандартная техника – спектральная последовательность бикомплекса. Она описывается следующей теоремой.

Теорема 4.5. *Существует спектральная последовательность E_r^{mn} , $r \geq 0$, такая, что:*

$$E_0^{mn} = \mathcal{C}^{mn}, \quad E_1^{mn} = \mathbb{H}^I(\mathcal{C}^{mn}) := \frac{\text{Ker } \delta_1^{mn}}{\text{Im } \delta_1^{m,n-1}},$$

$$E_2^{mn} = \mathbb{H}^{II}(\mathbb{H}^I(\mathcal{C}^{mn})) := \frac{\text{Ker } \mathbb{H}^I(\delta_{II}^{mn})}{\text{Im } \mathbb{H}^I(\delta_{II}^{m-1,n})},$$

$$E_r^{mn} \Rightarrow \mathbb{H}^{m+n}(\text{Tot}(\mathcal{C}^{\bullet\bullet})).$$

при этом горизонтальные дифференциалы на первом листе индуцированы соответствующими горизонтальными дифференциалами бикомплекса $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$:

$$\mathbb{H}^I(\delta_{II}^{m,n})(\bar{u}) := \overline{\delta_{II}^{m,n}(u)},$$

если $u \in \text{Ker } \delta_1^{mn}$.

Доказательство. См. [23]. □

Замечание 4.6. Объекты первого листа будем называть вертикальными когомологиями бикомплекса $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$, а объекты второго листа – горизонтальными когомологиями.

Замечание 4.7. Заметим, что про дифференциалы второго листа ничего не говорится. Но в случае нашей конкретной спектральной последовательности после вычисления объектов второго листа станет очевидно, что они обязаны быть нулевыми.

Отметим, что если $w: \Lambda \rightarrow \Lambda$ – гомоморфизм умножения справа на $w \in \Lambda$, то индуцированный гомоморфизм абелевых групп

$$w^* := \text{Hom}_\Lambda(w, R): \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(\Lambda, R) \simeq R \quad (4.3)$$

описывается следующим образом: $r \in R$ отображается в $w * r$ (где $*$ соответствует Λ -модульной структуре на R).

Кроме того, если $f: X \rightarrow Y$ – гомоморфизм левых Λ -модулей, то введём обозначение

$$f^* := \text{Hom}_\Lambda(f, R): \text{Hom}_\Lambda(Y, R) \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(X, R).$$

Введём также следующие дополнительные обозначения:

$$M_0 = \bigoplus_{i=0}^2 e_i R e_i, \quad M_1 = \bigoplus_{i=0}^2 e_{i+1} R e_i, \quad M_2 = \bigoplus_{i=0}^2 e_i R e_{i+1},$$

$$M_{01} = M_0 \oplus M_1, \quad M_{12} = M_1 \oplus M_2, \quad M_{20} = M_2 \oplus M_0.$$

Предложение 4.8. Пусть $i, j = 0, 1, 2$. Тогда:

- а) $\dim_{\mathbb{F}} M_0 = s + t + u + 3k$, $\dim_{\mathbb{F}} M_1 = \dim_{\mathbb{F}} M_2 = 3k$;
 б) $\dim_{\mathbb{F}} M_{12} = 6k$, $\dim_{\mathbb{F}} M_{01} = \dim_{\mathbb{F}} M_{20} = s + t + u + 6k$.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 4.3. \square

4.2. Бикомплекс. Теперь бикомплекс $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$ (см. (4.1)) принимает следующий вид:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \sigma_2^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_1^* & & \uparrow \sigma_6^* & & \\
 M_1^2 & \xrightarrow{\tau_1^*} & M_{01} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_6^*} & M_0^2 & \xrightarrow{\tau_5^*} & \dots \\
 \sigma_1^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_6^* & & \uparrow \sigma_5^* & & \\
 M_{01} & \xrightarrow{-\tau_6^*} & M_0^2 & \xrightarrow{-\tilde{\tau}_5^*} & M_{20} & \xrightarrow{-\tau_4^*} & \dots \\
 \sigma_6^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_5^* & & \uparrow \sigma_4^* & & \\
 M_0^2 & \xrightarrow{\tau_5^*} & M_{20} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_4^*} & M_2^2 & \xrightarrow{\tau_3^*} & \dots \\
 \sigma_5^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_4^* & & \uparrow \sigma_3^* & & \\
 M_{20} & \xrightarrow{-\tau_4^*} & M_2^2 & \xrightarrow{-\tilde{\tau}_3^*} & M_{12} & \xrightarrow{-\tau_2^*} & \dots \\
 \sigma_4^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_3^* & & \uparrow \sigma_2^* & & \\
 M_2^2 & \xrightarrow{\tau_3^*} & M_{12} & \xrightarrow{\tilde{\tau}_2^*} & M_1^2 & \xrightarrow{\tau_1^*} & \dots \\
 \sigma_3^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_2^* & & \uparrow \sigma_1^* & & \\
 M_{12} & \xrightarrow{-\tau_2^*} & M_1^2 & \xrightarrow{-\tilde{\tau}_1^*} & M_{01} & \xrightarrow{-\rho_2^*} & \dots \\
 \sigma_2^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\sigma}_1^* & & \uparrow \rho_1^* & & \\
 M_1^2 & \xrightarrow{\tau_1^*} & M_{01} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_2^*} & M_0 & & \\
 \sigma_1^* \uparrow & & \uparrow \tilde{\rho}_1^* & & & & \\
 M_{01} & \xrightarrow{\tilde{\rho}_2^*} & M_0 & & & & \\
 \rho_1^* \uparrow & & & & & & \\
 M_0 & & & & & & .
 \end{array} \tag{4.4}$$

4.3. Вычисление вертикальных когомологий. Для элементов $u_{ij} \in e_i Re_j$ рассмотрим разложения по стандартному базису:

$$\left. \begin{aligned} u_{00} &= \sum_{j=0}^{s-1} \mu_j^0 \alpha_0^j + \sum_{m=1}^k \eta_m^0 d_0^m, & u_{11} &= \sum_{j=0}^{t-1} \mu_j^1 \alpha_1^j + \sum_{m=1}^k \eta_m^1 d_1^m, \\ u_{22} &= \sum_{j=0}^{u-1} \mu_j^2 \alpha_2^j + \sum_{m=1}^k \eta_m^2 d_2^m, & u_{01} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{01} (\beta_2 \beta_1 d_1^m), \\ u_{12} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{12} (\beta_0 \beta_2 d_2^m), & u_{20} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{20} (\beta_1 \beta_0 d_0^m), \\ u_{10} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{10} (\beta_0 d_0^m), & u_{21} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{21} (\beta_1 d_1^m), & u_{02} &= \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{02} (\beta_2 d_2^m), \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где все $\mu_j^\ell, \eta_m^\ell, \eta_m^{\ell r}$ из \mathbb{F} .

Дифференциал $\rho_1^*: M_0 \rightarrow M_{01}$ описывается следующим образом: для $u_{ii} \in e_i Re_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \rho_1^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}) &= (\alpha_0 u_{00} - u_{00} \alpha_0, \alpha_1 u_{11} - u_{11} \alpha_1, \alpha_2 u_{22} - u_{22} \alpha_2, \\ &\quad \beta_0 u_{00} - u_{11} \beta_0, \beta_1 u_{11} - u_{22} \beta_1, \beta_2 u_{22} - u_{00} \beta_2) \\ &= (t_{00}, t_{11}, t_{22}, t_{10}, t_{21}, t_{02}). \end{aligned}$$

Предложение 4.9. $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \rho_1^* = s + t + u + k$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \rho_1^* = 2k$.

Доказательство. Пусть $\rho_1^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}) = 0$. Тогда условия $t_{ii} = 0, t_{i+1,i} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta_m^0 &= \eta_m^1 = \eta_m^2, & 1 \leq m \leq k-1, \\ \mu_0^0 &= \mu_0^1 = \mu_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \rho_1^* = s + t + u + k$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \rho_1^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_0 - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \rho_1^* \\ &= s + t + u + 3k - (s + t + u + k) = 2k. \quad \square \end{aligned}$$

Замечание 4.10. Пространство $\text{Im } \rho_1^*$ допускает в качестве \mathbb{F} -базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$(0, 0, 0, \beta_0 d_0^m, -\beta_1 d_1^m, 0) \text{ для } 0 \leq m \leq k-1; \quad (4.7)$$

$$(0, 0, 0, 0, \beta_1 d_1^m, -\beta_2 d_2^m) \text{ для } 0 \leq m \leq k-1. \quad (4.8)$$

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть значения ρ_1^* на элементах вида $(b_{00}, 0, 0)$ (соответственно вида $(0, b_{11}, 0)$ и вида $(0, 0, b_{22})$), где b_{ii} пробегает множество \mathcal{B}_{ii} , и убедиться, что множество элементов из (4.7)–(4.8) порождает $\text{Im } \rho_1^*$. Остаётся заметить, что мощность этого множества совпадает с $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \rho_1^*$.

Дифференциал $\tilde{\rho}_1^*: M_0 \rightarrow M_{01}$ описывается следующим образом: для $u_{ii} \in e_i R e_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}) &= (\alpha_0 u_{00} - u_{00} \alpha_0, a_1 u_{11} - u_{11} \alpha_1, \alpha_2 u_{22} - u_{22} \alpha_2, \\ &\quad -\beta_0 u_{00} + u_{11} \beta_0, -\beta_1 u_{11} + u_{22} \beta_1, -\beta_2 u_{22} + u_{00} \beta_2) \\ &= (t_{00}, t_{11}, t_{22}, t_{10}, t_{21}, t_{02}). \end{aligned}$$

Заметим, что $t_{00} = t_{11} = t_{22} = 0$, поэтому $\tilde{\rho}_1^* = -\rho_1^*$.

Следствие 4.11. $\text{Ker } \tilde{\rho}_1^* = \text{Ker } \rho_1^*$, $\text{Im } \tilde{\rho}_1^* = \text{Im } \rho_1^*$.

Замечание 4.12. В дальнейшем мы будем опускать подробный анализ морфизмов с “волнами”, так как их матрицы отличаются только знаками элементов в некоторых блоках. Однако окончательные результаты вычислений будут описаны.

Далее нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4.13. а) При $j \in \{0, 1\}$ имеем $(\sigma_1^{1j})^* = 0$, $(\sigma_3^{1j})^* = 0$, $(\sigma_2^{j0})^* = 0$, $(\sigma_4^{j0})^* = 0$.

б) $\tau_2^* = 0$, $\tau_3^* = 0$, $\tilde{\tau}_2^* = 0$, $\tilde{\tau}_3^* = 0$.

Доказательство. Утверждение проверяется прямыми вычислениями. \square

Следствие 4.14. $\tilde{\sigma}_1^* = \sigma_1^*$, $\tilde{\sigma}_3^* = \sigma_3^*$, $\tilde{\sigma}_2^* = -\sigma_2^*$, $\tilde{\sigma}_4^* = -\sigma_4^*$.

Следствие 4.15. При $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$\text{Ker } \tilde{\sigma}_i^* = \text{Ker } \sigma_i^*, \quad \text{Im } \tilde{\sigma}_i^* = \text{Im } \sigma_i^*.$$

Дифференциал $\sigma_1^*: M_{01} \rightarrow M_1^2$ описывается следующим образом (с учётом леммы 4.13, а): для $u_{ii} \in e_i Re_i$, $u_{i+1,i} \in e_{i+1} Re_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_1^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}, u_{10}, u_{21}, u_{02}) &= (u_{11}\beta_0, u_{22}\beta_1, u_{00}\beta_2, \\ &\beta_0 u_{00}, \beta_1 u_{11}, \beta_2 u_{22}) = (t_{10}, t_{21}, t_{02}, t'_{10}, t'_{21}, t'_{02}). \end{aligned}$$

Предложение 4.16. $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_1^* = s + t + u + 3k$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_1^* = 3k$.

Доказательство. Пусть $\sigma_1^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}, u_{10}, u_{21}, u_{02}) = 0$. Тогда условия $t_{i+1,i} = 0$, $t'_{i+1,i} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta_m^0 = \eta_m^1 = \eta_m^2 = 0, \quad 1 \leq m \leq k-1, \\ \mu_0^0 = \mu_0^1 = \mu_0^2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_1^* = s + t + u + 3k$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_1^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_{01} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_1^* \\ &= (s + t + u + 6k) - (s + t + u + 3k) = 3k. \end{aligned}$$

□

Дифференциал $\sigma_2^*: M_1^2 \rightarrow M_{12}$ описывается следующим образом (с учётом леммы 4.13, а): для $u_{i+1,i} \in e_{i+1} Re_i$, $u'_{i+1,i} \in e_{i+1} Re_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_2^*(u_{10}, u_{21}, u_{02}, u'_{10}, u'_{21}, u'_{02}) &= (0, 0, 0, \beta_2 u_{21} - u'_{02} \beta_1, \beta_0 u_{02} - u'_{10} \beta_2, \beta_1 u_{10} - u'_{21} \beta_0) \\ &= (t_{10}, t_{21}, t_{02}, t_{01}, t_{12}, t_{20}). \end{aligned}$$

В разложениях элементов u'_{ij} по стандартному базису будем использовать обозначения, аналогичные (4.5), например,

$$u'_{10} = \sum_{m=0}^{k-1} (\eta_m^{10})' (\beta_0 d_0^m), \quad \text{где } (\eta_m^{10})' \in \mathbb{F}.$$

Предложение 4.17. $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_2^* = 3k$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_2^* = 3k$.

Доказательство. Пусть $\sigma_2^*(u_{10}, u_{21}, u_{02}, u'_{10}, u'_{21}, u'_{02}) = 0$. Тогда условия $t_{i,i+1} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta_m^{10} &= (\eta_m^{21})', \quad 0 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^{21} &= (\eta_m^{02})', \quad 0 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^{02} &= (\eta_m^{10})', \quad 0 \leq m \leq k-1. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_2^* = 3k$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_2^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_1^2 - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_2^* \\ &= 6k - 3k = 3k. \end{aligned}$$

□

Дифференциал $\sigma_3^*: M_{12} \rightarrow M_2^2$ описывается следующим образом (с учётом леммы 4.13, а): для $u_{i+1,i} \in e_{i+1}Re_i$, $u_{i,i+1} \in e_iRe_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_3^*(u_{10}, u_{21}, u_{02}, u_{01}, u_{12}, u_{20}) \\ &= (u_{02}\beta_1, u_{10}\beta_2, u_{21}\beta_0, \beta_2u_{21}, \beta_0u_{02}, \beta_1u_{10}) \\ &= (t_{01}, t_{12}, t_{20}, t'_{01}, t'_{12}, t'_{20}). \end{aligned}$$

Предложение 4.18. $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_3^* = 3k$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_3^* = 3k$.

Доказательство. Пусть $\sigma_3^*(u_{10}, u_{21}, u_{02}, u_{01}, u_{12}, u_{20}) = 0$. Тогда условия $t_{i,i+1} = 0$, $t'_{i,i+1} = 0$ приводят к соотношениям

$$\eta_m^{10} = \eta_m^{21} = \eta_m^{02} = 0, \quad 0 \leq m \leq k-1. \quad (4.11)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_3^* = 3k$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_3^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_{12} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_3^* \\ &= 6k - 3k = 3k. \end{aligned}$$

□

Дифференциал $\sigma_4^*: M_2^2 \rightarrow M_{20}$ описывается следующим образом (с учётом леммы 4.13, а): для $u_{i,i+1} \in e_iRe_{i+1}$, $u'_{i,i+1} \in e_iRe_{i+1}$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_4^*(u_{01}, u_{12}, u_{20}, u'_{01}, u'_{12}, u'_{20}) &= (0, 0, 0, \beta_2u_{20} - u'_{01}\beta_0, \\ &\quad \beta_0u_{01} - u'_{12}\beta_1, \beta_1u_{12} - u'_{20}\beta_2) \\ &= (t_{01}, t_{12}, t_{20}, t_{00}, t_{11}, t_{22}). \end{aligned}$$

Предложение 4.19. $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_4^* = 3k$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_4^* = 3k$.

Доказательство. Пусть $\sigma_4^*(u_{01}, u_{12}, u_{20}, u'_{01}, u'_{12}, u'_{20}) = 0$. Тогда условия $t_{ii} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \eta_m^{01} &= (\eta_m^{12})', \quad 0 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^{12} &= (\eta_m^{20})', \quad 0 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^{20} &= (\eta_m^{01})', \quad 0 \leq m \leq k-1. \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_4^* = 3k$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_4^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_2^2 - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_4^* \\ &= 6k - 3k = 3k. \end{aligned}$$

□

Лемма 4.20. $\text{Im } \tilde{\sigma}_5^* = \text{Im } \sigma_5^*$, $\text{Ker } \tilde{\sigma}_6^* = \text{Ker } \sigma_6^*$.

Доказательство. Достаточно заметить, что матрицы $\tilde{\sigma}_5^*$ и σ_5^* отличаются знаками последних трёх столбцов, а матрицы $\tilde{\sigma}_6^*$ и σ_6^* отличаются знаками последних трёх строк. □

Дифференциал $\sigma_5^*: M_{20} \rightarrow M_0^2$ описывается следующим образом: для $u_{i,i+1} \in e_i R e_{i+1}$, $u_{ii} \in e_i R e_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_5^*(u_{01}, u_{12}, u_{20}, u_{00}, u_{11}, u_{22}) \\ &= (u_{01}\beta_0 + \alpha_0 u_{00}, u_{12}\beta_1 + \alpha_1 u_{11}, u_{20}\beta_2 + \alpha_2 u_{22}, \\ &\quad \beta_2 u_{20} + u_{00}\alpha_0, \beta_0 u_{01} + u_{11}\alpha_1, \beta_1 u_{12} + u_{22}\alpha_2) \\ &= (t_{00}, t_{11}, t_{22}, t'_{00}, t'_{11}, t'_{22}). \end{aligned}$$

Предложение 4.21. *Размерности ядер и образов σ_5^* , $\tilde{\sigma}_5^*$ описываются следующим образом:*

- а) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_5^* = 3k + 1$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_5^* = s + t + u + 3k - 1$.
 б) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \tilde{\sigma}_5^* = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_5^*$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \tilde{\sigma}_5^* = \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_5^*$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma_5^*(u_{01}, u_{12}, u_{20}, u_{00}, u_{11}, u_{22}) = 0$. Тогда условия $t_{ii} = 0, t'_{ii} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \mu_j^0 &= \eta_m^{01} = 0, 0 \leq j \leq s-2, 0 \leq m \leq k-2, \\ \mu_j^1 &= \eta_m^{12} = 0, 0 \leq j \leq t-2, 0 \leq m \leq k-2, \\ \mu_j^2 &= \eta_m^{20} = 0, 0 \leq j \leq u-2, 0 \leq m \leq k-2, \\ \eta_{k-1}^{01} &= -\mu_{s-1}^0 = \eta_{k-1}^{20} = -\mu_{u-1}^2 = \eta_{k-1}^{12} = -\mu_{t-1}^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_5^* = 3k + 1$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_5^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_{20} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_5^* \\ &= (s + t + u + 6k) - (3k + 1) = s + t + u + 3k - 1. \end{aligned}$$

б) Утверждение следует из леммы 4.20. □

Дифференциал $\sigma_6^*: M_0^2 \rightarrow M_{01}$ описывается следующим образом: для $u_{ii} \in e_i Re_i$, $u'_{ii} \in e_i Re_i$ ($i = 0, 1, 2$)

$$\begin{aligned} \sigma_6^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}, u'_{00}, u'_{11}, u'_{22}) \\ = (\alpha_0 u'_{00} - u_{00} \alpha_0, \alpha_1 u'_{11} - u_{11} \alpha_1, \alpha_2 u'_{22} - u_{22} \alpha_2, \\ \beta_0 u'_{00} - u'_{11} \beta_0, \beta_1 u'_{11} - u'_{22} \beta_1, \beta_2 u_{22} - u'_{00} \beta_2) \\ = (t_{00}, t_{11}, t_{22}, t_{10}, t_{21}, t_{02}). \end{aligned}$$

В разложениях элементов u'_{ii} по стандартному базису будем использовать обозначения, аналогичные (4.5), например,

$$u'_{00} = \sum_{j=0}^{s-1} (\mu_j^0)' \alpha_0^j + \sum_{m=1}^k (\eta_m^0)' d_0^m, \quad \text{где } (\mu_j^0)', (\eta_m^0)' \in \mathbb{F}.$$

Предложение 4.22. *Размерности ядер и образов σ_6^* , $\tilde{\sigma}_6^*$ описываются следующим образом:*

- а) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_6^* = s + t + u + 3k + 1$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_6^* = s + t + u + 3k - 1$.
 б) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \tilde{\sigma}_6^* = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_6^*$, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \tilde{\sigma}_6^* = \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_6^*$.

Доказательство. а) Пусть $\sigma_6^*(u_{00}, u_{11}, u_{22}, u'_{00}, u'_{11}, u'_{22}) = 0$. Тогда условия $t_{ii} = 0$, $t_{i+1,i} = 0$ приводят к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \mu_j^0 &= (\mu_j^0)', 1 \leq j \leq s-1, \\ \mu_j^1 &= (\mu_j^1)', 1 \leq j \leq t-1, \\ \mu_j^2 &= (\mu_j^2)', 1 \leq j \leq u-1, \\ \eta_m^0 &= (\eta_m^1)', 1 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^1 &= (\eta_m^2)', 1 \leq m \leq k-1, \\ \eta_m^2 &= (\eta_m^0)', 1 \leq m \leq k-1, \\ \mu_0^0 &= (\mu_0^0)' = \mu_1^0 = (\mu_1^0)' = \mu_2^0 = (\mu_2^0)'. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_6^* = s + t + u + 3k + 1$ и

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \sigma_6^* &= \dim_{\mathbb{F}} M_0^2 - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \sigma_6^* \\ &= (2s + 2t + 2u + 6k) - (s + t + u + 3k + 1) = s + t + u + 3k - 1. \end{aligned}$$

б) Утверждение следует из леммы 4.20. \square

4.4. Первый лист спектральной последовательности. Теперь мы можем описать первый лист E_1^{mn} спектральной последовательности бикомплекса $C^{\bullet\bullet}$ (см. теорему 4.5):

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} & \xrightarrow{-H^1(\tau_6^*)} & \dots \\
0 & \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \tilde{\sigma}_6^*} & \xrightarrow{H^1(\tilde{\tau}_6^*)} & \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \xrightarrow{H^1(\tau_5^*)} & \dots \\
\frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} & \xrightarrow{-H^1(\tau_6^*)} & \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \xrightarrow{-H^1(\tilde{\tau}_5^*)} & \frac{\text{Ker } \sigma_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & \xrightarrow{0} & \dots \\
\frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \xrightarrow{H^1(\tau_5^*)} & \frac{\text{Ker } \tilde{\sigma}_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\frac{\text{Ker } \sigma_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \quad (4.15) \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
0 & \longrightarrow & \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \rho_1^*} & \xrightarrow{H^1(\tilde{\rho}_2^*)} & \text{Ker}(\rho_1^*) & \longrightarrow & \dots \\
\frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \rho_1^*} & \xrightarrow{-H^1(\rho_2^*)} & \text{Ker}(\rho_1^*) & \xrightarrow{0} & \dots & & \\
\text{Ker}(\rho_1^*) & \xrightarrow{0} & \dots & & & &
\end{array}$$

Замечание 4.23. Напомним, что если f – горизонтальный дифференциал бикомплекса, то $H^1(f)$ обозначает индуцированное отображение на вертикальных когомологиях, точнее:

$$H^1(f)(\bar{u}) := \overline{f(u)},$$

если u лежит в соответствующем ядре. Также на первом листе были произведены очевидные упрощения на уровне объектов (см. следствия 4.11, 4.15 и лемму 4.20).

4.5. Вычисление горизонтальных когомологий.

Предложение 4.24. *Пространство $\frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \rho_1^*}$ допускает в качестве \mathbb{F} -базиса множество, состоящее из следующих элементов:*

$$\begin{aligned} (\alpha_0^j, 0, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq s; \\ (0, \alpha_1^j, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq t; \\ (0, 0, \alpha_2^j, 0), \quad 1 \leq j \leq u; \\ (0, 0, 0, \beta_2 d_2^m), \quad 0 \leq m \leq k-1. \end{aligned}$$

Доказательство. Из соотношений (4.9), определяющих $\text{Ker } \sigma_1^*$, легко следует, что пространство $\text{Ker } \sigma_1^*$ допускает в качестве \mathbb{F} -базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\begin{aligned} (\alpha_0^j, 0, 0, 0, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq s; \\ (0, \alpha_1^j, 0, 0, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq t; \\ (0, 0, \alpha_2^j, 0, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq u; \\ (0, 0, 0, \beta_0 d_0^m, -\beta_1 d_1^m, 0), \quad 0 \leq m \leq k-1; \\ (0, 0, 0, 0, \beta_1 d_1^m, -\beta_2 d_2^m), \quad 0 \leq m \leq k-1; \\ (0, 0, 0, 0, 0, \beta_2 d_2^m), \quad 0 \leq m \leq k-1. \end{aligned}$$

Теперь используя описание \mathbb{F} -базиса $\text{Im } \rho_1^*$ (см. замечание 4.10), завершаем доказательство. \square

Рассмотрим следующую матрицу над полем \mathbb{F}

$$C := \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & k \\ 0 & t & 0 & k \\ 0 & 0 & u & k \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Предложение 4.25. а) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } H^I(\rho_2^*) = s + t + u + k - \text{rk } C$,
 $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } H^I(\rho_2^*) = \text{rk } C$.

б) $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } H^I(\tilde{\rho}_2^*) = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } H^I(\rho_2^*)$,
 $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im } H^I(\tilde{\rho}_2^*) = \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } H^I(\rho_2^*)$.

Доказательство. а) Пусть $H^I(\rho_2^*)(w_{00}, w_{11}, w_{22}, u_{02}) = (t_{00}, t_{11}, t_{22}) = 0$. Рассмотрим разложения по стандартному базису

$$w_{00} := \sum_{j=1}^s \mu_j^0 \alpha_0^j, \quad w_{11} := \sum_{j=1}^t \mu_j^1 \alpha_1^j, \quad w_{22} := \sum_{j=1}^u \mu_j^2 \alpha_2^j, \quad u_{02} := \sum_{m=0}^{k-1} \eta_m^{02} \beta_2 d_2^m$$

($\mu_j^i, \eta_m^{02} \in \mathbb{F}$). Тогда условия $t_{ii} = 0$ приводят к однородной системе уравнений на коэффициенты $(\mu_1^0, \mu_1^1, \mu_1^2, \eta_0^{02})$ с матрицей:

$$C' := \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & -k \\ 0 & t & 0 & -k \\ 0 & 0 & u & -k \end{pmatrix}.$$

Но $\text{rk } C' = \text{rk } C$, и, таким образом, $\dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } H^I(\rho_2^*) = s + t + u + k - \text{rk } C$,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } H^I(\rho_2^*) &= \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \rho_1^*} - \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } H^I(\rho_2^*) \\ &= (s + t + u + k) - (s + t + u + k - \text{rk } C) = \text{rk } C. \end{aligned}$$

б) Аналогичным образом при рассмотрении $\text{Ker } H^I(\tilde{\rho}_2^*)$ получается однородная система уравнений с матрицей C , и можно применить предыдущие рассуждения. \square

Замечание 4.26. Пространство $\text{Im } \sigma_5^*$ допускает в качестве \mathbb{F} -базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\begin{aligned} &(\alpha_0^j, 0, 0, \alpha_0^j, 0, 0), \quad 1 \leq j \leq s; \\ &(0, \alpha_1^j, 0, 0, \alpha_1^j, 0), \quad 1 \leq j \leq t; \\ &(0, 0, \alpha_2^j, 0, 0, \alpha_2^j), \quad 1 \leq j \leq u; \\ &(d_0^m, 0, 0, 0, d_1^m, 0), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(0, d_1^m, 0, 0, 0, d_2^m), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(0, 0, d_2^m, d_0^m, 0, 0), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(0, \alpha_1^t, 0, 0, 0, \alpha_2^u); \\ &(0, 0, \alpha_2^u, \alpha_0^s, 0, 0). \end{aligned}$$

Предложение 4.27. $H^1(\tau_5^*) = H^1(\tilde{\tau}_5^*) = 0$.

Доказательство. Используя предложения 4.21 и 4.22, получаем, что

$$\dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} = 2.$$

Элементы $x = (e_0, e_1, e_2, e_0, e_1, e_2)$, $y = (0, 0, 0, 0, 0, \alpha_2^u)$ лежат в $\text{Ker } \sigma_6^*$, при этом их классы \bar{x}, \bar{y} образуют базис пространства $\text{Ker } \sigma_6^* / \text{Im } \sigma_5^*$. Но $\tau_5^*(x) = \tilde{\tau}_5^*(x) = \tau_5^*(y) = \tilde{\tau}_5^*(y) = 0$, откуда следует требуемое утверждение. \square

Замечание 4.28. Пространство $\text{Im } \sigma_6^*$ допускает в качестве \mathbb{F} -базиса множество, состоящее из следующих элементов:

$$\begin{aligned} &(\alpha_0^j, 0, 0, 0, 0, 0), \quad 2 \leq j \leq s; \\ &(0, \alpha_1^j, 0, 0, 0, 0), \quad 2 \leq j \leq t; \\ &(0, 0, \alpha_2^j, 0, 0, 0), \quad 2 \leq j \leq u; \\ &(0, 0, 0, \beta_0 d_0^m, 0, 0), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(0, 0, 0, 0, \beta_1 d_1^m, 0), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(0, 0, 0, 0, 0, \beta_2 d_2^m), \quad 1 \leq m \leq k-1; \\ &(\alpha_0, 0, 0, 0, 0, -\beta_2); \\ &(0, \alpha_1, 0, -\beta_0, 0, 0); \\ &(0, 0, \alpha_2, 0, -\beta_1, 0); \\ &(-\alpha_0, 0, 0, \beta_0, 0, 0); \\ &(0, -\alpha_1, 0, 0, \beta_1, 0). \end{aligned}$$

Базис $\text{Im } \tilde{\sigma}_6^*$ получается из базиса $\text{Im } \sigma_6^*$ заменой минусов на плюсы в последних пяти векторах.

Предложение 4.29. $H^1(\tau_6^*) = H^1(\tilde{\tau}_6^*) = 0$.

Доказательство. Используя предложения 4.16, 4.22 получаем, что

$$\dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \tilde{\sigma}_6^*} = 1.$$

Ясно, что класс элемента $x = (0, 0, 0, 0, 0, \beta_2) \in \text{Ker } \sigma_1^*$ порождает и пространство $\text{Ker } \sigma_1^* / \text{Im } \sigma_6^*$, и пространство $\text{Ker } \sigma_1^* / \text{Im } \tilde{\sigma}_6^*$. Но $\tilde{\tau}_6^*(x) = -\tau_6^*(x) = (0, 0, \alpha_2^u, \alpha_0^s, 0, 0) = \sigma_5^*(0, 0, c_0, 0, 0, 0) \in \text{Im } \sigma_5^*$, откуда следует требуемое утверждение. \square

4.6. Второй лист спектральной последовательности. Теперь мы можем описать второй лист E_2^{mn} исследуемой спектральной последовательности:

$$\begin{array}{cccc}
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} & \dots \\
 0 & \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \tilde{\sigma}_6^*} & \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \dots \\
 \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} & \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \frac{\text{Ker } \sigma_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & \dots \\
 \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} & \frac{\text{Ker } \tilde{\sigma}_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & 0 & \dots \\
 \frac{\text{Ker } \sigma_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & \dots \\
 0 & \text{Ker } H^I(\tilde{\rho}_2^*) & \frac{\text{Ker}(\rho_1^*)}{\text{Im } H^I(\tilde{\rho}_2^*)} & \dots \\
 \text{Ker } H^I(\rho_2^*) & \frac{\text{Ker}(\rho_1^*)}{\text{Im } H^I(\rho_2^*)} & \dots & \\
 \text{Ker}(\rho_1^*) & \dots & &
 \end{array} \tag{4.17}$$

Замечание 4.30. Все дифференциалы второго листа нулевые, поэтому они не изображены.

4.7. Когомологии Хохшильда.

Замечание 4.31. Прежде всего заметим, что первые пять главных диагоналей уже выродились (а значит, на бесконечном слое $\{E_\infty^{ij}\}_{i,j}$ они будут точно такими же). Это позволяет (см. [23], стр. 4) извлечь размерности $\mathrm{HH}^n(R)$ при $n \leq 4$, суммируя размерности по соответствующим главным диагоналям второго листа, и тем самым мы получаем следующие утверждения.

Предложение 4.32. Пусть $R = R^{k,s,t,u}$ – алгебра серии $D(3\mathcal{R})$. Тогда:

$$(a) \quad \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^0(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker}(\rho_1^*) = s + t + u + k; \quad (4.18)$$

$$(b) \quad \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^1(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker} \mathrm{H}^1(\rho_2^*) = s + t + u + k - \mathrm{rk} C; \quad (4.19)$$

$$(v) \quad \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^2(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker}(\rho_1^*) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im} \mathrm{H}^1(\rho_2^*) \\ = s + t + u + k - \mathrm{rk} C; \quad (4.20)$$

$$(r) \quad \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^3(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker} \mathrm{H}^1(\tilde{\rho}_2^*) = s + t + u + k - \mathrm{rk} C; \quad (4.21)$$

$$(d) \quad \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^4(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Ker}(\rho_1^*) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{Im} \mathrm{H}^1(\tilde{\rho}_2^*) \\ = s + t + u + k - \mathrm{rk} C, \quad (4.22)$$

где C – матрица из (4.16).

Пусть $\mathcal{X}^\bullet := \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$, где X_\bullet – комплекс из предложения 3.2. Как и выше, мы отождествляем элементы

$$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X_n, R) \subset \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$$

с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$ (см. замечание 4.1).

Из описания минимальной Λ -проективной резольвенты алгебры R , построенной в разделе 3, вытекает, что комплекс \mathcal{X}^\bullet в больших степенях 6-периодичен; более точно, при $n \geq 9$

$$\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n = \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{n-6},$$

и следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^{n-6}(\mathcal{X}^\bullet)$$

при $n \geq 10$. Кроме того, $\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) = \mathrm{HH}^n(R)$ при $0 \leq n \leq 2$.

В следующем предложении мы опишем $\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ для $4 \leq n \leq 9$.

Предложение 4.33.

$$\dim_{\mathbb{F}} H^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0; \quad (4.23)$$

$$\dim_{\mathbb{F}} H^5(\mathcal{X}^\bullet) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} = 1; \quad (4.24)$$

$$\dim_{\mathbb{F}} H^6(\mathcal{X}^\bullet) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} = 2; \quad (4.25)$$

$$\dim_{\mathbb{F}} H^7(\mathcal{X}^\bullet) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \sigma_6^*} + \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \tilde{\sigma}_5^*}{\text{Im } \sigma_4^*} = 2; \quad (4.26)$$

$$\dim_{\mathbb{F}} H^8(\mathcal{X}^\bullet) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_6^*}{\text{Im } \sigma_5^*} = 2; \quad (4.27)$$

$$\dim_{\mathbb{F}} H^9(\mathcal{X}^\bullet) = \dim_{\mathbb{F}} \frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \tilde{\sigma}_6^*} = 1. \quad (4.28)$$

Доказательство. Комплекс \mathcal{X}^\bullet можно рассмотреть как тотализацию бикомплекса $\mathcal{N}^{\bullet\bullet}$, состоящего из первых двух (ненулевых) столбцов бикомплекса $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$ из (4.1) (см. также (4.4)). Второй лист спектральной последовательности, соответствующей бикомплексу $\mathcal{N}^{\bullet\bullet}$, совпадает в первыми двумя (ненулевыми) столбцами второго листа спектральной последовательности бикомплекса $\mathcal{C}^{\bullet\bullet}$ (см. (4.17)), за одним исключением: вместо $\text{Ker } H^1(\tilde{\rho}_2^*)$ должно стоять $\frac{\text{Ker } \sigma_1^*}{\text{Im } \rho_1^*}$ (здесь следует учесть предложения 4.27 и 4.29). Поэтому требуемое утверждение о размерностях $H^n(\mathcal{X}^\bullet)$, $4 \leq n \leq 9$, получается с помощью суммирования размерностей по соответствующим диагоналям “двухстолбцового подлиста” в (4.17). \square

Теорема 4.34. Для $n \geq 5$

$$\dim_{\mathbb{F}} \text{HH}^n(R) - \dim_{\mathbb{F}} \text{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \equiv 4 \pmod{6}, \\ 1, & \text{если } n \equiv 3 \text{ или } 5 \pmod{6}, \\ 2, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Короткая точная последовательность (3.2) после применения функтора $\text{Hom}_\Lambda(-, R)$ даёт короткую точную последовательность комплексов

$$0 \rightarrow \text{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \text{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \rightarrow 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной кохомологической последовательности

$$\dots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathbb{H}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{H}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathbb{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathbb{H}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \dots \quad (4.29)$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathbb{H}^n(R) - \dim_{\mathbb{F}} \mathbb{H}^{n-4}(R) = \dim_{\mathbb{F}} \text{Ker } \Delta^n - \dim_{\mathbb{F}} \text{Im } \Delta^{n-1}. \quad (4.30)$$

Таким образом, нам достаточно описать ядра и образы связывающих гомоморфизмов из последовательности (4.29).

Лемма 4.35. Пусть $n \geq 4$, тогда $\Delta^n = 0$.

Доказательство. Напомним, что связывающий гомоморфизм Δ^n строится следующим образом. Пусть $u \in \text{Ker } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n$, и пусть

$$\tilde{u} := (O, u) \in \text{Hom}_\Lambda(Q_n, R) \quad (4.31)$$

– доопределение u нулём на всё $Q_n = Q_{n-4} \oplus X_n$. Так как $i^*(\tilde{u}) = u$, то существует $v \in \text{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ такой, что $\pi^*(v) = \delta^n(\tilde{u})$, при этом v – коцикл, и тогда полагают $\Delta(\text{cl } u) := \text{cl } v$.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Hom}_\Lambda(Q_n, R) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{X}^n & \longrightarrow & 0 \\ & & \delta^{n-4} \downarrow & & \downarrow \delta^n & & \downarrow \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R) & \xrightarrow{\pi^*} & \text{Hom}_\Lambda(Q_{n+1}, R) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{X}^{n+1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Так как $X_n = \mathcal{D}_{1,n-1} \oplus \mathcal{D}_{0,n}$ (где $\mathcal{D}_{\bullet\bullet}$ из (3.1)), то нам будет удобно представлять $u \in \text{Hom}_\Lambda(X_n, R) = \mathcal{C}^{1,n-1} \oplus \mathcal{C}^{0,n}$ в виде $u = (x, y)$, где $x \in \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{D}_{1,n-1}, R) = \mathcal{C}^{1,n-1}$, $y \in \text{Hom}_\Lambda(\mathcal{D}_{0,n}, R) = \mathcal{C}^{0,n}$, при этом, как обычно, x, y описываются наборами своих значений на образующих неразложимых прямых слагаемых Λ -модулей $\mathcal{D}_{1,n-1}, \mathcal{D}_{0,n}$ (см. замечание 4.1).

Пусть $i \equiv (n-4) \pmod{6}$. Далее считаем, что все арифметические операции с индексом i осуществляются относительно полной системы вычетов $\{1, \dots, 6\}$ по модулю 6.

Заметим, что матрица дифференциала δ^n имеет следующий блочно-треугольный вид:

$$\delta^n = \left(\begin{array}{c|cc} \delta^{n-4} & 0 & 0 \\ \hline (-1)^{i+1} \tilde{\tau}_{i+1}^* & 0 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{\sigma}_{i+2}^* & (-1)^i \tau_{i+3}^* \\ & 0 & \sigma_{i+4}^* \end{array} \right).$$

При этом в матрице дифференциала δ^{n-4} в правом нижнем углу стоит 6×6 -блок, равный σ_i^* , а выше этого блока стоит $(-1)^i \tau_{i-1}^*$. Заметим также, что Δ^n полностью определяется морфизмом $\tilde{\tau}_{i+1}^*$.

Случай 1. $n \equiv 0$ или $5 \pmod{6}$.

Тогда по лемме 4.13, б) $\tilde{\tau}_{i+1}^* = 0$, поэтому $\Delta^n = 0$.

Случай 2. $n \equiv 4 \pmod{6}$.

Тогда по предложению 4.33 $H^n(\mathcal{X}^\bullet) = 0$, поэтому $\Delta^n = 0$.

Случай 3. $n \equiv 3 \pmod{6}$.

Тогда по лемме 4.13, б) $\tilde{\tau}_{i+3}^* = \tilde{\tau}_2^* = 0$, поэтому $\delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n = \tilde{\sigma}_1^* \oplus \sigma_3^*$. Следовательно, класс элемента $x = (O_5, \beta_2, O_6)$ порождает $H^9(\mathcal{X}^\bullet)$ ($x \notin \text{Im } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{n-1}$ так как $\tau_1^*(\text{Ker } \sigma_2^*) = 0$). Вычисления предложения 4.29 показывают, что $\Delta^n(\bar{x}) = (O, 0, 0, \alpha_2^u, \alpha_0^s, 0, 0) =: y$, но $y \in \text{Im } \delta^{n-4}$, так как $\sigma_5(O_2, c_1, O_3) = (O_2, \alpha_2^u, \alpha_0^s, O_2)$, и при этом $\tau_4(O_2, c_1, O_3) = 0$ (а значит, $\delta^{n-4}(O, 0, 0, c_1, 0, 0, 0) = y$). Поэтому и в этом случае $\Delta^n = 0$.

Случай 4. $n \equiv 2 \pmod{6}$.

В этом случае классы элементов

$$x = (e_0, e_1, e_2, e_0, e_1, e_2, O_6), \quad y = (O_5, \alpha_2^u, O_6)$$

порождают $H^8(\mathcal{X}^\bullet)$ ($x, y \notin \text{Im } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{n-1}$, так как $\tau_6^*(\text{Ker } \sigma_1^*) \subset \text{Im } \tilde{\sigma}_5^*$). В доказательстве предложения 4.27 получено, что $\tilde{\tau}_5^*(e_0, e_1, e_2, e_0, e_1, e_2) = \tilde{\tau}_5^*(O_5, \alpha_2^u) = 0$, и, следовательно, $\Delta^n = 0$.

Случай 5. $n \equiv 1 \pmod{6}$.

В этом случае классы элементов

$$x = (\beta_2 \beta_1 d_1^{k-1}, \beta_0 \beta_2 d_2^{k-1}, \beta_1 \beta_0 d_0^{k-1}, \alpha_0^{s-1}, \alpha_1^{t-1}, \alpha_2^{u-1}, O_6),$$

$$y = (O_2, -\beta_1 \beta_0 d_0^{k-1}, O_8, \beta_2)$$

порождают $H^7(\mathcal{X}^\bullet)$. Действительно, то, что $x, y \in \text{Ker } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^n$ проверяется прямым вычислением. При этом $x \notin \text{Im } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{n-1}$, так как $\tau_5^*(\text{Ker } \sigma_6^*) = 0$ и

$$(\beta_2 \beta_1 d_1^{k-1}, \beta_0 \beta_2 d_2^{k-1}, \beta_1 \beta_0 d_0^{k-1}, \alpha_0^{s-1}, \alpha_1^{t-1}, \alpha_2^{u-1}) \notin \text{Im } \tilde{\sigma}_4^*,$$

а $y \notin \text{Im } \delta_{\mathcal{X}^\bullet}^{n-1}$, так как $(O_5, \beta_2) \notin \text{Im } \sigma_6^*$. Но

$$\begin{aligned} & \tilde{\tau}_4^*(\beta_2 \beta_1 d_1^{k-1}, \beta_0 \beta_2 d_2^{k-1}, \beta_1 \beta_0 d_0^{k-1}, \alpha_0^{s-1}, \alpha_1^{t-1}, \alpha_2^{u-1}) \\ &= \tilde{\tau}_4^*(O_2, -\beta_1 \beta_0 d_0^{k-1}, O_3) = 0, \end{aligned}$$

и снова получаем, что $\Delta^n = 0$. □

Из соотношения (4.30) и леммы 4.35 следует, что при $n \geq 5$

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^n(R) = \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$$

и это с учётом предложения 4.33 завершает доказательство теоремы 4.34. \square

Следствие 4.36. *Для любого $n \geq 13$*

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-12}(R) = 4.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} & \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-12}(R) \\ &= \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^n(R) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \\ & \quad - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-8}(R) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-8}(R) - \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{HH}^{n-12}(R) \\ &= \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^{n-4}(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^{n-8}(\mathcal{X}^\bullet). \end{aligned}$$

Так как $(6, 4) = 2$, то достаточно доказать для $n = 13, 14$. Подставляя, получаем:

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet) = 2 + 1 + 1 = 4,$$

$$\dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) + \dim_{\mathbb{F}} \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet) = 2 + 0 + 2 = 4.$$

\square

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, I: серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике 2. — Алгебра и анализ, т. **16** (2004), вып. 6, 53–122.
2. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, II. Локальные алгебры. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. **375** (2010), 92–129.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, III. Локальные алгебры в характеристике 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астроном. Вып. **1** (2010), 28–38.
4. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, IV. Серия $D(2\mathcal{B})(k, s, 0)$. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. **423** (2014), 67–104.
5. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, V. Серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике, отличной от 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. **430** (2014), 74–102.
6. А. И. Генералов, Д. Б. Романова, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа*, VI. Серия $D(2\mathcal{B})(k, s, 1)$. — Алгебра и анализ, т. **27** (2015), 6, 89–116.
7. К. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg. 1990.

8. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп*. — Алгебра и анализ, т. 21 (2009), вып. 2, 1–51.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, II. *Локальные алгебры*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 386 (2011), 144–202.
10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике 2*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 400 (2012), 133–157.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, IV. *Алгебра когомологий для серии $SD(2\mathcal{B})_2(k, t, c)$ при $c = 0$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ, 413 (2013), 45–92.
12. А. И. Генералов, И. М. Зильберборд, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, V. *Серия $SD(3\mathcal{K})$* . — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 435 (2015), 5–32.
13. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, VI. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике, отличной от 2*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 443 (2016), 61–77.
14. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа*, VII. *Алгебры с малым параметром*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 452 (2016), 52–69.
15. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, 452 (2016), 70–85.
16. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа*, I: *обобщенные группы кватернионов*. — Алгебра и анализ, т. 18 (2006), вып. 1, 55–107.
17. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа*, II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике 2*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 349 (2007), 53–134.
18. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа*, III. *Алгебры с малым параметром*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 356 (2008), 46–84.
19. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$ над полем характеристики не 2*. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер.1. Мат., мех., астрон. Вып.1 (2010), 63–72.
20. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хопфеля*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010) 61–70.
21. A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, *Projective Resolutions and Yoneda algebras for algebras of Dihedral Type*. — Algebras and Representation Theory **10** (2007) 241–256.
22. N. V. Kosmatov, *Resolut.*
<http://nikolai.kosmatov.free.fr/resolut/index.htm>
23. R. Vakil, *Spectral Sequences: Friend or Foe?*
<http://math.stanford.edu/~vakil/0708-216/216ss.pdf>

Generalov A. I., Filippov M. A. Hochschild cohomology for algebras of dihedral type, VII. The family $D(3\mathcal{R})$.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of dihedral type which are contained in the family $D(3\mathcal{R})$ (from the famous K.Erdmann's classification). In the calculation, we use the beforehand construction of the minimal bimodule resolution for algebras from the family under discussion.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com
E-mail: soporhs@gmail.com

Поступило 30 октября 2017 г.