Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 460, 2017 г.

А. И. Генералов, А. А. Зайковский

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VIII. СЕРИЯ $SD(2\mathcal{B})_1$.

§1. Введение

Работа является продолжением предыдущей работы авторов [1], в которой на основе построения начального отрезка минимальной бимодульной проективной резольвенты для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_1$ (в обозначениях книги [2]) были вычислены группы когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ при $n \leqslant 3$. Это позволило, в частности, после сравнения с результатами подобных вычислений для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_2$ (см. [3–5]) обнаружить, что алгебры из серии $SD(2\mathcal{B})_1$ не могут быть производно эквивалентны (а следовательно, не могут быть и Морита-эквивалентны) алгебрам из серии $SD(2\mathcal{B})_2$, имеющим те же параметры. В настоящей работе мы строим целиком минимальную бимодульную резольвенту для алгебр серии $SD(2\mathcal{B})_1$, а затем с ее использованием вычисляем все группы $\mathrm{HH}^n(R)$, $n \geqslant 0$.

Напомним, что алгебры полудиэдрального типа, введенные К. Эрдманн в работах [6, 7], являются естественным обобщением групповых блоков с полудиэдральной дефектной группой. Поэтому результаты наших вычислений могут быть применены к таким групповым блокам.

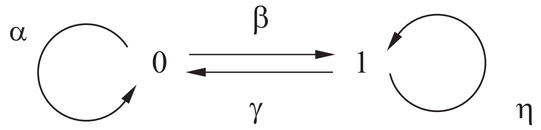
§2. Формулировка основного результата

Алгебры $SD(2\mathcal{B})_1(k, s, c)$ серии $SD(2\mathcal{B})_1$ над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики p описываются с помощью следующего колчана с соотношениями:

Ключевые слова: группы когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00258. Первый из авторов благодарит за частичную поддержку грант НШ-9721.2016.1 Президента РФ по государственной поддержке ведущих школ РФ.

$Q^{(\mathcal{B})}:$



$$\left.\begin{array}{c}\beta\gamma = \gamma\eta = \eta\beta = 0,\ \alpha^2 = \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} + c(\alpha\gamma\beta)^k,\\ \eta^s = (\beta\alpha\gamma)^k,\ (\gamma\beta\alpha)^k = (\alpha\gamma\beta)^k,\end{array}\right\}$$

где $k, s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2, c \in \{0, 1\}$ (композицию путей мы записываем справа налево). Отметим, что если $\operatorname{char} K \neq 2$, то можно считать, что $c = 0$ (достаточно α заменить на $\alpha - \frac{1}{2}c\gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1}$).

Основной результат работы – это следующее описание групп когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^n(R)$ для алгебр из серии $SD(2\mathcal{B})_1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{B})_1(k, s, c)$*, где* $k, s \in \mathbb{N}, s \geqslant 2, c \in \{0, 1\}$.
(I) *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$. *Тогда для любого* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 2, & \text{\textit{если} } n \equiv 1 \pmod 3,\\ 3 & \text{\textit{в остальных случаях.}}\end{cases}$$

(II) *Пусть* $\operatorname{char} K \neq 2$. *Тогда для любого* $n \geqslant 5$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если} } n \equiv 1 \pmod 6\\ & \text{\textit{или} } n \equiv 3 \pmod 6,\\ 2, & \text{\textit{если} } n \equiv 2 \pmod 6,\\ 0 & \text{\textit{в остальных случаях.}}\end{cases}$$

С учетом того, что размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ при $0 \leqslant n \leqslant 3$ были вычислены ранее в [1], а при $n = 4$ описываются ниже в предложении 4.1, мы действительно из теоремы 2.1 получаем описание всех групп $\mathrm{HH}^n(R)$.

Отметим также следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 2.1.

Следствие 2.2. *Пусть* $R = SD(2\mathcal{B})_1(k, s, c)$, $p := \operatorname{char} K$. *Тогда при* $n \geqslant 13$

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-12}(R) = \begin{cases} 8, & \text{\textit{если} } p = 2,\\ 2, & \text{\textit{если} } p \neq 2.\end{cases}$$

Замечание 2.3. Из следствия 2.2 легко вытекает, что ряд Пуанкаре $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dim_K \mathrm{HH}^n(R)t^n$ алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ является рациональной функцией.

§3. Построение резольвенты

Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k,s,c)$, и пусть $\Lambda := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$ – обертывающая алгебра алгебры R. Через e_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры R, соответствующие вершинам колчана $Q^{(\mathcal{B})}$. Тогда Λ-модули

$$P_{ij} = \Lambda(e_i \otimes e_j),\ i, j \in \{0, 1\},$$

составляют полное множество представителей главных неразложимых левых Λ-модулей.

Умножение справа на элемент $w \in \Lambda$ индуцирует эндоморфизм w^* левого Λ-модуля Λ, кроме того, если $w \in (e_i \otimes e_j)\Lambda(e_k \otimes e_l)$, то w^* индуцирует гомоморфизм $w^* \colon P_{ij} \to P_{kl}$; в дальнейшем ради простоты мы будем часто гомоморфизм умножения (справа) на $w \in \Lambda$ также обозначать через w.

Введём краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$b := \alpha\gamma\beta,\ g := \beta\alpha\gamma,\ a := \gamma\beta\alpha.$$

Стандартным базисом алгебры R будем называть множество

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{00} \cup \mathcal{B}_{10} \cup \mathcal{B}_{01} \cup \mathcal{B}_{11},$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{00} &= \{b^{i+1},\ a^i,\ \gamma\beta b^i,\ \alpha a^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{10} &= \{\beta b^i,\ \beta\alpha a^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{01} &= \{\gamma g^i,\ \alpha\gamma g^i \mid 0 \leqslant i \leqslant k-1\},\\
\mathcal{B}_{11} &= \{\eta^i \mid 0 \leqslant i \leqslant s\} \cup \{g^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\}.
\end{aligned}$$

В категории (левых) Λ-модулей мы сейчас опишем комплекс, который окажется минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.

Положим

$$\begin{aligned}
Q_0 &:= P_{00} \oplus P_{11},\\
Q_1 &:= \Lambda = P_{00} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10},\\
Q_2 &:= P_{00} \oplus P_{11}^2 \oplus P_{10} \oplus P_{01},\\
Q_3 &:= P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^2,
\end{aligned}$$

и далее по индукции для $n \geqslant 1$:

$$\left.\begin{aligned}
Q_{3n+1} &:= Q_{3n-3} \oplus P_{11} \oplus P_{10} \oplus P_{01} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10},\\
Q_{3n+2} &:= Q_{3n-2} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^3 \oplus P_{10} \oplus P_{01},\\
Q_{3n+3} &:= Q_{3n-1} \oplus P_{11} \oplus P_{01} \oplus P_{10} \oplus P_{00} \oplus P_{11}^2.
\end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Для описания дифференциалов в резольвенте, которую мы строим, введем следующие вспомогательные матрицы:

$$R_0 = \begin{pmatrix} 0 & -e_0 \otimes \gamma & \beta \otimes e_0 \\ -\eta \otimes e_1 & 0 & -e_1 \otimes \beta \\ e_1 \otimes \eta & \gamma \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \otimes \beta & \gamma \otimes e_1 \\ -\beta \otimes e_1 & 0 & -e_0 \otimes \eta \\ -e_1 \otimes \gamma & -\eta \otimes e_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & e_1 \otimes \eta & \eta \otimes e_1 \\ \gamma \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \gamma \\ -e_0 \otimes \beta & -\beta \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -e_0 \otimes \gamma & -\beta \otimes e_0 \\ \eta \otimes e_1 & 0 & e_1 \otimes \beta \\ -e_1 \otimes \eta & -\gamma \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1 \otimes \beta & -\gamma \otimes e_1 \\ \beta \otimes e_1 & 0 & e_0 \otimes \eta \\ -e_1 \otimes \gamma & \eta \otimes e_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R_5 = \begin{pmatrix} 0 & -e_1 \otimes \eta & -\eta \otimes e_1 \\ -\gamma \otimes e_0 & 0 & -e_1 \otimes \gamma \\ e_0 \otimes \beta & \beta \otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_0 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha \otimes e_0 & -e_0 \otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ -e_1 \otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1} \otimes e_1 \\ \eta^{s-1} \otimes e_1 & -e_1 \otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & e_1\otimes \eta^{s-1} \\ -e_0\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_0 & e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ -e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 & -e_0\otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_3 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_0 & e_0\otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ e_1\otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 \\ \eta^{s-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_4 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes \eta^{s-1} \\ -e_0\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_0 & -e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_5 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 & e_0\otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$L_0 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & -e_1\otimes \eta^{s-1} \\ e_0\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_0 & -e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 & e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 & e_0\otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_0 & -e_0\otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ -e_1\otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 \\ \eta^{s-1}\otimes e_1 & e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 0 & \eta^{s-1}\otimes e_1 & e_1\otimes \eta^{s-1} \\ e_0\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 \\ \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_0 & e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

$$L_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 & e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha \\ -e_1\otimes \alpha\gamma g^{k-1} & 0 & \eta^{s-1}\otimes e_0 \\ g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_1 & -e_0\otimes \eta^{s-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

$$L_5 = \begin{pmatrix} 0 & g^{k-1}\beta\alpha\otimes e_0 & e_0\otimes \alpha\gamma g^{k-1} \\ e_1\otimes \eta^{s-1} & 0 & \alpha\gamma g^{k-1}\otimes e_1 \\ \eta^{s-1}\otimes e_1 & e_1\otimes g^{k-1}\beta\alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Замечание 3.1. Отметим, что если $\operatorname{char} K = 2$, то $L_i = D_{i-2}$, а также $R_i = R_{i-3}, D_i = D_{i-3}$ (где индексы i рассматриваются по модулю 6).

Далее рассмотрим гомоморфизмы $d_i \in \operatorname{Hom}(Q_{i+1}, Q_i)$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, определяемые матрицами:

$$d_0 = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha & 0 & -e_0\otimes\gamma & \beta\otimes e_0 \\ 0 & e_1\otimes\eta - \eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta \end{pmatrix},$$

$$d_1 = \left(\begin{array}{c|c} A & \begin{array}{c} \mathrm{O} \\ \hline R_1 \end{array} \end{array}\right),$$

где A – 4×2-матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\otimes\gamma g^{k-1-i} \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1} \eta^i\otimes\eta^{s-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha\otimes g^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\alpha\gamma g^{k-1-i} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} A_{11} &= -\,\alpha\otimes e_0 - e_0\otimes\alpha + \sum_{i=0}^{k-2} a^i\gamma\beta\otimes\gamma\beta b^{k-2-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\otimes\gamma\beta b^{k-1-i}, \\ A_{31} &= \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes\beta b^{k-1-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\otimes\beta b^{k-1-i}, \\ A_{41} &= \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\otimes b^{k-1-i} + c\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\gamma\otimes b^{k-1-i}; \end{aligned}$$

$$d_2 = \left(\begin{array}{c|c} B & \mathrm{O} \\ \hline D_2 & R_2 \end{array}\right),$$

где B – 2×3-матрица вида

$$B = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ e_1\otimes\eta - \eta\otimes e_1 & \gamma\otimes e_1 & -e_1\otimes\beta \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} B_{12} =&\alpha\otimes\gamma - e_0\otimes\alpha\gamma + c\alpha\otimes\alpha\gamma - c\alpha^2\otimes\gamma\\ &- c^2\alpha^2\otimes\alpha\gamma + c^2\alpha^3\otimes\gamma + c^3\alpha^3\otimes\alpha\gamma,\\ B_{13} =&\beta\alpha\otimes e_0 - \beta\otimes\alpha + c\beta\alpha\otimes\alpha; \end{aligned}$$

$$d_3 = \left(\begin{array}{c|c|c} C & -R_4 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & D_3 & R_3 \end{array}\right),$$

где C – 3×2-матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sum\limits_{i=0}^{s-1}\eta^i\otimes\eta^{s-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\beta\alpha\otimes g^{k-1-i} \\ * & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i\otimes\alpha\gamma g^{k-1-i} \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{aligned} C_{21} =&\sum_{i=0}^{k-1} b^i\alpha\otimes\beta b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\otimes g^{k-1-i}\beta\alpha,\\ C_{31} =&\sum_{i=0}^{k-1}\alpha\gamma g^i\otimes b^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} a^i\gamma\otimes\alpha a^{k-1-i}\\ &- ca^{k-1}\gamma\otimes\alpha^2 + c^2a^{k-1}\gamma\otimes\alpha^3; \end{aligned}$$

$$d_4 = \left(\begin{array}{c|c|c} d_0 & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline L'_4 & -R_5 & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & D_4 & R_4 \end{array}\right),$$

где

$$L'_4 = \left(\begin{array}{c|c} * & \\ 0 & L_4 \\ 0 & \end{array}\right)$$

и на позиции $(1,1)$ в матрице L'_4 стоит элемент

$$a^{k-1}\gamma\otimes\beta b^{k-1} + c\alpha a^{k-1}\gamma\otimes\beta b^{k-1}.$$

Наконец, для $n \geqslant 5$ определим дифференциалы рекурсивно с помощью формулы

$$d_n = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d_{n-4}} & \mathrm{O} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & L_n & -R_{n+1} & \mathrm{O} \\ \hline \mathrm{O} & \mathrm{O} & D_n & R_n \end{array}\right). \tag{3.8}$$

Рассмотрим также пополняющее отображение $\mu\colon Q_0 = P_{00} \oplus P_{11} \to R$, индуцированное умножением в R: $\mu(r \otimes s) = rs$.

Теорема 3.2. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_1(k, s, c)$, где $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$, $c \in K$. Тогда построенная выше последовательность $Q_\bullet = (Q_n, d_n)_{n \geqslant 0}$ вместе с пополняющим отображением $\mu\colon Q_0 \to R$ является минимальной Λ-проективной резольвентой алгебры R.*

Доказательство. То, что последовательность $(Q_n, d_n)_{n\geqslant 0}$ – комплекс и $\mu \cdot d_0 = 0$, проверяется прямыми вычислениями. Для доказательства ацикличности получающегося комплекса мы используем теорему 1 из [8]. Нам достаточно доказать, что после тензорного умножения комплекса $\mu\colon Q_\bullet \to R$ на простой R-модуль S_i мы получаем минимальную проективную резольвенту модуля S_i (такие резольвенты модулей S_i, $i = 0, 1$, описаны в [9]). Это также проверяется прямыми вычислениями; необходимые проверки оставляются читателю. □

§4. Группы когомологий

Пусть по-прежнему $R = SD(2\mathcal{B})_1(k, s, c)$ – K-алгебра, определенная в разделе 2, и пусть $p := \operatorname{char} K$; кроме того, при $p \neq 2$ считаем, что $c = 0$.

Для вычисления когомологий $\mathrm{HH}^n(R)$ алгебры R мы используем комплекс

$$\big(\operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R),\ \ \delta^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(d_n^Q, R)\big)_{n \geqslant 0}, \tag{4.1}$$

который получается применением функтора $\operatorname{Hom}_\Lambda(\,-\,, R)$ к бимодульной резольвенте $Q_\bullet \to R$ алгебры R, построенной в разделе 3. Как и в [1], любой Λ-гомоморфизм $f\colon Q_n \to R$ отождествляется с набором своих значений на соответствующих образующих $e_i \otimes e_j$ тех $P_{ij} = \Lambda \cdot (e_i \otimes e_j)$, которые входят в разложение модуля Q_n; при этом $f(e_i \otimes e_j) \in e_i R e_j$.

Напомним, что размерности групп $\mathrm{HH}^n(R)$ при $n \leqslant 3$ были вычислены в [1]. В дополнение к этому опишем группу $\mathrm{HH}^4(R)$.

Предложение 4.1. (1) *Если $p \neq 2$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ k+s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ не делятся на } p, \\ k+s+1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(2) *Если $p = 2$, то*

$$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+s+4, & \text{если } k \text{ и } s \text{ четны,} \\ k+s+3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. (1) Пусть $p \neq 2$. Аналогично доказательству предложения 4.2 в [1], мы рассматриваем образы под действием δ^4 элементов стандартного базиса в Q_4 и затем легко получаем базис пространства $\operatorname{Im} \delta^4$, а именно, в качестве такового можно взять следующее множество:

$$\bigl(b^i - a^i, \mathrm{O}_9\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.2}$$

$$\bigl(\alpha a^i, 0, -\gamma g^i, \mathrm{O}_7\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.3}$$

$$\bigl(-\alpha a^i, \mathrm{O}_2, \beta a^i, \mathrm{O}_6\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.4}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_2, -\alpha\gamma g^i, \beta\alpha a^i, \mathrm{O}_6\bigr) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.5}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_5, \eta^i, \eta^i, \mathrm{O}_3\bigr) \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant s-1; \tag{4.6}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_4, \gamma\beta b^i, \mathrm{O}_5\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.7}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_4, a^i, 0, g^i, \mathrm{O}_3\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.8}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_8, \beta b^i, \gamma g^i\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1; \tag{4.9}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_7, g^i, \mathrm{O}_2\bigr) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k; \tag{4.10}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_2, -\gamma, \beta, \mathrm{O}_6\bigr), \ \bigl(\mathrm{O}_2, \alpha\gamma g^{k-1}, \beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \eta, \mathrm{O}_3\bigr), \tag{4.11}$$

$$\bigl(0, -\gamma^k, \mathrm{O}_2, \gamma\beta, \mathrm{O}_5\bigr), \tag{4.12}$$

$$\bigl(\mathrm{O}_4, a^k, \mathrm{O}_5\bigr), \ \bigl(\mathrm{O}_5, \eta^s, \mathrm{O}_4\bigr), \ \bigl(\mathrm{O}_6, \eta^s, \mathrm{O}_3\bigr). \tag{4.13}$$

Таким образом, $\dim \operatorname{Im} \delta^4 = 9k + s - 2$. Так как $\dim \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_4, R) = 15k + 3s$, то $\dim \operatorname{Ker} \delta^4 = 6k + 2s + 2$. Ввиду [1, предложение 4.6] при $p \neq 2$ имеем

$$\dim_K \operatorname{Im} \delta^3 = \begin{cases} 5k+s, & \text{если } k \text{ и } s \text{ делятся на } p, \\ 5k+s+2, & \text{если } k \text{ и } s \text{ не делятся на } p, \\ 5k+s+1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

откуда следует требуемая формула.

(2) Если $p = 2$, то для получения базиса в $\operatorname{Im}\delta^4$ надо в множестве элементов, указанных в (4.2)–(4.13), тройку элементов из (4.13) заменить на элементы

$$(\,\mathrm{O}_4, a^k, 0, \eta^s, \mathrm{O}_3\,),\ (\,\mathrm{O}_5, \eta^s, \eta^s, \mathrm{O}_3\,).$$

Следовательно, $\dim \operatorname{Im}\delta^4 = 9k+s-3$, $\dim \operatorname{Ker}\delta^4 = 6k+2s+3$. Поскольку (при $p = 2$)

$$\dim_K \operatorname{Im}\delta^3 = \begin{cases} 5k+s-1, & \text{если } k \text{ и } s \text{ чётны},\\ 5k+s & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

(см. [1, предложение 4.6]), то и в этом случае получаем требуемый результат. □

Рассмотрим подкомплекс $X_\bullet$ комплекса $Q_\bullet$, такой, что при $n \geqslant 4$ модуль X_n соответствует последним шести слагаемым в разложениях Q_n, указанных в (3.1), и $X_n = Q_n$ для $0 \leqslant n \leqslant 3$. Тогда имеется короткая точная последовательность комплексов:

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0, \tag{4.14}$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Рассмотрим также комплекс $\mathcal{X}^\bullet := \operatorname{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$. Как и выше, мы отождествляем элементы $f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R) \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$ с соответствующими наборами значений $f(e_i \otimes e_j)$. Кроме того, для дифференциала в $\mathcal{X}^\bullet$ будем использовать следующее обозначение $s_n := (d_n^X)^*$.

Применяя функтор $\operatorname{Hom}_\Lambda(\,-\,, R)$ к последовательности (4.14), получаем еще одну короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet[-4], R) \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) \xrightarrow{i^*} \mathcal{X}^\bullet \to 0,$$

которая, в свою очередь, приводит к длинной точной когомологической последовательности

$$\cdots \xrightarrow{\Delta^{n-1}} \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \xrightarrow{\Delta^n} \mathrm{HH}^{n-3}(R) \xrightarrow{\pi^*} \cdots\ . \tag{4.15}$$

Из точности этой последовательности получаем соотношение

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim_K \operatorname{Ker}\Delta^n - \dim_K \operatorname{Im}\Delta^{n-1}. \tag{4.16}$$

Прежде чем использовать соотношение (4.16), мы вычислим когомологии вспомогательного комплекса $\mathcal{X}^\bullet$. При этом надо заметить, что этот комплекс в больших степенях 6-периодичен, а именно, при $n \geqslant 3$

$$\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet} = \delta^{n+6}_{\mathcal{X}^\bullet},$$

и следовательно,

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^{n+6}(\mathcal{X}^\bullet) \tag{4.17}$$

при $n \geqslant 4$. Кроме того, ввиду замечания 3.1 при $p = 2$ комплекс $\mathcal{X}^\bullet$ 3-периодичен (при $n \geqslant 3$), и потому при $n \geqslant 4$

$$\mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \simeq \mathrm{H}^{n+3}(\mathcal{X}^\bullet). \tag{4.18}$$

Предложение 4.2. (1) *Если $p \neq 2$, то $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0$. Если $p = 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 2$, при этом группа $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet)$ порождена когомологическими классами элементов*

$$\big(\eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_3\big), \big(\mathrm{O}_3, , \eta, \gamma, \beta\big). \tag{4.19}$$

(2) *Если $p \neq 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet) = 1$, при этом группа $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$ порождена когомологическим классом элемента $\big(e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3\big)$. Если же $p = 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet) = 3$, а для получения базиса группы $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$ надо к когомологическому классу указанного выше элемента добавить когомологические классы элементов*

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}\big), \big(\mathrm{O}_2, \eta^s, \mathrm{O}_3\big). \tag{4.20}$$

(3) *Если $p \neq 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet) = 2$, при этом группа $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$ порождена когомологическими классами элементов*

$$\big(0, \gamma, \mathrm{O}_4\big), \big(\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1\big). \tag{4.21}$$

Если же $p = 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet) = 3$, а для получения базиса группы $\mathrm{H}^6(\mathcal{X}^\bullet)$ надо к указанному выше множеству добавить когомологический класс элемента $\big(\mathrm{O}_5, \eta^s\big)$.

(4) *Для $p \neq 2$ имеем $\dim_K \mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet) = 2$, а группа $\mathrm{H}^7(\mathcal{X}^\bullet)$ порождена когомологическими классами элементов*

$$\big(\eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_3\big), \big(\eta^{s-1}, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_2\big). \tag{4.22}$$

(5) *Если $p \neq 2$, то $\dim_K \mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet) = 2$, при этом группа $\mathrm{H}^8(\mathcal{X}^\bullet)$ порождена когомологическими классами элементов*

$$\big(0, \eta^s, \mathrm{O}_4\big), \big(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}\big). \tag{4.23}$$

(6) *Если* $p \neq 2$, *то* $\dim_K \mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet) = 1$, *при этом группа* $\mathrm{H}^9(\mathcal{X}^\bullet)$ *порождена когомологическим классом элемента*

$$\bigl(\mathrm{O}_4, \eta^s, 0\bigr). \tag{4.24}$$

Замечание 4.3. Отметим, что в пунктах (4)–(6) этого предложения мы не рассматривали случай $p = 2$ ввиду 3-периодичности $\mathcal{X}^\bullet$ (см. формулу (4.18)).

Доказательство предложения 4.2. Отметим сначала, что (в обозначениях из (3.8)) при $n \geqslant 3$ имеем

$$d_n^X = \left(\begin{array}{c|c} -R_{n+1} & \mathrm{O} \\ \hline D_n & R_n \end{array}\right).$$

Теперь рассуждая аналогично [3], легко описываются базисы ядер и образов отображений s^n при $3 \leqslant n \leqslant 8$; ниже мы приводим такие базисы без детальных вычислений, перепроверку которых мы оставляем читателю.

а) Если $p \neq 2$, то в качестве базиса ядра s^3 можно выбрать следующее множество:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i),\ (\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \gamma g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_2, \beta b^j, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(0, \alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \eta^m, \eta^m) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;\\
&(\eta^t, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 1 \leqslant t \leqslant s;\\
&(\mathrm{O}_3, b^k, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_5, g^k),\ (0, 2\alpha\gamma g^{k-1}, 0, \eta, \eta);
\end{aligned}$$

а если $p = 2$, то базис $\operatorname{Ker} s^3$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1)$.

Соответственно для $\operatorname{Im} s^3$ при $p = 2$ в качестве базиса можно взять множество

$$\begin{aligned}
&(g^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(0, \beta b^j, \gamma g^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0),\ (\mathrm{O}_5, \beta b^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^m, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;\\
&(0, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, 0, -\gamma, -\beta),\ (\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, -\eta, -\gamma, 0);
\end{aligned}$$

а если $p \neq 2$, то базис $\operatorname{Im} s^3$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\eta^{s-1}, 0, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, 0, \beta)$. В частности,

- если $p = 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^3 = 6k + 2s + 1$, $\dim \operatorname{Im} s^3 = 5k + s - 1$,
- если $p \neq 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^3 = 6k + 2s$, $\dim \operatorname{Im} s^3 = 5k + s$.

б) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Ker} s^4$:

$$(g^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$

$$(0, \beta b^j, \gamma g^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$

$$(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0),\ (\mathrm{O}_5, \beta b^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$

$$(\mathrm{O}_3, \eta^m, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;$$

$$(\mathrm{O}_3, \eta, \gamma, \beta),\ (0, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, \eta, \mathrm{O}_2),\ (\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, \mathrm{O}_3, \beta);$$

а если $p = 2$, то базис для $\operatorname{Ker} s^4$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_3)$.

Если $p = 2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Im} s^4$:

$$(a^j, 0, g^j, \mathrm{O}_3),\ (b^j, g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_3, g^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$

$$(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$

$$(\gamma\beta b^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$

$$(0, \eta^m, \eta^m, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1;$$

$$(0, \eta^{s-1}, -\eta^{s-1}, 0, -\beta, -\gamma);$$

а если $p \neq 2$, то базис для $\operatorname{Im} s^4$ получается добавлением к этому множеству элемента (b^k, O_5). Таким образом,

- если $p = 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^4 = 5k + s + 1$, $\dim \operatorname{Im} s^4 = 5k + s - 1$,
- если $p \neq 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^4 = \dim \operatorname{Im} s^4 = 5k + s$.

в) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Ker} s^5$:

$$(a^j, 0, g^j, \mathrm{O}_3),\ (b^j, g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_3, g^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$

$$(\mathrm{O}_4, \beta b^i, \gamma g^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$

$$(\gamma\beta b^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$

$$(0, \eta^m, \eta^m, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1;$$

$$(b^k, \mathrm{O}_5),\ (e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_2, 2\eta^{s-1}, 0, \beta, \gamma),$$

а если $p = 2$, то базис для $\operatorname{Ker} s^5$ получается добавлением к этому множеству элемента $(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1})$.

Если $p = 2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Im} s^5$:

$$(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$(0, -\alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$(\mathrm{O}_3, a^j, 0, g^j),\ (\mathrm{O}_3, b^j, g^j, 0) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$
$$(\mathrm{O}_4, \eta^m, \eta^m) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1;$$
$$(\eta^m, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;$$
$$(\eta, 0, \beta, \mathrm{O}_3),\ (0, -\gamma, \beta, \mathrm{O}_3);$$

а если $p \neq 2$, то базис для $\operatorname{Im} s^5$ получается добавлением к этому множеству (O_5, g^k). Таким образом,

- если $p = 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^5 = 5k + s + 2$, $\dim \operatorname{Im} s^5 = 6k + 2s - 2$,
- если $p \neq 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^5 = 5k + s + 1$, $\dim \operatorname{Im} s^5 = 6k + 2s - 1$.

г) При любом p следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Ker} s^6$:

$$(0, \gamma g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_2, \beta b^j, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$(0, \alpha\gamma g^j, -\beta\alpha a^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$(\mathrm{O}_3, a^j, 0, g^j),\ (\mathrm{O}_3, b^j, g^j, 0) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$
$$(\eta^t, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 1 \leqslant t \leqslant s;$$
$$(\mathrm{O}_4, \eta^m, \eta^m) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1;$$
$$(\mathrm{O}_3, e_0, e_1, e_1),\ (\mathrm{O}_5, g^k).$$

При любом p следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Im} s^6$:

$$(g^j, \mathrm{O}_5), \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;$$
$$(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0),\ (\mathrm{O}_5, \beta b^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;$$
$$(0, \beta b^j, \gamma g^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_4, -\alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;$$
$$(\mathrm{O}_3, \eta^m, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;$$
$$(0, \beta\alpha a^{k-1}, -\alpha\gamma g^{k-1}, 0, -\gamma, \beta), (\eta^{s-1}, -\beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \gamma, 0).$$

Таким образом, $\dim \operatorname{Ker} s^6 = 6k + 2s + 1$, $\dim \operatorname{Im} s^6 = 5k + s - 1$.

д) При любом p следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Ker} s^7$:

$$
\begin{aligned}
&(g^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \gamma g^i, 0),\ (\mathrm{O}_5, \beta b^i) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \beta b^j, \gamma g^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_4, \alpha\gamma g^j, -\beta\alpha a^j) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, \eta^m, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;\\
&(\eta^{s-1}, \mathrm{O}_2, \eta, \mathrm{O}_2),\ (\mathrm{O}_2, \alpha\gamma g^{k-1}, \mathrm{O}_2, -\beta);\\
&(0, \beta\alpha a^{k-1}, \mathrm{O}_2, -\gamma, 0),\ (\mathrm{O}_3, \eta, -\gamma, -\beta).
\end{aligned}
$$

Следующее множество (при любом p) является базисом пространства $\operatorname{Im} s^7$:

$$
\begin{aligned}
&(a^j, 0, -g^j, \mathrm{O}_3),\ (b^j, g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_3, g^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\mathrm{O}_4, \beta b^j, \gamma g^j),\ (\gamma\beta b^j, \mathrm{O}_5) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^m, \eta^m, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1.
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\dim \operatorname{Ker} s^7 = 5k + s + 1, \quad \dim \operatorname{Im} s^7 = 5k + s - 1.
$$

е) Если $p \neq 2$, то следующее множество является базисом пространства $\operatorname{Ker} s^8$:

$$
\begin{aligned}
&(a^j, 0, -g^j, \mathrm{O}_3),\ (b^j, g^j, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_3, g^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 1 \leqslant j \leqslant k;\\
&(\gamma\beta b^j, \mathrm{O}_5), (\mathrm{O}_4, \beta b^j, \gamma g^j) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(0, \eta^m, \eta^m, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant m \leqslant s-1;\\
&(b^k, \mathrm{O}_5), (\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}),
\end{aligned}
$$

а базисом пространства $\operatorname{Im} s^8$ является следующее множество

$$
\begin{aligned}
&(0, \gamma g^i, \mathrm{O}_4),\ (\mathrm{O}_2, \beta b^i, \mathrm{O}_3) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(0, \alpha\gamma g^j, \beta\alpha a^j, \mathrm{O}_3),\ (\mathrm{O}_3, \gamma\beta b^j, \mathrm{O}_2) \ \text{ для } \ 0 \leqslant j \leqslant k-1;\\
&(\mathrm{O}_3, a^i, 0, -g^i),\ (\mathrm{O}_3, b^i, g^i, 0) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1;\\
&(\eta^m, \mathrm{O}_5),\ (\mathrm{O}_4, \eta^m, \eta^m) \ \text{ для } \ 2 \leqslant m \leqslant s;\\
&(\eta, 0, \beta, \mathrm{O}_3),\ (0, -\gamma, \beta, \mathrm{O}_3);\\
&(\mathrm{O}_3, b^k, 0, -\eta^s),\ (\mathrm{O}_2, -2\beta\alpha a^{k-1}, 0, \eta, \eta),\ (\eta, \mathrm{O}_5).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

если $p \neq 2$, то $\dim \operatorname{Ker} s^8 = 5k + s + 1$, $\dim \operatorname{Im} s^8 = 6k + 2s - 1$.

С учетом того, что $s^9 = s^3$, предложение 4.2 следует непосредственно из приведенного описания базисов $\operatorname{Ker} s^n$ и $\operatorname{Im} s^n$. □

Предложение 4.4. (1) *Пусть $p = 2$. Тогда связывающие гомоморфизмы Δ^n из* (4.15) *при $n \geqslant 4$ равны нулю.*

(2) *Если $p \neq 2$, то при $n \geqslant 4$*

$$\dim \operatorname{Im} \Delta^n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 0 \text{ или } 5 \,(\operatorname{mod} 6), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Мы будем использовать описание связывающих гомоморфизмов из доказательства леммы 3.13 в [4]. Введем дополнительные обозначения $X_n =: X'_n \oplus X''_n$, где X'_n (соответственно X''_n – прямая сумма первых трёх (соответственно последних трёх) прямых слагаемых в разложении X_n (см. обозначения из (3.1)). Используя блочно-треугольный вид дифференциалов d_n, $n \geqslant 4$ (см. (3.8)), мы рассмотрим отображение $L_n \colon X''_{n-3} \to X'_n$, определяемое относительно соответствующих прямых разложений матрицей L_n (см. обозначения в (3.2)–(3.7)), а затем индуцированное им отображение

$$\ell^n := (L_n)^* \colon \operatorname{Hom}_\Lambda(X'_n, R) \to \operatorname{Hom}_\Lambda(X''_{n-3}, R).$$

Пусть

$$u = (u', u'') \in \mathcal{X}^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(X'_n, R) \oplus \operatorname{Hom}_\Lambda(X''_n, R),$$

где $u' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X'_n, R)$, $u'' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(X''_n, R)$, и пусть $\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}(u) = 0$. Для $\widetilde{u} := (\mathrm{O}, u) \in \operatorname{Hom}(Q_n, R)$ получаем, что $\delta^n(\widetilde{u}) = (\mathrm{O}, \ell^n(u'), \mathrm{O}_6)$, и тогда $\Delta(\operatorname{cl} u) = \operatorname{cl}\big(\mathrm{O}, \ell^n(u')\big)$.

1) Предположим, что $n \equiv 5 \,(\operatorname{mod} 6)$. Мы рассмотрим этот случай более подробно; остальные случаи рассматриваются аналогично в зависимости от вида матриц L_n. Ввиду описания базиса $\mathrm{H}^5(\mathcal{X}^\bullet)$ в предложении 4.2 надо рассмотреть $u = \big(e_0, e_1, e_1, \mathrm{O}_3\big)$ (при любом p). Тогда $\ell^5(u') = 2\big(\eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}\big)$, и если $p \neq 2$, то замечаем, что элемент вида $\big(\mathrm{O}, \eta^{s-1}, g^{k-1}\beta\alpha, \alpha\gamma g^{k-1}\big) \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ не лежит в $\operatorname{Im} \delta^{n-4}$, и, следовательно, $\Delta^n(\operatorname{cl} u) \neq 0$. При $p = 2$ надо рассмотреть также базисные элементы $u = \big(\mathrm{O}_3, \eta^{s-1}, \beta\alpha a^{k-1}, \alpha\gamma g^{k-1}\big)$ и $u = \big(\mathrm{O}_2, \eta^s, \mathrm{O}_3\big)$, но для них сразу ясно, что $\ell^5(u') = 0$.

Таким образом, при $n \equiv 5 \,(\operatorname{mod} 6)$ формулы для $\operatorname{Im} \Delta^n$ доказаны.

2) Пусть $n \equiv 0 \,(\operatorname{mod} 6)$, $n \geqslant 4$. В этом случае надо рассмотреть только элемент $u = \big(0, \gamma, \mathrm{O}_4\big)$ из (4.21). Для него $\ell^0(u') = \big(a^k, 0, g^k\big)$,

и потому $\delta^n(\widetilde{u}) = \big(\mathrm{O}, a^k, 0, g^k, \mathrm{O}_6\big)$. Остается заметить, что элемент $\big(\mathrm{O}, a^k, 0, g^k\big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-3}, R)$ лежит в $\mathrm{Im}\,\delta^{n-4}$ только при $p = 2$.

3) Пусть $n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\ 6)$, $n \geqslant 4$. Ясно, что для всех элементов $u \in \mathcal{X}^n$, представляющих базисные элементы, указанные в (4.22), имеем $\ell^n(u') = 0$. Следовательно, $\Delta^n = 0$.

С учетом замечания 3.1 оставшиеся случаи рассматриваем только при $p \neq 2$.

4) Пусть $n \equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 6)$ (соответственно $n \equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 6)$), где $n \geqslant 4$. Тогда ясно, что значения Δ^n на когомологических классах элементов из (4.23) (соответственно элемента (4.24)) равны нулю.

5) Наконец, если $n \equiv 4\,(\mathrm{mod}\ 6)$, то (при $p \neq 2$) имеем $\Delta^n = 0$, поскольку $\mathrm{H}^4(\mathcal{X}^\bullet) = 0$. □

Следствие 4.5. *Если $p \neq 2$, то при $n \geqslant 5$*

$$\dim \mathrm{Ker}\,\Delta^n - \dim \mathrm{Im}\,\Delta^{n-4} = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 6) \\ & \quad \text{или } n \equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 6), \\ 2, & \text{если } n \equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 6), \\ 0 & \quad \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказательство. Утверждение следствия вытекает непосредственно из предложения 4.4 с учетом предложения 4.2. □

Окончание доказательства теоремы 2.1. Если $p \neq 2$, то требуемое утверждение следует из формулы (4.16) и следствия 4.5. Если же $p = 2$, то вновь из формулы (4.16) получаем, что $\dim \mathrm{HH}^n(R) - \dim \mathrm{HH}^{n-4}(R) = \dim \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet)$ и требуемая формула следует из предложения 4.2. □

Литература

1. А. И. Генералов, А. А. Зайковский, *О производной эквивалентности алгебр полудиэдрального типа с двумя простыми модулями.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 70–85.
2. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* Lect. Notes Math., v. 1428, Berlin; Heidelberg, 1990.
3. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **400** (2012), 133–157.

4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VI. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике, отличной от* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **443** (2016), 61–77.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* VII. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **452** (2016), 52–69.
6. K. Erdmann, *Algebras and semidihedral defect groups,* I. — Proc. London Math. Soc., **57**, No. 1 (1988), 109–150.
7. K. Erdmann, *Algebras and semidihedral defect groups,* II. — Proc. London Math. Soc. **60**, No. 1 (1990), 123–165.
8. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, С. О. Иванов, *О построении бимодульных резольвент с помощью леммы Хаппеля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **375** (2010), 61–70.
9. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа,* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **289** (2002), 9–36.

Generalov A. I., Zaykovskiy A. A. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. VIII. The family $SD(2\mathcal{B})_1$.

We compute the Hochschild cohomology groups for algebras of semidihedral type which are contained in the family $SD(2\mathcal{B})_1$ (from the famous K. Erdmann's classification). In the calculation, we use the beforehand construction of the minimal bimodule resolution for algebras from the family under discussion.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ageneralov@gmail.com
E-mail: anat097@mail.ru

Поступило 30 октября 2017 г.