Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 459, 2017 г.

Н. С. Устинов

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ДРОБНЫМИ ЛАПЛАСИАНАМИ ДИРИХЛЕ И НАВЬЕ

§1. Введение

В данной работе исследуется множественность положительных решений для уравнения с дробным лапласианом:

$$(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \quad u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{1}$$

в кольце $\Omega_R = B_{R+1} \backslash B_R \in \mathbb{R}^n$ при $s \in (0,1)$, $2 < q < 2_n^* \equiv \frac{2n}{(n-2s)_+}$. Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в левой части уравнения (1) может пониматься в смысле Дирихле или в смысле Навье, см. §2.

Эффект множественности был впервые открыт Ч. Коффманом [4], который показал, что при $n = 2$ задача

$$-\Delta u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \qquad u|_{\partial\Omega_R} = 0 \tag{2}$$

имеет любое наперед заданное число различных (не получающихся друг из друга поворотом) положительных решений при $q > 2$ и достаточно больших R.

В статье [9] была доказана множественность решений задачи (2) в случае $n \geqslant 4$, $2 < q < 2^* \equiv \frac{2n}{(n-2)_+}$, а также рассматривался вопрос существования нерадиальных решений при $q \geqslant 2^*$.

Множественность решений в случае $n = 3$ была получена в работе [1].

В дальнейшем в статьях [20] и [18] похожие результаты были получены для уравнения с p-лапласианом $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$: задача

$$-\Delta_p u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \qquad u|_{\partial\Omega_R} = 0$$

имеет любое наперед заданное число различных положительных решений при $1 < p < \infty$, $p < q < p^* \equiv \frac{np}{(n-p)_+}$ и достаточно больших R.

Ключевые слова: дробные лапласианы, множественность решений, лапласиан Навье, лапласиан Дирихле.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00678А.

Мы получим аналогичные результаты для задачи (1) в случае $n \neq 3$. Отметим, что оператор дробного лапласиана является нелокальным, что не позволяет использовать технику, представленную в работах выше.

Статья имеет следующую структуру: в §2 даются основные определения, используемые в данной работе. В §3 приведены леммы, помогающие построить оценки энергии радиальных функций в пространстве $\widetilde{H}^s(\omega_R)$. В §4 описано поведение энергии при $R \to +\infty$. Наконец, в §5 доказан основной результат – теорема 6. Большинство технических деталей помещено в Приложение.

Различные абсолютные константы мы будем обозначать через C. В случае зависимости константы от параметра, этот параметр указывается в скобках. Запись $a \asymp b$ означает, что верна двухсторонняя оценка $C_1 b \leqslant a \leqslant C_2 b$ с константами, не зависящими от R. Шар радиуса r с центром в точке x обозначим $B_r(x)$. Если $x = 0$, то, для краткости, обозначим его B_r. На протяжении всей работы нулевой вектор размерности m мы будем обозначать $\mathbb{O}_m$.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить А. И. Назарова за точные замечания, терпение и помощь при редактировании текста работы.

§2. Определения и основные понятия

Обозначим ω_R кольцо в $\mathbb{R}^1$: $\omega_R = [-R-1, -R] \cup [R, R+1]$. Функцию с носителем в ω_R или в Ω_R мы будем обозначать u_R, подчеркивая зависимость от радиуса R.

Преобразование Фурье в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\mathcal{F}u(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} u(x)\, dx.$$

Напомним определение пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ (см., напр., [22, §2.3.3, 4.3.2]):

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2\, d\xi < +\infty \right\};$$

$$\widetilde{H}^s(\Omega_R) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(u) \subset \overline{\Omega}_R \right\}.$$

Дробный лапласиан $(-\Delta)^s u$ на классе Шварца

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \right\}$$

задается формулой

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s}\mathcal{F}u(\xi)).$$

Квадратичная форма этого оператора имеет вид

$$((-\Delta)^s u, u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2\, d\xi. \tag{3}$$

Дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta)^s_D$ в области Ω_R, называемый также суженным (restricted) дробным лапласианом – самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме (3) с областью определения $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$.

Дробный лапласиан Навье $(-\Delta)^s_N$ – это s-тая степень оператора Лапласа в смысле спектральной теории, то есть самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме

$$((-\Delta)^s_N u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2, \tag{4}$$

где λ_j и ϕ_j – собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω_R. Дробный лапласиан Навье $(-\Delta)^s_N u$ также называется спектральным (spectral) дробным лапласианом. Хорошо известно (см., напр., [10, лемма 1]), что при $s \in [0,1]$ область определения квадратичной формы (4) совпадает с $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$. Подчеркнем, что оба оператора при $s \notin \mathbb{Z}$ являются нелокальными.

Норма в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ индуцируется нормой в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} + ((-\Delta)^s_D u, u), \tag{5}$$

однако, в силу неравенств Фридрихса (см. Приложение, лемма 3) в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ квадратичными формами (3) и (4) при $s \in [0,1]$ задаются эквивалентные норме (5) нормы

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} := ((-\Delta)^s_D u, u) \asymp \|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \asymp ((-\Delta)^s_N u, u) =: [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}.$$

Отметим следующее неравенство для квадратичных форм (3) и (4) (см. [10, теорема 1]): при $s \in (0,1)$ для $u \not\equiv 0$

$$((-\Delta)^s_N u, u) > ((-\Delta)^s_D u, u). \tag{6}$$

Напомним, что квадратичная форма для дробного лапласиана Дирихле может быть получена с помощью продолжения Каффарелли–Сильвестра [2]. Именно, при $u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$, $s \in (0,1)$ минимум функционала

$$\mathcal{E}^D_s(w) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} t^{1-2s} |\nabla w(x,t)|^2 \, dx \, dt$$

по подпространству функций

$$\mathfrak{W}^D = \left\{ w(x,t) \mid \mathcal{E}^D_s(w) < +\infty, \, w|_{t=0} = u \right\}$$

достигается на единственной функции $\widetilde{w}_D$ и дает значение квадрата нормы Дирихле в $\widetilde{H}^s(\Omega)$ с точностью до константы $C(s) = \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \cdot \Gamma(1-s)}$:

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s) \mathcal{E}^D_s(\widetilde{w}_D).$$

Аналогично, для дробного лапласиана Навье квадратичная форма получается продолжением Стинга–Торреа [15]: минимум функционала

$$\mathcal{E}^N_s(w) = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla w(x,t)|^2 \, dx \, dt$$

по подпространству функций

$$\mathfrak{W}^N = \left\{ w(x,t) \mid \mathcal{E}^N_s(w) < +\infty, \, w|_{t=0} = u, \, w|_{x \in \partial\Omega} = 0 \right\}$$

достигается на единственной функции $\widetilde{w}_N$, и верна формула (см., напр., [11, (2.6)])

$$[u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s) \mathcal{E}^N_s(\widetilde{w}_N).$$

Для пространств $\widetilde{H}^s(\Omega)$ верны неравенства Соболева (см., напр., [22, 2.8.1/15]): при $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ и $s < \frac{n}{2}$ имеем

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geqslant C_s \|u\|^2_{L_{2^*_n}(\Omega)} \quad \text{и} \quad [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geqslant C_s \|u\|^2_{L_{2^*_n}(\Omega)}, \tag{7}$$

(напомним, что через $2^*_n \equiv \frac{2n}{(n-2s)_+}$ обозначен предельный показатель вложения). Точная константа C_s в неравенстве для нормы Дирихле не зависит от области, ее значение было найдено в [5]. Равенство точных

констант для норм Навье и Дирихле было получено при $s = 2$ в [16] и [7], при $s \in \mathbb{N}$ в [6] и для произвольного s в [12].

Из неравенств (7) следует непрерывность вложения $\widetilde{H}^s(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ для предельного показателя $q = 2_n^*$, которая, в свою очередь, обеспечивает компактность вложения при $q < 2_n^*$.

Пусть G – замкнутая подгруппа группы $O(n)$. Обозначим $\mathfrak{L}_G^s$ подпространство функций из $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$, инвариантных относительно G, то есть

$$\mathfrak{L}_G^s = \left\{ u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in G \right\}.$$

Аналогично определяется подпространство функций $L_{q,G}(\Omega_R)$:

$$L_{q,G}(\Omega_R) = \{ u \in L_q(\Omega_R) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in G \}.$$

Мы будем придерживаться обозначений, введенных в работе [20]: **допустимым** (m,k)**-разложением** пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем называть разложение $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, где $l, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+$ и выполнены условия

$$ml + k = n; \quad m \geqslant 2; \quad k = 0 \quad \text{или} \quad k \geqslant m.$$

Например, для $\mathbb{R}^7$ допустимыми разложениями будут

$$\mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^2 \oplus \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^1 \oplus \mathbb{R}^5, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^3)^1 \oplus \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^7)^1.$$

В оценках, содержащих допустимые (m,k)-разложения, точки пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать x, точки пространства $\mathbb{R}^m$ – y, точки пространства $\mathbb{R}^k$ – z. Таким образом[1], $x = (y_1, \ldots, y_l, z)$. В сферических координатах точки записываются как $x = (r_x, \theta_x)$, $y = (r_y, \theta_y)$, $z = (r_z, \theta_z)$, таким образом, $x = (r_{y_1}, \ldots, r_{y_l}, r_z, \theta_{y_1}, \ldots, \theta_{y_l}, \theta_z)$. Функция m-**радиальна**, если она зависит только от $r_{y_1}, \ldots, r_{y_l}, r_z$. Функция (m,k)-**радиальна**, если она m-радиальна и инвариантна относительно всех перестановок векторов $y_1, \ldots, y_l$. Группу, порождающую пространство (m,k)-радиальных функций, обозначим через $G_{m,k}$.

[1]здесь и ниже, если $k = 0$, то координата z отсутствует.

§3. Вспомогательные утверждения

Под **решением уравнения** (1) мы будем понимать обобщенное решение $u^* \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$, то есть

$$((-\Delta)^s_D u^*, h) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} Re(\mathcal{F}u^* \overline{\mathcal{F}h})\, d\xi = \int\limits_{\Omega_R} |u^*|^{q-2} u^* h\, dx \quad \forall h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{8}$$

для дробного лапласиана Дирихле и

$$((-\Delta)^s_N u^*, h) = \int\limits_{\Omega_R} |u^*|^{q-2} u^* h\, dx \quad \forall h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{9}$$

для дробного лапласиана Навье.

Определим функционалы $J_D(u)$ и $J_N(u)$ равенствами

$$J_D(u) := \frac{[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \quad \text{и} \quad J_N(u) := \frac{[u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}}.$$

В лемме 5 (см. Приложение) показано, что минимайзеры этих функционалов по подпространствам $\mathfrak{L}^s_G$ при различных замкнутых подгруппах $G \subset O(n)$ являются положительными решениями уравнения (1).

Следующие леммы посвящены изучению свойств нормы Дирихле $[v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}$ для функций одной переменной. В первой из них выводится оценка нормы Дирихле семейства функций $v_R(x)$, заданных на прямой и "убегающих по R" при $R \to +\infty$:

Лемма 1. *Пусть функция $g_+(x) \in \widetilde{H}^s[0,1]$ и $g_-(x) = g_+(-x)$. Зададим семейство "убегающих по R" функций:*

$$v_R(x) = g_+(x-R) + g_-(x+R). \tag{10}$$

Тогда при $R \to +\infty$ имеет место соотношение

$$[v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} = 2[g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + o(1).$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств:

$$
\begin{aligned}
[v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} &= \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}v_R|^2 \, d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} \left|\mathcal{F}g_+ \cdot e^{-i\xi R} + \mathcal{F}g_- \cdot e^{i\xi R}\right|^2 \, d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g_+|^2 \, d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g_-|^2 \, d\xi \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} (\mathcal{F}g_+ \overline{\mathcal{F}g_-} e^{-2i\xi R} + \overline{\mathcal{F}g_+} \mathcal{F}g_- e^{2i\xi R}) \, d\xi \\
&\overset{*}{=} [g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + [g_-]^2_{D,\widetilde{H}^s[-1,0]} + o(1) = 2[g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + o(1)
\end{aligned}
$$

(равенство * следует из леммы Римана–Лебега). □

Лемма 2. *Пусть $v_R(x)$ – семейство из леммы 1. Тогда при $a > 0$ и $R \to +\infty$*

$$[v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \asymp R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}.$$

Доказательство. Требуется показать, что существуют константы C_0 и C_1, не зависящие от R, такие, что

$$C_0 R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geqslant [v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geqslant C_1 R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}. \tag{11}$$

Неравенство (26) (см. Приложение) с $v = r^a$ дает левую часть неравенства (11). Далее, применим неравенство (26) к функциям $v = r^{-a}$, $u = v_R r^a$. Получаем требуемое:

$$[v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geqslant \frac{[v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}}{C\|r^{-a}\|_{C^m(\omega_R)}} \geqslant C_1 [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} R^a. \qquad \square$$

§4. Оценка энергии по подпространству (m,k)-радиальных функций

Оценим функционал J_D на подпространстве радиальных функций. Любая радиальная функция может быть отождествлена с функцией на прямой, которая, в свою очередь, порождает семейство “убегающих по R” функций по формуле (10).

Теорема 1. *Пусть $v_R \in \widetilde{H}^s(\omega_R)$ – семейство "убегающих по R" функций на прямой из леммы* 1. *Восстановим радиальную функцию $u_R(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ из функции $v_R \in \widetilde{H}^s(\omega_R)$ по формуле $u_R(x) = v_R(|x|)$. Тогда*

$$J_D(u_R) = \frac{[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \asymp \frac{R^{n-1}[v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}}{R^{(n-1)\frac{2}{q}}\|v_0\|^2_{L_q[0,1]}} \tag{12}$$

при $R \to +\infty$ и $q \in [2, 2^*_1]$.

Доказательство. Образ Фурье радиальной функции радиален. Запишем норму Дирихле функции u_R:

$$\begin{aligned}[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u_R|^2\,d\xi \\ &= C\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}\left(\int\limits_R^{R+1} v_R(r)r^{n-1}\int\limits_{S^{n-1}} e^{-ir|\xi|(\sigma,\theta_\xi)}\,d\sigma\,dr\right)^2 d\xi.\end{aligned}$$

Благодаря свойству функции Бесселя (см. [21, теорема IV.1.6])

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{-i|y|(\sigma,\theta)}\,d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|y|^{\frac{n-2}{2}}}\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|y|), \quad \theta \in S^{n-1}$$

норму можно преобразовать к следующему виду:

$$[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = C\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{1+2s}\left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}}v_R(r)\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt)\,dr\right)^2 dt.$$

Для оценки правой части разобьем ее на два интеграла. Пусть

$$\varepsilon(R) = \tfrac{1}{\sqrt{R}}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} &= C\left(\int\limits_0^{\varepsilon(R)} + \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty}\right)t^{1+2s}\left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}}v_R(r)\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt)\,dr\right)^2 dt \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned}$$

Покажем, что I_1 оценивается как $o(R^{n-1})$:

$$\int\limits_0^{\varepsilon(R)} t^{1+2s}\left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r)\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt)\,dr\right)^2 dt$$
$$\leqslant C\varepsilon(R)^{2+2s}\left(\int\limits_R^{R+1} v_R(r) r^{\frac{n}{2}}\,dr\right)^2$$
$$\leqslant CR^{n-1-s}\|v_R\|^2_{L_2(\omega_R)} \leqslant CR^{n-1-s}\|v_0\|^2_{L_2[0,1]} = o(R^{n-1}).$$

Оценим теперь интеграл I_2. Функция Бесселя допускает разложение в асимптотический ряд (при $t \to +\infty$) с остатком $|R_N(t)| \leqslant \frac{C}{t^{2N+\frac{1}{2}}}$ (см. [17, с. 199]):

$$\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(t) = \sum_{k=0}^{N}(A_k(t) + B_k(t)) + R_N(t) \tag{13}$$

при $A_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\frac{\cos(t-\frac{n-1}{4}\pi)}{t^{2k}}$ и $B_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\frac{\sin(t-\frac{n-1}{4}\pi)}{t^{2k+1}}$.

Легко видеть, что при $t > \varepsilon(R)$ на носителе функции $v_R(r)$ выражение $rt \to +\infty$ при $R \to +\infty$, поэтому применима асимптотика (13). Определим $\mathfrak{A}_k(t)$, $\mathfrak{B}_k(t)$ и $\mathfrak{R}_N(t)$ формулами

$$\mathfrak{A}_k(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r)A_k(rt)\,dr, \quad \mathfrak{B}_k(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r)B_k(rt)\,dr$$
$$\text{и} \quad \mathfrak{R}_N(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r)R_N(rt)\,dr.$$

Таким образом,

$$I_2 = \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s}\left(\sum_{k=0}^{N}(\mathfrak{A}_k(t) + \mathfrak{B}_k(t)) + \mathfrak{R}_N(t)\right)^2 dt.$$

В качестве первого приближения к I_2 используем энергию, получающуюся из $\mathfrak{A}_0(t)$:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s}\,dt = C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s} \left(\int\limits_{R}^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) \sqrt{\tfrac{2}{\pi r t}} \cos(rt - \tfrac{n-1}{4}\pi)\,dr \right)^2 dt$$
$$= C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{2s} \left(\int\limits_{R}^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt - \tfrac{n-1}{4}\pi)\,dr \right)^2 dt.$$

Сделаем замену переменной $t_1 = t + \frac{(n-1)\pi}{4r}$. Поскольку $t_1 \asymp t$ при $t > \varepsilon(R)$, имеем:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s}\,dt \asymp \int\limits_{\varepsilon(R)-\frac{n-1}{4R}\pi}^{+\infty} t_1^{2s} \left(\int\limits_{R}^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt_1)\,dr \right)^2 dt_1$$
$$\asymp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t_1|^{2s} \left(\int\limits_{R}^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt_1)\,dr \right)^2 dt_1 + o(R^{n-1}). \quad (14)$$

Из эквивалентности (14) и лемм 1 и 2 получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s}\,dt \asymp [r^{\frac{n-1}{2}} v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}$$
$$\asymp R^{n-1} [v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \asymp R^{n-1} [v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}.$$

Аналогичным образом[2] можно оценить энергию, связанную с $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ при $k \leqslant N = \lceil s+1 \rceil$. Асимптотики этих членов будут степенями R с меньшими показателями, то есть $o(R^{n-1})$. Наконец, оценка $R_N(t)$

[2]По формуле приведения $\sin(r\rho - \frac{n-1}{4}\pi) = \cos(r\rho - \frac{n+1}{4}\pi)$.

позволяет оценить член с $\mathfrak{R}_N$:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{R}_N^2(t) t^{1+2s}\, dt \leqslant C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{-2} \left(\int\limits_{R}^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}-\lceil s+1 \rceil} |v_R(r)|\, dr \right)^2 dt$$

$$\leqslant C R^{n-1-2s-2+\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{0}^{1} |v_0(r)|\, dr \right)^2 = o(R^{n-1}) \|v_0\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Эквивалентность $I_2 \asymp R^{n-1} [v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}$ следует из эквивалентности

$$I_2 \asymp \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s} \left(\sum_{k=0}^{N} \left(\mathfrak{A}_k^2(t) + \mathfrak{B}_k^2(t) \right) + \mathfrak{R}_N^2(t) \right) dt.$$

□

Следствие 1. *Минимум функционала J_D по подпространству радиальных функций эквивалентен $R^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}$:*

$$\min_{u_R \in \mathfrak{L}^s_{O(n)}} J_D(u_R) \asymp R^{(n-1)(1-\frac{2}{q})} \tag{15}$$

при $R \to +\infty$ и $q \in [2, 2_1^*]$.

Доказательство. Оценка сверху в (15) очевидно следует из эквивалентности (12). Оценка снизу следует из (12) и ограниченности оператора вложения $\widetilde{H}^s[0,1] \hookrightarrow L_q[0,1]$. □

Для исследования поведения энергии на подпространствах $\mathfrak{L}^s_G$ требуется ее двухсторонняя оценка. Следующая теорема дает оценку снизу для (m,k)-радиальных функций:

Теорема 2. *Пусть $u_R(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ – (m,k)-радиальная функция с $m \neq n$. Тогда при $q \in [2, 2^*_{n-m+1}]$ выполнены неравенства*

$$\begin{aligned} & [u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)} \\ \text{и} \quad & [u_R]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \end{aligned} \tag{16}$$

Доказательство. Пусть T_0 – тождественный оператор на пространстве $L_{2,G_{m,k}}$:

$$T_0 : L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R) \to L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Его норма равна единице. Пусть T_1 – оператор вложения пространства $\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$ в пространство $L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R)$ при $p \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$

$$T_1 : \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}} \to L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Согласно работам [9] при $m = 2, k = n-2$ и [20] для произвольных (m,k)-разложений существует такое C_0, что для любого $v \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$ выполнено неравенство

$$[v]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \geqslant C_0 R^{(m-1)(1-\frac{2}{p})} \|v\|^2_{L_p(\Omega_R)}.$$

Таким образом, оператор T_1 непрерывен и имеет оценку для нормы

$$\|T_1\| = \sup_{v \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}} \frac{\|T_1 v\|_{L_p(\Omega_R)}}{\|v\|_{\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}}} \leqslant C_0^{-\frac{1}{2}} R^{(m-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

Равенство (27) из леммы 6 описывает пространства $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ как интерполяционную шкалу:

$$[\widetilde{H}^k(\Omega_R), \widetilde{H}^{k+1}(\Omega_R)]_\delta = \widetilde{H}^{k+\delta}(\Omega_R).$$

Как хорошо известно, пространства Лебега $L_p(\Omega_R)$ также образуют интерполяционную шкалу: при $\frac{1}{p} = \frac{1-\delta}{p_0} + \frac{\delta}{p_1}$

$$[L_{p_0}(\Omega_R), L_{p_1}(\Omega_R)]_\delta = L_p(\Omega_R).$$

При помощи усреднения по группе с мерой Хаара можно построить проекторы в пространства $G_{m,k}$-инвариантных функций. Действительно, разложим функцию h в сумму функций h_1 и h_2 формулами (обозначим через $\mathfrak{G}(y)$ орбиту точки y под действием группы G, на ней есть мера Хаара μ_y, инвариантная относительно действия группы):

$$h_1(y) = \frac{1}{\mu_y(\mathfrak{G}(y))} \int\limits_{\mathfrak{G}(y)} h d\mu_y, \quad h_2(y) = h(y) - h_1(y), \quad \int\limits_{\mathfrak{G}(y)} h_2 d\mu_y = 0. \tag{17}$$

Легко видеть, что функция h_1 $G_{m,k}$-инвариантна, и формулами (17) могут быть определены непрерывные проекторы из пространств

$L_{p_0}(\Omega_R)$ и $L_{p_1}(\Omega_R)$ в пространства $L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R)$ и $L_{p_1,G_{m,k}}(\Omega_R)$ соответственно. Подпространство $L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R)$ дополняемо, поэтому в силу [22, теорема 1.17.1.1] верно

$$[L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R), L_{p_1,G_{m,k}}(\Omega_R)]_\delta = L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Аналогичным образом формулой (17) определяется непрерывный проектор из пространства $L_2(\Omega_R)$ в $L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R)$ (также непрерывный как проектор из $\widetilde{H}^1(\Omega_R)$ в $\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$), пространство дополняемо и

$$[L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R), \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}]_\delta = \mathfrak{L}^\delta_{G_{m,k}}.$$

Таким образом, мы можем интерполировать оператор вложения между операторами T_0 и T_1, полученный оператор мы обозначим T_s:

$$T_s : \mathfrak{L}^s_{G_{m,k}} \to L_{q,G_{m,k}}(\Omega_R) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{s}{p} + \frac{1-s}{2}, \tag{18}$$

его норма оценивается посредством интерполяционного неравенства:

$$\|T_s\| \leqslant \|T_0\|^{1-s}\|T_1\|^s \leqslant C_0^{-\frac{s}{2}} R^{(m-1)(\frac{s}{p}-\frac{s}{2})} = C_0^{-\frac{s}{2}} R^{(m-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}. \tag{19}$$

При $p \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$ показатель q пробегает отрезок $[2, 2^*_{n-m+1}]$, неравенство (19) дает оценку на интерполяционную норму (совпадающей со стандартной нормой в $H^s(\mathbb{R}^n)$):

$$\|v\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant C_0^s R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)},$$

из неравенства Фридрихса (см. лемму 3, Приложение) получаем неравенство (16) для нормы Дирихле:

$$2[v]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant \|v\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)},$$

неравенство (16) для нормы Навье следует из оценки (6):

$$[v]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant [v]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geqslant C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \qquad \square$$

Замечание 1. Условие $m \neq n$ существенно используется в доказательстве: при $m = n$ предельный показатель q равен $2^*_1 = \frac{2}{1-2s}$, и даже в случае $s < \frac{1}{2}$ его не получить из интерполяции в пространствах Лебега $L_p(\Omega_R)$ – равенство (18) обеспечивает показатели $q \leqslant \frac{2}{1-s}$, что меньше 2^*_1. Однако утверждение теоремы верно и в этом случае, как показывает теорема 1.

Оценка из теоремы 2 является точной, как показывает следующая теорема:

Теорема 3. *Для любого R и $q \in [2, 2^*_{n-m+1}]$ существует такая (m,k)-радиальная функция $\widetilde{u}_R$, что*

$$\begin{aligned} &[\widetilde{u}_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \leqslant CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})}\|\widetilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)} \\ \text{и}\quad &[\widetilde{u}_R]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \leqslant CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})}\|\widetilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Доказательство. Согласно работам [9] (при $m = 2, k = n-2$ и при $m = n$) и [20] (для произвольных (m,k)-разложений) существует такая $\widetilde{u}_R \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$, для которой при $q \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$ выполнено неравенство

$$[\widetilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \leqslant CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})}\|\widetilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}.$$

Заметим, что $[2, 2^*_{n-m+1}] \subset [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$, поэтому лемма 4 (см. Приложение) дает требуемую оценку для норм Навье и Дирихле:

$$[\widetilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \leqslant [\widetilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \leqslant CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})}\|\widetilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \qquad \square$$

Для доказательства множественности решений требуется оценить энергию в пространствах $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$.

Следствие 2. *Пусть $n \geqslant 4$, тогда минимумы J_D и J_N по подпространствам $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$ эквивалентны $R^{1-\frac{2}{q}}$:*

$$\min_{u_R \in \mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}} J_D(u_R) \asymp R^{1-\frac{2}{q}} \quad \text{и} \quad \min_{u_R \in \mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}} J_N(u_R) \asymp R^{1-\frac{2}{q}}. \tag{21}$$

Доказательство. При $n \geqslant 4$ функции из пространств $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$ являются $(2, n-2)$-радиальными, оценки следуют из неравенств (16) и (20). $\square$

§5. Теоремы существования и множественности

Теорема 1 дает двухстороннюю оценку на норму Дирихле радиальной функции в $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ через норму сужения в пространстве $\widetilde{H}^s(\omega_R)$. Это означает, что для подпространства $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ с нормой Дирихле компактность вложения имеет место при $q \in [1, 2^*_1)$. Также, ввиду того,

что нормы Дирихле и Навье эквивалентны, компактность вложения при $q \in [1, 2_1^*)$ справедлива и для подпространства $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ с нормой Навье. Используя лемму 5 (см. Приложение), получаем теорему:

Теорема 4 (**Существование радиального решения**). *При $q \in [1, 2_1^*)$, $q \neq 2$ существует положительное радиальное решение задачи* (1) *для дробных лапласианов Дирихле и Навье.*

Пусть $n \geqslant 4$, рассмотрим допустимое (m, k)-разложение. Теорема 2 обеспечивает вложение $\mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ для нормы Дирихле при $q = 2^*_{n-m+1}$. Это означает, что оно имеет место и компактно при $q \in [1, 2^*_{n-m+1})$. Для нормы Навье вложение справедливо в силу эквивалентности норм. Лемма 5 дает существование обобщеного решения $u_R \in \mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}$. При $q > 2$ и больших R минимумы функционала J_D по подпространствам $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ и $\mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}$ различны в силу оценок (15), (16) и (20); аналогичное утверждение для функцонала J_N получается при помощи неравенства (6). Таким образом, решение не является радиальным, и доказана теорема:

Теорема 5 (**Существование нерадиального решения при показателях $q \geqslant 2_n^*$**). *При $n \geqslant 4$ и $q \in (2, 2^*_{n-m+1})$ существует такой радиус R_0, что при $R > R_0$ в Ω_R существует положительное (m, k)-радиальное решение (при различных m решения различны) задачи* (1) *для дробных лапласианов Дирихле и Навье.*

Замечание 2. Максимальный показатель получается при наибольшем допустимом m, то есть $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Теорема 6 (**Множественность при $n \neq 3$**). *Пусть $n \neq 3$, $s \in (0, 1)$, $q \in (2, 2_n^*)$ и N – некоторое натуральное число. Тогда существует такое $R_1(N)$, что при любом $R \geqslant R_1$ существует не менее N не совмещающихся поворотом положительных решений задач* (1) *с дробными лапласианами Дирихле и Навье.*

Доказательство. Рассмотрим семейство групп

$$T_\ell \times O(n-2), \quad \ell = 1, 2, 3 \ldots, N,$$

где T_ℓ – группа поворотов на углы, кратные $\frac{2\pi}{\ell}$. Минимайзеры по инвариантным подпространствам $\mathfrak{L}^s_{T_\ell \times O(n-2)}$ являются обобщенными решениями задачи (1) при $q < 2_n^*$.

Рассмотрим положительную функцию $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{\frac{1}{2}}(\mathbb{O}_n))$, удовлетворяющую равенству

$$\phi(x) = \phi(y,z) = \phi(|y|,|z|), \quad y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad |y|+|z| \leqslant \tfrac{1}{2}.$$

Обозначим через y_i^0 вершины правильного ℓ-угольника на плоскости с центром в начале координат и $y_1^0 = (R+\frac{1}{2},0)$. Определим функцию u_ℓ равенством

$$u_\ell(y,z) = \sum_{i=1}^{\ell} \phi\left(y - y_i^0, z\right).$$

Лемма 7 обеспечивает равномерную ограниченность константой значений $J_D(u_\ell)$ и $J_N(u_\ell)$ при больших R. Из оценок (21) существует такой уровень R_1, что минимумы функционалов J_D и J_N по $\mathfrak{L}^s_{O(2)\times O(n-2)}$ при $R > R_1$ больше найденной выше константы. Остается показать, что минимайзеры по $\mathfrak{L}^s_{T_\ell\times O(n-2)}$, $\ell = 1,2,3\ldots,N$ попарно различны.

Свойство инвариантности функции $u(x)$ под действием группы $T_\ell \times O(n-2)$ переносится на минимайзер: если $\widetilde{w}(x,t)$ – продолжение Каффарелли–Сильвестра (Стинга–Торреа)[3] для функции $u(x)$, то $\widetilde{w}(gx,t)$ – продолжение К-С (С-Т) для функции $u(gx) = u(x), \forall g \in T_\ell$. Это продолжения одной и той же функции, в силу единственности они совпадают:

$$\widetilde{w}(x,t) = \widetilde{w}(gx,t), \quad \forall g \in T_\ell \times O(n-2).$$

Таким образом, $\mathcal{E}(w)$ можно минимизировать по подпространству $T_\ell\times O(n-2)$-инвариантных функций в $\mathfrak{W}$. Пусть $\ell_1,\ell_2 \in [1:N], \ell_1 > \ell_2$, рассмотрим два случая:

Первый случай (ℓ_1 делится на ℓ_2). Пусть u_{ℓ_1} и u_{ℓ_2} – минимайзеры по $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_1}\times O(n-2)}$ и $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$ с единичной нормой в $L_q(\Omega)$, им соответствуют продолжения w_{ℓ_1} и w_{ℓ_2}. Рассмотрим функцию $v = u_{\ell_1}(r_y, \frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_y, z)$. Очевидным образом, $v \in \mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$, $\|v\|_{L_q(\Omega)} = 1$ и продолжение для v удовлетворяет равенству $w = w_{\ell_1}(r_y, \frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_y, z, t)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}[u_{\ell_2}]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)} &\leqslant [v]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s)\mathcal{E}(w)\\ &= C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3}\end{aligned}$$

[3]далее, для краткости, К-С и С-Т

$$
\begin{aligned}
&\times (w_{r_y}^2 + \tfrac{1}{r_y^2} w_{\theta_y}^2 + w_z^2 + w_t^2)\, dz d\theta_y\, dr_y\, dt \\
&= C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3} \\
&\quad \times ((w_{\ell_1})_{r_y}^2 + \tfrac{1}{r_y^2}\tfrac{\ell_2^2}{\ell_1^2}(w_{\ell_1})_{\theta_y}^2 + (w_{\ell_1})_z^2 + (w_{\ell_1})_t^2)\, dz d\theta_y\, dr_y\, dt \\
&< C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3} \\
&\quad \times ((w_{\ell_1})_{r_y}^2 + \tfrac{1}{r_y^2}(w_{\ell_1})_{\theta_y}^2 + (w_{\ell_1})_z^2 + (w_{\ell_1})_t^2)\, dz d\theta_y\, dr_y\, dt \\
&= C(s)\mathcal{E}(w_{\ell_1}) = [u_{\ell_1}]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)},
\end{aligned}
$$

строгое неравенство следует из того, что при $R \geqslant R_1$ функция u_{ℓ_1} не принадлежит $\mathfrak{L}^s_{O(2)\times O(n-2)}$. Таким образом, значение энергии у u_{ℓ_1} строго больше, чем у u_{ℓ_2}.

Второй случай (ℓ_1 *не делится на* ℓ_2). Если минимайзер по $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_1}\times O(n-2)}$ и $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$ один и тот же, то он принадлежит $\mathfrak{L}^s_{T_{\text{НОК}(\ell_1,\ell_2)}\times O(n-2)}$. Применяя первый случай к числам ℓ_1 и НОК(ℓ_1, ℓ_2), получаем требуемое. □

Замечание 3. Для оператора Лапласа и p-лапласиана теорема 6 верна в случае $n = 3$, как указывалось во введении. Известные автору доказательства этих утверждений требуют более продвинутых методов концентрации решений. Поэтому для дробных лапласианов вопрос существования таких решений остается открытым.

Приложение

Лемма 3 (**Неравенства Фридрихса**). *Для любой функции*

$$u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \quad \textit{при} \quad s \in (0,1)$$

верны неравенства

$$((-\Delta)^s_D u, u) \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} \quad \textit{и} \quad ((-\Delta)^s_N u, u) \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}. \tag{22}$$

Доказательство. Неравенство для нормы Навье можно получить напрямую из определения дробного лапласиана Навье:

$$((-\Delta)_N^s u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2 \geqslant \lambda_1^s \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)},$$

$\lambda_1 > 1$ в силу неравенства Фридрихса в области ширины 1 при $u \in \widetilde{H}^1(\Omega_R)$:

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_R)} \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}. \tag{23}$$

Неравенство для нормы Дирихле достаточно доказывать для $u \in C_0^\infty(\Omega_R)$; исходное неравенство получится замыканием по норме пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Определим семейство норм в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$, проиндексированных параметром ε, эквивалентных норме в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ и заданных формулой

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Рассмотрим оператор вложения

$$A : \widetilde{H}^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_2(\Omega_R),$$

сопряженный ему оператор действует как

$$A^* : L_2(\Omega_R) \to (\widetilde{H}^s(\Omega_R))',$$

их нормы одинаковы. Индуцированная норма в сопряженном пространстве задается формулой

$$\|v\|^2_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2s} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 \, d\xi,$$

в силу неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned} \|v\|^2_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'} &\equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2s} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 \, d\xi \\ &\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 \, d\xi \right)^s \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1-s} \\ &= \|v\|^{2s}_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'} \|v\|^{2-2s}_{L_2(\Omega_R)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Пользуясь оценкой (24) и неравенством Фридрихса (23), получаем цепочку неравенств:

$$\|A\| = \sup \frac{\|u\|_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)}} = \sup \frac{\|v\|_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}} \leqslant \sup \frac{\|v\|^s_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'} \|v\|^{1-s}_{L_2(\Omega_R)}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}}$$
$$\leqslant \sup \left(\frac{\|v\|_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}} \right)^s = \sup \left(\frac{\|u\|_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)}} \right)^s \leqslant 1.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)},$$

неравенство (3) получается предельным переходом $\varepsilon \to 0$. □

Лемма 4. *Для любой функции $u \in \widetilde{H}^1(\Omega_R)$ при $s \in (0,1)$ верны неравенства*

$$[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \leqslant [u]_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \quad \text{и} \quad [u]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \leqslant [u]_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение для нормы Дирихле. Ввиду неравенства Гельдера и неравенства Фридрихса (22) имеем

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi$$
$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1-s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\mathcal{F}u(\xi)|^2 \, d\xi \right)^s$$
$$= [u]^{2-2s}_{D,L_2(\Omega_R)} [u]^{2s}_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \leqslant [u]^{2-2s}_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} [u]^{2s}_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} = [u]^2_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}.$$

Утверждение для нормы Навье также получается из неравенства Гельдера и неравенства Фридрихса (22)

$$[u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2 \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} (u, \phi_j)^2 \right)^{1-s} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (u, \phi_j)^2 \right)^s$$
$$= [u]^{2-2s}_{N,L_2(\Omega_R)} [u]^{2s}_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \leqslant [u]^{2-2s}_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} [u]^{2s}_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} = [u]^2_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}. \quad \square$$

Лемма 5. *Пусть вложение* $\mathfrak{L}^s_G \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ *компактно. Тогда минимайзеры функционалов* $J_D(u)$ *и* $J_N(u)$ *по подпространству* $\mathfrak{L}^s_G$ *существуют и являются положительными решениями задачи* (1) *с дробными лапласианами Навье и Дирихле.*

Доказательство. В силу однородности функционалов $J_D(u)$ и $J_N(u)$ можно считать их знаменатели единичными. Задача свелась к минимизации норм $W_D(u) = [u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}$ и $W_N(u) = [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}$ по поверхности уровня $V(u) = \|u\|^q_{L_q(\Omega_R)} = 1$, которая ввиду компактности вложения слабо замкнута. Существование минимайзеров следует из теоремы существования минимайзера у слабо полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала на слабо замкнутом множестве (см. [19, теорема 26.8]). Уравнения Эйлера после домножения на подходящие константы обращаются в тождества (8) и (9) для обобщенных решений на приращениях $h \in \mathfrak{L}^s_G$:

$$\begin{aligned} \exists \lambda_1, \lambda_2 : DV(u^*_D)h &= \lambda_1 DW_D(u^*_D)h, \\ DV(u^*_N)h &= \lambda_2 DW_N(u^*_N)h \quad \forall h \in \mathfrak{L}^s_G. \end{aligned} \tag{25}$$

Воспользуемся **принципом симметричной критичности**, см. [14, теорема 1.1]: оба функционала $J_D(u)$ и $J_N(u)$ инвариантны под действием компакнтной замкнутой группы Ли G, и, благодаря этому, из равенств (25) для приращений $h \in \mathfrak{L}^s_G$ следуют аналогичные (25) равенства для всех приращений $h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$.

Для завершения доказательства нам остается показать положительность минимайзеров. Их неотрицательность обеспечивается следующим предложением:

Предложение [12, теорема 3]. Пусть функция $u(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ при $s \in (0,1)$. Тогда функция $|u(x)|$ принадлежит пространству $\widetilde{H}^s(\Omega)$ и верны неравенства для норм:

$$[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geqslant [|u|]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \quad \text{и} \quad [u]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geqslant [|u|]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)}.$$

Кроме того, если положительная и отрицательная части функции $u(x)$ не вырождаются, то неравенства строгие.

Из неотрицательности минимайзеров следует их положительность в силу строгого принципа максимума:

Предложение ([3, лемма 2.6], [8, теорема 2.5]) . Пусть функция $u(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega) \setminus \{0\}$ удовлетворяет неравенству $(-\Delta)^s u \geqslant 0$ для дробного лапласиана Дирихле или Навье. Тогда $u > 0$ на любом компактном подмножестве $K \subset \Omega$. □

Замечание 4. При $q < 2_n^*$ условия леммы 5 выполнены для любой замкнутой подгруппы $G \subset O(n)$ ввиду компактности вложения

$$\widetilde{H}^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R).$$

Лемма 6. *Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $s = m + \delta \in [m, m+1]$. Тогда для функций $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$, $v \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ верно $uv \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ и выполнено неравенство*

$$[uv]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \leqslant C[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \|v\|^{1-\delta}_{C^m(\overline{\Omega})} \|v\|^{\delta}_{C^{m+1}(\overline{\Omega})}. \tag{26}$$

Доказательство. Утверждение для целых $s = m$ следует из очевидного неравенства

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha(uv)\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{C^m(\overline{\Omega})}.$$

Утверждение для $\delta > 0$ получается интерполяцией: по доказанному выше имеем (в случае $m = 0$ пространство $\widetilde{H}^0(\Omega)$ следует понимать как $L_2(\Omega)$):

$$[uv]_{D,\widetilde{H}^m(\Omega)} \leqslant C[u]_{D,\widetilde{H}^m(\Omega)} \|v\|_{C^m(\overline{\Omega})}$$
$$[uv]_{D,\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)} \leqslant C[u]_{D,\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)} \|v\|_{C^{m+1}(\overline{\Omega})},$$

стало быть, оператор домножения на функцию v непрерывен в пространствах $\widetilde{H}^m(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)$. Согласно [22, теорема 4.3.2/2]

$$[\widetilde{H}^m(\Omega), \widetilde{H}^{m+1}(\Omega)]_\delta = \widetilde{H}^{m+\delta}(\Omega), \tag{27}$$

откуда следует непрерывность оператора домножения на v в пространстве $\widetilde{H}^{m+\delta}(\Omega)$, интерполяционное неравенство совпадает с требуемой оценкой (26). □

Замечание 5. При $s \in [0, 1]$ утверждение леммы 6 верно и для норм Навье.

Лемма 7. *Пусть $u_i(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega), i = 1, \ldots, k$. Обозначим через $U(x)$ сумму*

$$U(x) = u_1(x) + \cdots + u_k(x).$$

Тогда верны неравенства:

$$[U]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \leqslant k\sum_{i=1}^{k}[u_i]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \quad \text{и} \quad [U]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \leqslant k\sum_{i=1}^{k}[u_i]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)}.$$

Доказательство. Очевидное следствие неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом. □

Литература

1. J. Byeon, *Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli.* — J. Diff. Eqs. **136**, No. 1 (1997), 136–165.
2. L. Caffarelli and L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian.* — Comm. Part. Diff. Eqs. **32**, No. 7–9 (2007), 1245–1260.
3. A. Capella, J. Dávila, L. Dupaigne and Y. Sire, *Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations.* — Comm. Part. Diff. Eqs. **36**, No. 8 (2011), 1353–1384.
4. C. V. Coffman, *A non-linear boundary value problem with many positive solutions.* — J. Diff. Eqs. **54**, No. 3 (1984), 429–437.
5. A. Cotsiolis, N. K. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives.* — J. Math. Anal. Appl. **295**, No. 1 (2004), 225–236.
6. F. Gazzola, H.-C. Grunau, G. Sweers, *Optimal Sobolev and Hardy–Rellich constants under Navier boundary conditions.* — Ann. Mat. Pura ed Appl. (4) **189**, No. 3 (2010), 475–486.
7. Y. Ge, *Sharp Sobolev inequalities in critical dimensions.* — Michigan Math. J. **51**, No. 1 (2003), 27–45.
8. A. Iannizzotto, S. Mosconi, M. Squassina, *H^s versus C^0-weighted minimizers.* — NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **22**, No. 3 (2015), 477–497.
9. Y. Y. Li, *Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus.* — J. Diff. Eqs. **83**, No. 2 (1990), 348–367.
10. R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians.* — Comm. Part. Diff. Eqs. **39**, No. 9 (2014), 1780–1790.
11. R. Musina, A. I. Nazarov, *On fractional Laplacians–3.* — ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. **22**, No. 3 (2016), 832–841.
12. R. Musina, A. I. Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian.* — Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. **121** (2015), 123–129.
13. R. Musina and A.I.Nazarov, *Variational inequalities for the spectral fractional Laplacian.* — Comp. Math. Math. Phys. **57**, No. 3 (2017), 373–386.

14. R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality.* — Comm. Math. Phys. **69**, No. 1 (1979), 19–30.
15. P. R. Stinga, J. L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators.* — Comm. Part. Diff. Eqs. **35**, No. 11 (2010), 2092–2122.
16. R. C. A. M. Van der Vorst, *Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{2N/(N-4)}$.* — Differential Integral Equations **6**, No. 2 (1993), 259–276.
17. Дж. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Издательство иностранной литературы., 1949.
18. С. Б. Колоницкий, *Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое.* — Алгебра и анализ **22**, No. 3 (2010), 206–221.
19. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, 1988.
20. А. И. Назаров, *О решениях задачи Дирихле уравнения, содержащего p-лапласиан, в сферическом слое.* — Труды СПбМО **10** (2004), 33–62.
21. И. М. Стеин, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир., 1974.
22. Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, 1980.

Ustinov N. S. Multiplicity of positive solutions to the boundary value problems for fractional Laplacians.

We establish the so-called "multiplicity effect" for the problem $(-\Delta)^s u = u^{q-1}$ in the annulus $\Omega_R = B_{R+1} \setminus B_R \in \mathbb{R}^n$: for each $N \in \mathbb{N}$ there exists R_0 such that for all $R \geqslant R_0$ this problem has at least N different positive solutions. $(-\Delta)^s$ in this problem stands either for Navier-type or for Dirichlet-type fractional Laplacian. Similar results were proved earlier for the equations with the usual Laplace operator and with the p-Laplacian operator.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр. 28,
Санкт-Петербург, 198504, Россия
E-mail: ustinns@yandex.ru

Поступило 25 апреля 2017 г.