Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 459, 2017 г.

**В. Г. Осмоловский**

# ОБЪЁМНАЯ ДОЛЯ ОДНОЙ ИЗ ФАЗ В СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ ДВУХФАЗОВОЙ УПРУГОЙ СРЕДЫ

## §1. Введение

В квадратичном приближении плотности энергии деформации каждой из фаз "±" двухфазовой упругой среды, занимающей ограниченную область $\Omega \subset R^m$, $m \geqslant 1$, задаются функциями

$$\begin{aligned} &F^{\pm}(M) = \langle A^{\pm}(e(M) - \zeta^{\pm}), e(M) - \zeta^{\pm}\rangle, \\ &M \in R^{m\times m}, \quad e(M) = \frac{M + M^*}{2}, \quad \zeta^{\pm} \in R_s^{m\times m}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $R^{m\times m}$ – пространство $m \times m$-матриц, $R_s^{m\times m}$ – пространство $m \times m$-симметричных матриц, величина $\langle P, Q\rangle = \operatorname{tr} PQ$, $P, Q \in R_s^{m\times m}$ является скалярным произведением в $R_s^{m\times m}$, а линейные отображения $A^{\pm} : R_s^{m\times m} \to R_s^{m\times m}$ симметричны и положительно определены относительно указанного скалярного произведения.

Соответствующий плотностям (1.1) функционал энергии деформации определяется равенством

$$I_0[u, \chi, t] = \int\limits_{\Omega} \{\chi(F^+(\nabla u) + t) + (1 - \chi)F^-(\nabla u)\}\, dx, \tag{1.2}$$

в котором $m$-мерная вектор-функция $u(x)$ соответствует полю смещений, матрица $(\nabla u)_{ij} = u^i_{x_j}$, $e(\nabla u)$ – тензор деформации, матрицы $\zeta^{\pm}$ интерпретируются как тензоры остаточной деформации, параметр $t \in R$ – как температура. Распределение фаз в области $\Omega$ задаётся характеристической функцией $\chi(x)$, $x \in \Omega$: на её носителе располагается фаза с индексом "+", а на его дополнении – фаза с индексом "–". В

*Ключевые слова*: анализ микроструктуры, полунепрерывность и релаксация, свободные поверхности.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, грант 17-01-00678.

качестве области определения функционала (1.2) возьмём множества

$$\begin{aligned} &u \in \mathbb{H}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \\ &\mathbb{H} = \mathring{W}_2^1(\Omega, R^m), \quad \mathbb{Z}' - \text{совокупность всех измеримых} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \text{характеристических функций.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Под состоянием равновесия двухфазовой среды при фиксированном $t$ понимается решение $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ следующей вариационной задачи

$$I_0[\widehat{u}_t, \widehat{\chi}_t, t] = \inf_{u \in \mathbb{H}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t], \qquad \widehat{u}_t \in \mathbb{H}, \quad \widehat{\chi}_t \in \mathbb{Z}'. \tag{1.4}$$

Состояние равновесия $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ назовём однофазовым, если $\widehat{\chi}_t \equiv 0$ или $\widehat{\chi}_t \equiv 1$, и двухфазовым в противном случае. Очевидно, что для однофазового состояния равновесия $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ равновесное поле смещений $\widehat{u}_t \equiv 0$.

Описанный выше подход по определению равновесного поля смещений $\widehat{u}_t$ и равновесного распределения фаз $\widehat{\chi}_t$ является традиционным [1]. Исследованию задачи (1.4) и близких к ней посвящена обширная литература (см. работы [2,3] и списки литературы в них). Нашей целью является изучение ряда свойств объёмной доли фазы с индексом "+" в состоянии равновесия – величины

$$\widehat{Q}(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}_t(x)\, dx \tag{1.5}$$

(здесь и далее модулем множества из $R^m$ обозначается его $m$-мерная мера Лебега), вычисленной на всех решениях $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ задачи (1.4) при фиксированном значении $t$. Для лучшего понимания природы величины (1.5) сделаем пару предварительных замечаний.

Для задачи (1.4) известно существование независящих от области $\Omega$ температур фазовых переходов $t_\pm$

$$t_- \leqslant t^* \leqslant t_+, \quad t^* = -[\langle A\zeta, \zeta\rangle] \tag{1.6}$$

($[\alpha] = \alpha_+ - \alpha_-$ – скачок принимающей два значения $\alpha_\pm$ величины $\alpha$, в (1.6) оба равенства, если и выполняются, то одновременно), характеризующиеся тем, что [4]

$$\begin{aligned}
&\text{при } t < t_- \text{ реализуется}\\
&\qquad \text{только однофазовое состояние равновесия с } \widehat{\chi}_t \equiv 1,\\
&\text{при } t > t_+ \text{ реализуется}\\
&\qquad \text{только однофазовое состояние равновесия с } \widehat{\chi}_t \equiv 0,\\
&\text{при } t = t_\pm \text{ имеются однофазовые}\\
&\qquad \text{состояния равновесия с } \widehat{\chi}_t \equiv 0 \text{ и } \widehat{\chi}_t \equiv 1, \text{ соответственно,}\\
&\text{при } t \in (t_-, t_+) \text{ нет однофазовых состояний равновесия.}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

При $t \in (t_-, t_+)$ в зависимости от параметров задачи решения (разумеется – двухфазовые) могут как существовать, так и отсутствовать [5,6]. Из сказанного следует, что для величины (1.5) справедливы равенства

$$\widehat{Q}(t) = 1 \quad \text{при} \quad t < t_-, \qquad \widehat{Q}(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > t_+. \tag{1.8}$$

Имеется критерий совпадения температур $t_\pm$ [7]

$$t_\pm = t^* \quad \text{в том и только том случае, если} \quad [A\zeta] = 0. \tag{1.9}$$

В случае $[A\zeta] = 0$ функционал (1.2) примет вид

$$\begin{aligned}
I_0[u, \chi, t] = {} & |\Omega| \langle A^- \zeta^-, \zeta^- \rangle \\
& + \int\limits_\Omega \Big\{ \chi \langle A^+ e(\nabla u), e(\nabla u) \rangle \\
& + (1 - \chi) \langle A^- e(\nabla u), e(\nabla u) \rangle + (t - t^*) \chi \Big\} \, dx
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Поэтому при $t_+ = t_-$ множество всех решений задачи (1.4) исчерпывается соотношениями

$$\begin{aligned}
&\widehat{u}_t \equiv 0 \quad \text{для всех} \quad t \in R,\\
&\widehat{\chi}_t \equiv 1 \quad \text{при} \quad t < t^*,\\
&\widehat{\chi}_t \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > t^*,\\
&\widehat{\chi}_{t^*} - \text{произвольный элемент из} \quad \mathbb{Z}'.
\end{aligned} \tag{1.11}$$

Следовательно, в случае $t_+ = t_-$

$$\begin{aligned} &\widehat{Q}(t) \equiv 1 \quad \text{при} \quad t < t^*, \\ &\widehat{Q}(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > t^*, \\ &\widehat{Q}(t^*) - \text{произвольное число из интервала } [0,1]. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Из (1.7), (1.8), (1.12) следует, что функция (1.5) не обязана быть определённой при всех значениях $t$, а при некоторых условиях может оказаться многозначной.

## §2. Формулировка результатов.

Дадим формулировки доказываемых ниже результатов и приведём комментарии к ним.

**(1)** *Независимость величины* (1.5) *от области* $\Omega$. Поскольку температуры фазовых переходов (1.6) не зависят от области $\Omega$, функция (1.5) принимает значения (1.8) при $t \notin (t_-, t_+)$ в любой области. Описание (1.12) также не зависит от области $\Omega$. Поэтому, изменения области если и отражается на функции (1.5), то лишь на интервале $(t_-, t_+)$. Напомним, что область $\Omega$ в (1.2) всегда считается ограниченной.

**Теорема 1.** (a) *Если при* $t = t_0$ *у задачи* (1.4) *в некоторой области* $\Omega = \omega$ *с* $|\partial\omega| = 0$, *существует решение, для которого в ней* $\widehat{Q}(t_0) = Q_0$, *то при* $t = t_0$ *задача* (1.4) *разрешима в произвольной области* $\Omega$ *и у неё есть решение, для которого в этой области* $\widehat{Q}(t_0) = Q_0$.
(b) *Если при* $t = t_0$ *у задачи* (1.4) *в некоторой области* $\Omega$ *с* $|\partial\Omega| = 0$ *существуют решения* $\widehat{u}^{(i)}_{t_0}$, $\widehat{\chi}^{(i)}_{t_0}$, $i = 1, 2$ *с* $\widehat{Q}(t_0) = Q_i$, $Q_1 < Q_2$, *то у неё в этой области существует решение* $\widehat{u}_{t_0}$, $\widehat{\chi}_{t_0}$ *с любым* $\widehat{Q}(t_0) \in (Q_1, Q_2)$.

Утверждение (a) теоремы приводит к независимости функции (1.5) от области $\Omega$. Утверждение (b) говорит о структуре возможной неоднозначности этой функции, подтверждающейся описанием (1.12) в случае $t_- = t_+$. Для плотностей

$$m = 1, \quad F^{\pm}(M) = a_{\pm}(M - c_{\pm})^2, \quad a_{\pm}, c_{\pm} \in R, \quad a_{\pm} > 0, \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} m \geqslant 2, \quad F^{\pm}(M) &= a\,\mathrm{tr}(e(M) - c_{\pm} i)^2 + b_{\pm}\,\mathrm{tr}^2(e(M) - c_{\pm} i), \\ &a, b_{\pm}, c_{\pm} \in R, \quad a > 0, \quad b_{\pm} \geqslant 0, \\ &i - \text{единичная матрица в пространстве} \quad R^m, \end{aligned} \tag{2.2}$$

в [3] функция (1.5) найдена в явном виде. Оказывается, что при $t_- < t_+$ она однозначна. Ситуация меняется, если в функционале энергии учесть пропорциональную её площади поверхностную энергию границы раздела фаз, заменив функционал (1.2) на

$$I[u,\chi,t,\sigma] = I_0[u,\chi,t] + \sigma S[\chi], \tag{2.3}$$

где $S[\chi]$ – площадь границы раздела фаз для $\chi \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' \cap BV(\Omega)$. Для задачи (1.4) с функционалом (2.3) также вводятся температуры фазовых переходов $t_\pm = t_\pm(\sigma)$. Точки $t = t_\pm(\sigma)$ являются точками многозначности для функции $\widehat{Q}(t,\sigma)$, но (во всяком случае для плотностей (2.1)) множество значений $\widehat{Q}(t_\pm(\sigma),\sigma)$ для каждого из знаков состоит только из двух точек, и не заполняет интервал между ними. За подробностями отсылаем к работе [3].

**(2)** *Связь между равновесным полем смещения $\widehat{u}_t$ и равновесным распределением фаз $\widehat{\chi}_t$.* В следующей теореме обсуждается вопрос об однозначной определяемости одной компоненты из пары $\{\widehat{u}_t, \widehat{\chi}_t\}$ через другую.

**Теорема 2.** (a) *Для любого значения $t$ функция $\widehat{u}_t$ однозначно определяется функцией $\widehat{\chi}_t$.*
(b) *Если $t_- = t_+$, но $t \neq t^*$ или $t_- < t_+$ и выполняется одно из условий*

$$[A\zeta] \notin \mathrm{Im}[A], \tag{2.4}$$

$$[A\zeta] \in \mathrm{Im}[A] \quad \textit{и либо } [A] \geqslant 0, \textit{ либо } [A] \leqslant 0, \tag{2.5}$$

*то функция $\widehat{\chi}_t$ однозначно определяется функцией $\widehat{u}_t$.*

Поскольку функция $\widehat{u}_t$ является минимизатором функционала $J[u,t] = I_0[u,\widehat{\chi}_t,t]$, $u \in \mathbb{H}$, первое утверждение теоремы вытекает из строгой выпуклости этого функционала. Для пояснения второго – перепишем функционал (1.2) в виде

$$I_0[u,\chi,t] = \int\limits_\Omega F^-(\nabla u)\,dx + \int\limits_\Omega \chi(F^+(\nabla u) - F^-(\nabla u) + t)\,dx. \tag{2.6}$$

Из (2.6) следует, что

$$\begin{gathered} \widehat{\chi}_t(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad R(x,t) < 0, \\ 0 & \text{при} \quad R(x,t) > 0; \end{cases} \\ R(x,t) = F^+(\nabla\widehat{u}_t(x)) - F^-(\nabla\widehat{u}_t(x)) + t, \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\begin{gathered}\widehat{\chi}_t(x) - \text{произвольная характеристическая функция} \\ \text{на множестве } E_{\widehat{u}_t} = \{x \in \Omega : \ R(x,t) = 0\}.\end{gathered} \tag{2.8}$$

Благодаря (1.11) в случае $t_+ = t_-$ выполняется равенство $R(x,t) = t - t^*$. Следовательно, $|E_{\widehat{u}_t}| = 0$ при $t_+ = t_-$ и $t \neq t^*$, $E_{\widehat{u}_t} = \Omega$ при $t_+ = t_-$ и $t = t^*$. Таким образом, для доказательства теоремы осталось установить, что

$$\begin{gathered}\text{при выполнении условий (2.4) или (2.5) в случае } t_- < t_+ \\ \text{для любого } t \text{ справедливо равенство} \quad |E_{\widehat{u}_t}| = 0.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Итак, при выполнении условий теоремы функция (1.5) не может иметь двух различных значений для пары $\{\widehat{u}_t, \widehat{\chi}_t\}$ с фиксированной первой компонентой. В силу (1.11), (1.12) при нарушении условия ($b$) теоремы (то есть при $t_- = t_+$ и $t = t^*$) функция $\widehat{u}_{t^*} \equiv 0$, но значения функции (1.5) в точке $t = t^*$ заполняют интервал $[0,1]$.

**(3)** *Гладкая зависимость от температуры равновесной энергии и точки однозначности функции* (1.5). Для фиксированной области $\Omega$ положим

$$i(t) = \inf_{u \in \mathbb{H}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t]. \tag{2.10}$$

Функцию (2.10) назовём равновесной энергией функционала (1.2). Если для $t = t_0$ задача (1.4) разрешима, то $i(t_0) = I_0[\widehat{u}_{t_0}, \widehat{\chi}_{t_0}, t_0]$ для любого её решения $\widehat{u}_{t_0}$, $\widehat{\chi}_{t_0}$. Благодаря (1.7)

$$\begin{aligned} i(t) &= |\Omega|(t + \langle A^+\zeta^+, \zeta^+\rangle) \quad \text{при} \quad t \leqslant t_-, \\ t(t) &= |\Omega|\langle A^-\zeta^-, \zeta^-\rangle \quad \text{при} \quad t \geqslant t_+. \end{aligned} \tag{2.11}$$

В случае $t_+ = t_-$ соотношение (2.11) уточняется

$$\begin{aligned} i(t) &= |\Omega|(t + \langle A^+\zeta^+, \zeta^+\rangle) \quad \text{при} \quad t \leqslant t^*, \\ i(t) &= |\Omega|\langle A^-\zeta^-, \zeta^-\rangle \quad \text{при} \quad t \geqslant t^*. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Из определения (1.6) числа $t^*$ вытекает непрерывность функции (2.12).

**Теорема 3.** (a) *Существует такое множество полной меры $\mathcal{L} \subset R$, в точках которого функция* (2.10) *имеет конечную классическую производную $i'(t)$, эта производная непрерывна на $\mathcal{L}$ и монотонно убывает. В каждой точке $t \in R \setminus \mathcal{L}$ у функции* (2.10) *существуют конечные односторонние классические производные $i'(t-0) > i'(t+0)$, причём*

$$i'(t-0) = \lim_{\tau \in \mathcal{L}, \tau < t, \tau \to t} i'(\tau), \quad i'(t+0) = \lim_{\tau \in \mathcal{L}, \tau > t, \tau \to t} i'(\tau). \tag{2.13}$$

(b) *Если для данного* $t = t_0$ *задача* (1.4) *разрешима, то*

$$\begin{aligned} &|\Omega|\widehat{Q}(t_0) = i'(t_0) \quad \textit{при} \quad t_0 \in \mathcal{L}, \\ &|\Omega|\widehat{Q}(t_0) \in [i'(t_0+0), i'(t_0-0)] \quad \textit{при} \quad t_0 \in E \setminus \mathcal{L} \end{aligned} \tag{2.14}$$

*для всех её решений* $\widehat{u}_{t_0}$, $\widehat{\chi}_{t_0}$.

Для произвольных плотностей энергии в случае $t_- = t_+$ из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = R \setminus \{t^*\}, \quad i'(t) = |\Omega| \quad \text{при} \quad t < t^*, \\ i'(t) = 0 \quad \text{при} \quad t > t^*, \\ i'(t^*-0) = |\Omega|, \quad i'(t^*+0) = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Соотношения (1.12), (2.15) подтверждают утверждение теоремы. Для плотностей (2.1), (2.2) с $t_- < t_+$ функция $i(t)$ выписывается в явном виде [3]. Для неё $\mathcal{L} = R$. Этот же факт имеет место и для плотности

$$\begin{aligned} &F^{\pm}(M) = a\,\mathrm{tr}(e(M) - c_{\pm}P^{(k)})^2, \\ &\quad M \in R^{m\times m}, \quad a, c_{\pm} \in R, \quad a > 0, \quad 1 \leqslant k < m, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $P^{(k)}$ – ортопроектор в $R^m$ на $k$-мерное подпространство, но при $t \in (t_-, t_+)$ задача (1.4) для этих плотностей не имеет решений [7].

## §3. Доказательство теоремы 1

(a). По области $\omega$ построим семейство областей

$$\omega_{\xi,\lambda} = \{x \in R^m : x = \lambda\widetilde{x} + \xi, \widetilde{x} \in \omega\}, \quad \lambda > 0, \quad \xi \in R^m, \tag{3.1}$$

полученных из $\omega$ растяжением в $\lambda$ раз и последующим сдвигом на вектор $\xi$. Введём в обозначение множества $\mathbb{H}$, $\mathbb{Z}'$ и в число аргументов функционала $I_0$ область определения функций $u$, $\chi$. По функциям $u \in \mathbb{H}(\omega)$, $\chi \in \mathbb{Z}'(\omega)$ зададим функции

$$u^{\xi,\lambda}(x) = \lambda u(\widetilde{x}), \quad \chi^{\xi,\lambda}(x) = \chi(\widetilde{x}), \quad \widetilde{x} \in \omega, \quad x = \lambda\widetilde{x} + \xi \in \omega_{\xi,\lambda}. \tag{3.2}$$

Очевидно, что $u^{\xi,\lambda} \in \mathbb{H}(\omega_{\xi,\lambda})$, $\chi^{\xi,\lambda} \in \mathbb{Z}'(\omega_{\xi,\lambda})$ и каждые функции из $\mathbb{H}(\omega_{\xi,\lambda})$, $\mathbb{Z}'(\omega_{\xi,\lambda})$ получаются из некоторых функций из $\mathbb{H}(\omega)$, $\mathbb{Z}'(\omega)$ с помощью процедуры (3.2).

Замена координат даёт

$$I_0[u^{\xi,\lambda}, \chi^{\xi,\lambda}, t, \omega_{\xi,\lambda}] = \lambda^m I_0[u, \chi, t, \omega]. \tag{3.3}$$

Так как $|\omega_{\xi,\lambda}| = \lambda^m|\omega|$, из (3.3) получаем

$$\frac{1}{|\omega_{\xi,\lambda}|}I_0[u^{\xi,\lambda},\chi^{\xi,\lambda},t,\omega_{\xi,\lambda}] = \frac{1}{|\omega|}I_0[u,\chi,t,\omega]. \tag{3.4}$$

Квазивыпуклая оболочка $\mathcal{F}(M,t)$ функции

$$F_{\min}(M,t) = \min\{F^+(M)+t, F^-(M)\}$$

не зависит от области $\omega$ и определяется равенством [8]

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(M,t)=\inf_{u\in\mathbb{H}(\omega),\chi\in\mathbb{Z}'(\omega)}\frac{1}{|\omega|}\int\limits_{\omega}\Big\{&\chi(F^+(M+\nabla u)+t)\\ &+(1-\chi)F^-(M+\nabla u)\Big\}\,dx,\ M\in R^{m\times m}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда $\widehat{u}_{t_0}\in\mathbb{H}(\omega)$, $\widehat{\chi}_{t_0}\in\mathbb{Z}'(\omega)$ является решением задачи (1.4) для функционала $I_0[u,\chi,t_0,\omega]$ в том и только том случае, если

$$I_0[\widehat{u}_{t_0},\widehat{\chi}_{t_0},t_0,\omega] = |\omega|\mathcal{F}(0,t_0). \tag{3.6}$$

В силу (3.4)

$$I_0[\widehat{u}^{\xi,\lambda}_{t_0},\widehat{\chi}^{\xi,\lambda}_{t_0},\omega_{\xi,\lambda}] = |\omega_{\xi,\lambda}|\mathcal{F}(0,t_0). \tag{3.7}$$

Поэтому пара $\widehat{u}^{\xi,\lambda}_{t_0}\in\mathbb{H}(\omega_{\xi,\lambda})$, $\widehat{\chi}^{\xi,\lambda}_{t_0}\in\mathbb{Z}'(\omega_{\xi,\lambda})$ является решением задачи (1.4) для функционала $I_0[u,\chi,t_0,\omega_{\xi,\lambda}]$. Учитывая (3.1), (3.2), имеем

$$\begin{gathered}\frac{1}{|\omega|}\int\limits_{\omega}\widehat{\chi}_{t_0}(\widetilde{x})\,d\widetilde{x} = \frac{1}{|\omega_{\xi,\lambda}|}\int\limits_{\omega_{\xi,\lambda}}\widehat{\chi}^{\xi,\lambda}_{t_0}(x)\,dx,\\ \int\limits_{\omega_{\xi,\lambda}}|\nabla\widehat{u}^{\xi,\lambda}_{t_0}(x)|^2\,dx = \lambda^m\int\limits_{\omega}|\nabla\widehat{u}_{t_0}(\widetilde{x})|^2\,d\widetilde{x} = \frac{|\omega_{\xi,\lambda}|}{|\omega|}\int\limits_{\omega}|\nabla\widehat{u}_{t_0}(\widetilde{x})|^2\,d\widetilde{x}.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Из первого соотношения (3.8), следует, что величина (1.5) для решения $\widehat{u}_{t_0}\in\mathbb{H}(\omega)$, $\widehat{\chi}_{t_0}\in\mathbb{Z}'(\omega)$ и $\widehat{u}^{\xi,\lambda}_{t_0}\in\mathbb{H}(\omega_{\xi,\lambda})$, $\widehat{\chi}^{\xi,\lambda}_{t_0}\in\mathbb{Z}'(\omega_{\xi,\lambda})$ одинакова.

Из определения (3.1) областей $\omega_{\xi,\lambda}$ вытекает, что множества $\bar{\omega}_{\xi,\lambda}$ удовлетворяют всем требованиям [9, гл.4, §3] для построения с их помощью покрытия Витали произвольной области $\Omega\subset R^m$: существуют такие $\lambda=\lambda^i$, $\xi=\xi^i$, $i=1,2,\dots$, для которых $E^i=\bar{\omega}^i$, $\omega^i=\omega_{\xi^i,\lambda^i}$, обладают свойствами

$$E^i\subset\Omega,\qquad E^i\cap E^j=\varnothing\quad\text{при}\quad i\neq j,\qquad |\Omega\setminus\cup_i E^i|=0. \tag{3.9}$$

Поскольку $|\partial\omega^i| = 0$, для всех $i$ справедливо равенство $|E^i| = |\omega^i|$. Поэтому

$$|\Omega| = \Sigma_i |E^i| = \Sigma_i |\omega^i|. \tag{3.10}$$

Положим

$$u^{(i)}(x) = \widehat{u}_{t_0}^{\xi^i,\lambda^i}(x), \quad \chi^{(i)}(x) = \widehat{\chi}_{t_0}^{\xi^i,\lambda^i}(x), \qquad x \in \omega^i.$$

Обозначим через $\bar{u}^{(1)}$, $\bar{\chi}^{(i)}$ распространение нулём этих функций в область $\Omega$. Очевидно, что $\bar{u}^{(i)} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\bar{\chi}^{(i)} \in \mathbb{Z}'(\Omega)$. Из (3.8) и (3.10) следует сходимость рядов

$$\bar{u} = \Sigma_i \bar{u}^{(i)}, \quad \bar{\chi} = \Sigma_i \bar{\chi}^{(i)}$$

в пространстве $\mathbb{H}(\Omega)$ и $L_1(\Omega)$, соответственно. Поэтому $\bar{u} \in \mathbb{H}(\Omega)$, $\bar{\chi} \in \mathbb{Z}'(\Omega)$. В силу (3.10)

$$\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} \bar{\chi}(x)\, dx = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \widehat{\chi}_{t_0}(\widetilde{x})\, d\widetilde{x}. \tag{3.11}$$

Учитывая (3.7), (3.10), имеем

$$\begin{aligned} I_0[\bar{u}, \bar{\chi}, t_0, \Omega] &= \Sigma_i I_0[u^{(i)}, \chi^{(i)}, t_0, \omega^i] \\ &= (\Sigma_i |\omega^i|)\mathcal{F}(0, t_0) = |\Omega|\mathcal{F}(0, t_0). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Поэтому пара $\bar{u}$, $\bar{\chi}$ является решением задачи (1.4) для функционала $I_0[u, \chi, t_0, \Omega]$. В силу (3.11) величины (1.5) для этого (в области $\Omega$) и исходного $\widehat{u}_{t_0}$, $\widehat{\chi}_{t_0}$ (в области $\omega$) решений совпадают.

(b). Для каждого $\nu \in R$ разделим гиперплоскостью

$$T_{e,\nu} = \{x \in R^m : x \cdot e = \nu\}, \quad e \in R^m, \quad |e| = 1$$

область $\Omega$ на две части

$$\Omega_+^\nu = \{x \in \Omega : x \cdot e > \nu\}, \quad \Omega_-^\nu = \{x \in \Omega : x \cdot e < \nu\}.$$

Очевидно, что $\Omega_\pm^\nu$ – открытые множества, $|\Omega_+^\nu|$ непрерывно зависит от $\nu$, $|\Omega| = |\Omega_+^\nu| + |\Omega_-^\nu|$. Тогда для любого $\mu \in [0, 1]$ существует такое $\nu$, что $|\Omega_+^\nu| = \mu|\Omega|$, $|\Omega_-^\nu| = (1 - \mu)||\Omega|$.

В дальнейших построениях использованы методика доказательства части (a) и обозначения из формулировки части ($b$) теоремы.

Для каждой компоненты связности $\omega_+^i$ множества $\Omega_+^\nu$ построим решение $\bar{u}_i^+$, $\bar{\chi}_i^+$ задачи (1.4) для функционала $I_0[u, \chi, t_0, \omega_+^i]$ с равной $Q_1$ величиной (1.5). Для каждой компоненты связности $\omega_-^i$ множества $\Omega_-^\nu$ – решение $\bar{u}_i^-$, $\bar{\chi}_i^-$ задачи (1.4) для функционала $I_0[u, \chi, t_0, \omega_-^i]$ с равной

$Q_2$ величиной (1.5). Аналогично (3.12) приходим к выводу, что пара $\widehat{u}^{(3)}_{t_0}$, $\widehat{\chi}^{(3)}_{t_0}$

$$\begin{aligned} &\widehat{u}^{(3)}_{t_0}(x) = \bar{u}^+_i(x), \quad \widehat{\chi}^{(3)}_{t_0}(x) == \bar{\chi}^+_i(x) \quad \text{при} \quad x \in \omega^i_+, \\ &\widehat{u}^{(3)}_{t_0}(x) = \bar{u}^-_i(x), \quad \widehat{\chi}^{(3)}_{t_0}(x) == \bar{\chi}^-_i(x) \quad \text{при} \quad x \in \omega^i_- \end{aligned}$$

является решением задачи (1.4) для функционала $I_0[u, \chi, t_0, \Omega]$, для которого

$$\begin{aligned} |\Omega| Q_3 = \int\limits_{\Omega} \widehat{\chi}^{(3)}_{t_0}\, dx = \Sigma_i \int\limits_{\omega^i_+} \bar{\chi}^+_i\, dx + \Sigma_i \int\limits_{\omega^i_-} \bar{\chi}^-_i\, dx = Q_1 \Sigma_i |\omega^i_+| + Q_2 \Sigma_i |\omega^i_-| \\ = Q_1 |\Omega^\nu_+| + Q_2 |\Omega^\nu_-| = |\Omega| (\mu Q_1 + (1-\mu) Q_2). \end{aligned}$$

## §4. Доказательство теоремы 2

Как уже было установлено, в обосновании нуждается лишь утверждение (2.9). Его доказательство разобьём на ряд этапов.

(1) *При почти всех* $x \in E_{\widehat{u}_t}$ *выполняется равенство*

$$[A] e(\nabla \widehat{u}_t(x)) = [A\zeta]. \tag{4.1}$$

Пусть пара $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ минимизирует функционал (1.2), переписанный в виде

$$\begin{aligned} I_0[u, \chi, t] = \int\limits_{\Omega} F^-(\nabla u)\, dx + \int\limits_{\Omega \setminus E_{\widehat{u}_t}} \chi (F^+(\nabla u) - F^-(\nabla u) + t)\, dx \\ + \int\limits_{E_{\widehat{u}_t}} \chi (F^+(\nabla u) - F^-(\nabla u) + t)\, dx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Тогда пара $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}'_t$

$$\widehat{\chi}'_t(x) = \widehat{\chi}_t(x) \quad \text{при} \quad x \in \Omega \setminus E_{\widehat{u}_t}, \qquad \widehat{\chi}'_t(x) = \psi(x) \quad \text{при} \quad x \in E_{\widehat{u}_t}$$

с любой измеримой характеристической на $E_{\widehat{u}_t}$ функцией $\psi$ также минимизирует этот функционал. Варьируя по $u$ в точке $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}'_t$ функционал (4.2), приходим к выводу, что для всех $h \in \mathbb{H}$ (нижний индекс у

функций $F^{\pm}$ означает их производную по матричному аргументу $M$)

$$\int\limits_{\Omega} F_M^-(\nabla\widehat{u}_t)\nabla h\,dx + \int\limits_{\Omega\setminus E_{\widehat{u}_t}} \widehat{\chi}_t(F_M^+(\nabla\widehat{u}_t) - F_M^-(\nabla\widehat{u}_t))\nabla h\,dx$$
$$= -\int\limits_{E_{\widehat{u}_t}} \psi(F_M^+(\nabla\widehat{u}_t) - F_M^-(\nabla\widehat{u}_t))\nabla h\,dx. \tag{4.3}$$

Взяв в (4.3) функцию $\psi = 0$, убедимся в равенстве нулю левой части этого соотношения. Поэтому для всех $\psi$

$$\int\limits_{\Omega} \chi_{E_{\widehat{u}_t}}\psi(F_M^+(\nabla\widehat{u}_t) - F_M^-(\nabla\widehat{u}_t))\nabla h\,dx = 0, \tag{4.4}$$

где $\chi_{E_{\widehat{u}_t}}$ – характеристическая функция множества $E_{\widehat{u}_t}$.

Фиксируем $x^0 \in \Omega$ и положим

$h(x) = \phi(x)Bx$,

$\psi(x)$ – характеристическая функция множества $E_{\widehat{u}_t} \cap B_r(x^0)$,

$\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\phi(x) \equiv 1$ в $B_\rho(x^0)$, $B \in R_s^{m\times m}$, $r \in (0,\rho)$.

Тогда из (4.4) и произвола в выборе матрицы $B$ имеем

$$\int\limits_{B_r(x^0)} \chi_{E_{\widehat{u}_t}}(F_M^+(\nabla\widehat{u}_t) - F_M^-(\nabla\widehat{u}_t))\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad r \in (0,\rho).$$

Поэтому подынтегральная функция обращается в ноль в каждой своей точке Лебега $x^0$. Следовательно, $F_M^+(\nabla\widehat{u}_t(x)) - F_M^-(\nabla\widehat{u}_t(x)) = 0$ почти всюду в $E_{\widehat{u}_t}$, что совпадает с (4.1).

(2) *Доказательство утверждения* (2.9) *при выполнении условия* (2.4). При наличии (2.4) равенство (4.1) может выполняться почти всюду на $E_{\widehat{u}_t}$ в том и только том случае, если $|E_{\widehat{u}_t}| = 0$.

(3) *Определение значения $t$, при котором возможно равенство* (4.1) *в случае* $[A\zeta] \in \mathrm{Im}[A]$ *и* $|E_{\widehat{u}_t}| > 0$. Из квадратичности плотностей энергии $F^{\pm}(M)$ следует, что

$$\langle A^{\pm}\zeta^{\pm}, \zeta^{\pm}\rangle = F^{\pm}(0) = F^{\pm}(M-M) = F^{\pm}(M) - F_M^{\pm}(M)M + \frac{1}{2}F_{MM}^{\pm}(M,M).$$

Тогда

$$t - t^* = (F^+(M) - F^-(M) + t) - [F_M(M)]M + \frac{1}{2}[F_{MM}](M,M).$$

Положим $M = \nabla\widehat{u}_t$. Учитывая определение (2.8) множества $E_{\widehat{u}_t}$ и равенство (4.1), получаем

$$\begin{aligned} t-t^* &= \frac{1}{2}[F_{MM}](e(\nabla\widehat{u}_t), e(\nabla\widehat{u}_t)) \\ &= \langle [A]e(\nabla\widehat{u}_t), e(\nabla\widehat{u}_t)\rangle = \langle [A\zeta], e(\nabla\widehat{u}_t)\rangle \text{ почти всюду на } E_{\widehat{u}_t}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

В ряде случаев [6] функционал энергии (1.2) можно упростить, добившись выполнения равенства $\zeta^+ = \zeta^-$. При реализации этого утверждения воспользуемся предложенной в [7] схемой.

При наших предположениях существует решение $\xi \in R_s^{m\times m}$ линейного уравнения

$$[A]\xi = [A\zeta]. \tag{4.6}$$

Наличие этого решения позволяет представить функционал (1.2) следующим образом (временно в число его аргументов внесём тензоры остаточной деформации)

$$\begin{aligned} I_0[u,\chi,t,\zeta^\pm] = I_0[u,\chi,t',\xi] + |\Omega|(\langle A^-\zeta^-, \zeta^-\langle -\rangle A^-\xi, \xi\rangle), \\ t' = t + [\langle A\zeta,\zeta\rangle] - \langle [A]\xi,\xi\rangle. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Очевидно, что множество минимизаторов $\widehat{u}_t$, $\widehat{\chi}_t$ функционала $I_0[u,\chi,t,\zeta^\pm]$ совпадает с множеством минимизаторов $\widehat{u}_{t'}$, $\widehat{\chi}_{t'}$ функционала $I_0[u,\chi,t',\xi]$ и

$$\begin{aligned} t^* + [\langle A\zeta,\zeta\rangle] - \langle [A]\xi,\xi\rangle = t'^* = -\langle [A]\xi,\xi\rangle, \\ t - t^* = t' - t'^*, \quad E_{\widehat{u}_t} = E_{\widehat{u}_{t'}}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Пользуясь (4.1) и (4.6), получаем

$$\langle [A\zeta], e(\nabla\widehat{u}_t)\rangle = \langle [A]\xi,\xi\rangle \quad \text{почти всюду на} \quad E_{\widehat{u}_t}. \tag{4.9}$$

Интегрируя обе части равенств (4.5) и (4.9) по множеству $E_{\widehat{u}_t}$, учитывая положительность его меры и второе соотношение (4.8), приходим к выводу, что $t' - t'^* = \langle [A]\xi,\xi\rangle$. Тогда в силу второго равенства из первого соотношения (4.8) число $t' = 0$.

Таким образом

$$\begin{aligned} &\text{при } [A\zeta] \in \mathrm{Im}[A] \text{ неравенство } |E_{\widehat{u}_{t'}}| > 0 \text{ если и реализуется,} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{то при } t' = 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

(4) *Вычисление минимизаторов функционала* $I_0[u,\chi,0,\xi]$. Запишем функционал $I_0[u,\chi,0,\xi]$ двумя разными способами

$$I_0[u,\chi,0,\xi] = \int\limits_\Omega \Big\{F^-(\nabla u) + \chi(F^+(\nabla u) - F^-(\nabla u)\Big\}\,dx$$
$$= \int\limits_\Omega \Big\{F^+(\nabla u) - (1-\chi)(F^+(\nabla u) - F^-(\nabla u)\Big\}\,dx.$$

Тогда

$$I_0[u,\chi,0,\xi] - |\Omega|\langle A^-\xi,\xi\rangle = \int\limits_\Omega \langle A^- e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle$$
$$+ \int\limits_\Omega \chi\{\langle [A]e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle - 2\langle [A]\xi, e(\nabla u)\rangle + \langle [A]\xi,\xi\rangle\}\,dx,$$
$$I_0[u,\chi,0,\xi] - |\Omega|\langle A^+\xi,\xi\rangle = \int\limits_\Omega \langle A^+ e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle$$
$$- \int\limits_\Omega (1-\chi)\{\langle [A]e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle - 2\langle [A]\xi, e(\nabla u)\rangle + \langle [A]\xi,\xi\rangle\}\,dx.$$

Поэтому

$$I_0[u,\chi,0,\xi] - |\Omega|\langle A^-\xi,\xi\rangle$$
$$= \int\limits_\Omega \{\langle A^- e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle + \chi|[A]^{1/2}(e(\nabla u) - \xi)|^2\}\,dx \text{ при } [A] \geqslant 0,$$
$$I_0[u,\chi,0,\xi] - |\Omega|\langle A^+\xi,\xi\rangle$$
$$= \int\limits_\Omega \{\langle A^+ e(\nabla u), e(\nabla u)\rangle + (1-\chi)|[-A]^{1/2}(e(\nabla u) - \xi)|^2\}\,dx \text{ при } [A] \leqslant 0.$$

Следовательно, минимизаторы функционала $I_0[u,\chi,0,\xi]$ – функции $\widehat{u}_0$, $\widehat{\chi}_0$, имеют вид

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_0 \equiv 0,\ \widehat{\chi}_0 \equiv 0 \quad \text{при} \quad [A] \geqslant 0 \quad \text{и} \quad [A]^{1/2}\xi \neq 0,\\ &\widehat{u}_0 \equiv 0,\ \widehat{\chi}_0 \equiv 1 \quad \text{при} \quad [A] \leqslant 0 \quad \text{и} \quad [-A]^{1/2}\xi \neq 0. \end{aligned} \tag{4.11}$$

(5) *Доказательство утверждения* (2.9) *при выполнении условия* (2.5). Так как $t_- < t_+$, из (1.9) следует, что на решении задачи (4.6) матрица $[A]\xi$ отлична от нуля. В силу симметрии и предположений о знаке

отображений [A] величина $\langle [A]\xi, \xi\rangle \neq 0$, что приводит к справедливости неравенств в (4.11). Тогда у функционала $I_0[u, \chi, 0, \xi]$ имеется лишь один (свой для каждого из знаков отображения $[A]$) минимизатор (4.11). Следовательно, определённая в (2.7) функция $R(x, 0) = \langle [A]\xi, \xi\rangle \neq 0$, что делает невозможной реализацию (4.10).

## §5. Доказательство теоремы 3

(a) При фиксированных $u$ и $\chi$ функция $I_0[u, \chi, t]$ линейна по $t \in R$. Следовательно, функция (2.10), как инфимум семейства вогнутых функций – вогнута. Из вогнутости и (2.11) вытекает её равномерная липшицевость. Поэтому $i(.) \in W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(R)$ и локально абсолютно непрерывна. У неё существует соболевская производная $Di(t)$ и при почти всех $t \in R$ – классическая $i'(t)$, причём $i'(t) = Di(t)$ почти всюду на $R$.

Дальнейшие рассуждения традиционны и базируются лишь на свойствах вогнутых функций. Для замкнутости изложения кратко остановимся на них.

Фиксируем представитель функции $Di(t)$ с равномерно ограниченным модулем. Обозначим через $\mathcal{L}'$ множество всех точек Лебега этого представителя – множество точек $t \in R$, для которых

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} |Di(\xi) - Di(t)|\, d\xi \to 0 \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Усреднение сохраняет свойство вогнутости. Поэтому $i_\rho(t)$ – гладкая вогнутая функция. Следовательно, $(i_\rho)'(t_2) \leqslant (i_\rho)'(t_1)$ при $t_1 < t_2$. Так как $D(i_\rho) = (Di)_\rho$ и $(Di)_\rho(t) \to Di(t)$ при $\rho \to 0$ и $t \in \mathcal{L}'$, приходим к монотонности соболевской производной

$$Di(t_2) \leqslant Di(t_1), \quad \text{при} \quad t_1 < t_2, \quad t_1, t_2 \in \mathcal{L}'. \tag{5.1}$$

В силу абсолютной непрерывности функции $i(t)$

$$\frac{i(t+h) - i(t)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{t}^{t+h} Di(\xi)\, d\xi.$$

Тогда при $h \to 0$ для любого $t \in \mathcal{L}'$

$$\Big|\frac{i(t+h) - i(t)}{h} - Di(t)\Big| \leqslant 2\frac{1}{2|h|}\int\limits_{|t-\xi|<|h|} |Di(\xi) - Di(t)|\, dx \to 0.$$

Следовательно, в каждой точке $t \in \mathcal{L}'$ существует конечная классическая производная и выполняется равенство $i'(t) = Di(t)$.

Пусть $t \in R$, $\tau \in \mathcal{L}'$. Из (5.1) вытекает существование конечных пределов

$$\lim_{\tau \to t, \tau < t} Di(\tau) = \alpha_-, \quad \lim_{\tau \to t, \tau > t} Di(\tau) = \alpha_+, \quad \alpha_- \geqslant \alpha_+. \tag{5.2}$$

Поскольку для $\zeta \in R$, $\zeta \neq t$

$$\begin{aligned} \frac{i(t) - i(\zeta)}{t - \zeta} - \alpha_- &= \frac{1}{t - \zeta} \int\limits_{\zeta}^{t} (Di(\xi) - \alpha_-)\, d\xi \quad \text{при} \quad \zeta < t, \\ \alpha_+ - \frac{i(t) - i(\zeta)}{t - \zeta} &= \frac{1}{\zeta - t} \int\limits_{t}^{\zeta} (\alpha_+ - Di(\xi))\, d\xi \quad \text{при} \quad \zeta > t, \end{aligned} \tag{5.3}$$

благодаря (5.2) существуют пределы

$$\begin{aligned} i'(t-0) &= \lim_{\zeta \to t, \zeta < t} \frac{i(t) - i(\zeta)}{t - \zeta} = \alpha_-, \\ i'(t+0) &= \lim_{\zeta \to t, \zeta > t} \frac{i(t) - i(\zeta)}{t - \zeta} = \alpha_+. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Если $\alpha_- = \alpha_+ = \alpha$, то в точке $t$ существует конечная классическая производная $i'(t) = \alpha$. Переопределим функцию $Di(t)$ в таких точках, положив $Di(t) = i'(t)$. Очевидно, что множество $\mathcal{L}'$ будет содержат лишь точки Лебега переопределённой функции. В силу знакоопределённости почти всюду на интервалах интегрирования подынтегральных выражений в (5.3), точки $t$, для которых $\alpha_\pm = \alpha$, будут также точками Лебега переопределённой функции. Обозначим через $\mathcal{L}$ объединение $\mathcal{L}'$ с этими точками. Из (5.3) вытекает, что точки множества $R \setminus \mathcal{L}$ не являются для неё точками Лебега.

При $\alpha_+ = \alpha_-$ соотношения (5.2) означают непрерывность на множестве $\mathcal{L}$ функции $i'(t)$, а при $\alpha_+ < \alpha_-$ – справедливость (2.13).

Таким образом, искомым в теореме 3(a) множеством $\mathcal{L}$ является множество всех точек Лебега специального представителя функции $Di(t)$.

(b) Для произвольного $t \in R$ и любого решения $\widehat{u}_{t_0}$, $\widehat{\chi}_{t_0}$ задачи (1.4) для функционала $I[u, \chi, t_0]$ имеем

$$\begin{aligned} i(t) \leqslant I_0[\widehat{u}_{t_0}, \widehat{\chi}_{t_0}, t] &= I_0[\widehat{u}_{t_0}, \widehat{\chi}_{t_0}, t_0] + (t - t_0)|\Omega|\widehat{Q}(t_0) \\ &= i(t_0) + (t - t_0)|\Omega|\widehat{Q}(t_0). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{t(t) - i(t_0)}{t - t_0} &\leqslant |\Omega|\widehat{Q}(t_0) \quad \text{при} \quad t > t_0, \\ \frac{i(t) - i(t_0)}{t - t_0} &\geqslant |\Omega|\widehat{Q}(t_0)| \quad \text{при} \quad t < t_0. \end{aligned}$$

При $t_0 \in \mathcal{L}$ левые части последних неравенств имеют одинаковый предел $i'(t_0)$. При $t_0 \in R \setminus \mathcal{L}$ эти пределы совпадают с $i'(t_0 \pm 0)$, соответственно.

## Литература


1. М. А. Гринфельд, *Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений*, Москв,а Наука, 1990.
2. G. Allaire, *Shape Optimization by the Homogenization Method.* — Applied Mathematical Sciences, **146** (2002).
3. В.Г.Осмоловский, *Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред.* — St. Petersburg Mathematical Society Preprint 2014-04. `http: //www. mathsoc. spb.ru /preprint /2014/ index.html 04.`
4. V. G. Osmolovskii, *Independence of Temperature of Phase Transitions of the Domain Occupied by a Two-Phase elastic Medium.* — J. Math. Sci., **186**, No. 2 (2012), 302–306.
5. V. G. Osmolovskii, *Exact solutions to the variational problem of the phase transition theory in continuum mechanics.* – J. Math. Sci., **120**, 1167–1190 (2004).
6. G. Allaire, V. Lods, *Minimizers for double-well problem with affine boundary conditions.* — Proceedings of the Royal Society of Edinburg, **129A**, 439–466 (1999).
7. V. G. Osmolovskii, *Computation of Phase Transition Temperatures for Anisotropic Model of a Two-Phase Elastic Medium.* — J. Math. Sci., **216**, No. 2, 313–324 (2016).
8. B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations.* Berlin, 1989.
9. S. Saks, *Theory of the Integral*, Hafner Publ. Co, New York, 1938.

Osmolovskii V. G. The volume fraction of one of the phases in equilibrium two-phase elastic medium.

In this paper, we study the relationship between the volume fraction of one phase of an equilibrium two-phase medium and other characteristics of the equilibrium state.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7-9
199034 С.-Петербург
*E-mail*: victor.osmolovskii@gmail.com

Поступило 3 июля 2017 г.