Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 459, 2017 г.

А. М. Минарский, А. И. Назаров

О СПЕКТРАХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ПОРОЖДАЕМЫХ НЕКОТОРЫМИ ОДНОМЕРНЫМИ ТЕОРЕМАМИ ВЛОЖЕНИЯ

§1. Введение

Рассмотрим задачу о точной константе в теореме вложения

$$\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^{n-p}(-1,1)$$

$$\Phi_{n,p}(u) := \frac{\big\langle D^n u, D^n u\big\rangle}{\big\langle D^{n-p} u, D^{n-p} u\big\rangle} \ \to\ \min\,. \tag{1}$$

Здесь $n \geqslant p > 0$, $\langle f, g\rangle = \int\limits_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$ – стандартное скалярное произведение в $L_2(-1,1)$, D – оператор дифференцирования, а минимум берется по множеству

$$\overset{\circ}{W}{}_2^n(-1,1) = \Big\{ f \in \mathcal{A}C^{n-1}[-1,1] \,\big|\, D^n f \in L_2(-1,1);$$
$$D^j f(\pm 1) = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1 \Big\}.$$

Задача (1) привлекала внимание многих исследователей. При $n = p = 1$ она была решена В.А. Стекловым [19]. При $n = 2$, $p = 1$ ответ был получен в [6], при всех n и $p = 1$ – в [7] (полное доказательство было дано в [8], см. также [15]). При произвольных $n, p \in \mathbb{N}$ ответ был сформулирован в [4] (см. также [9]) в неявных терминах, более явный ответ с полным доказательством был дан в [16] (см. также [17] при $p = 2$).

Ключевые слова: теоремы вложения высокого порядка, собственные числа.

Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 16-01-00258 и грантом СПбГУ–DFG 6.65.37.2017.

Замечание 1. Легко видеть, что при $n > p$ задача (1) заменой $y = D^k u$, $k \leqslant n-p$, сводится к минимизации функционала $\Phi_{n-k,p}$ на множестве

$$\Big\{ f \in \overset{\circ}{W}{}_2^{n-k}(-1,1) \,\Big|\, \int\limits_{-1}^{1} f(t)\, t^j\, dt = 0,\ j = 0, 1, \ldots, k-1 \Big\}.$$

При $n = 2$, $k = p = 1$ это задача о точной константе в неравенстве Пуанкаре, которая также была решена В.А. Стекловым [18]. Большой список литературы о точных константах в подобных задачах, как одномерных, так и многомерных, содержится в обзорах [14] и [11].

Стандартное рассуждение показывает, что минимум в (1) достигается, и минимизирующая функция является собственной функцией краевой задачи

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}^{n,p}(\Lambda)u := (-1)^p D^{2n} u - \Lambda D^{2n-2p} u = 0, \\ &D^j u(\pm 1) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Отметим еще,что (см. [16, Лемма 1]) при $n > 2p$ замена $y = D^n u$ переводит (2) в задачу с интегральными ограничениями

$$(-1)^p D^{2p} y - \Lambda y = \mathcal{P}_{n-2p}, \quad \int\limits_{-1}^{1} y(t)\, t^j\, dt = 0,\ j = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Здесь $\mathcal{P}_{n-2p}$ – полином с неизвестными коэффициентами, степень которого строго меньше $(n-2p)$.

Задача (3) возникает при изучении асимптотики малых уклонений некоторых гауссовских процессов в L_2. Собственные числа и собственные функции в (3) были найдены в [1] при $n = 2$, $p = 1$, в [2] при всех n и $p = 1$, в [16] – при произвольных $n > 2p$.

Очевидно, что разложение $L_2(-1,1) = L_s \oplus L_a$ на подпространства четных и нечетных функций приводит оператор $\mathcal{L}^{n,p}(\Lambda)$. Поэтому все собственные функции задачи (2) можно считать либо четными, либо нечетными. Будем обозначать их $z_s^{(n,p)}$ и $z_a^{(n,p)}$, а соответствующие собственные числа $\Lambda_s^{(n,p)}$ и $\Lambda_a^{(n,p)}$. При необходимости будем нумеровать собственные числа в порядке возрастания. Введем обозначения

$$\mathcal{S}_s^{(n,p)} = \{\Lambda_{s,j}^{(n,p)}\}_{j\in\mathbb{N}}; \qquad \mathcal{S}_a^{(n,p)} = \{\Lambda_{a,j}^{(n,p)}\}_{j\in\mathbb{N}}.$$

Покажем, что

$$\Lambda_{a,j}^{(n,p)} = \Lambda_{s,j}^{(n+1,p)}, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Действительно, для любой собственной функции $z_a^{(n,p)}$ ее первообразная $\int\limits_{-1}^{x} z_a^{(n,p)}(t)\,dt$ есть некоторая $z_s^{(n+1,p)}$ (дополнительное краевое условие при $x = 1$ следует из нечетности $z_a^{(n,p)}$). Обратно, для любой собственной функции $z_s^{(n+1,p)}$ ее производная ввиду нечетности удовлетворяет (2).

Ввиду (4) далее мы будем рассматривать только четные собственные функции.

Заметим, что при $n = p$ задача (2) является осцилляционной (см., напр., [10,12]), и потому все ее собственные числа имеют кратность 1, и j-я собственная функция имеет ровно $j - 1$ нулей на интервале $(-1, 1)$. Таким образом, в этом случае имеем

$$\Lambda_{s,j}^{(n,n)} < \Lambda_{s,j}^{(n+1,n)} = \Lambda_{a,j}^{(n,n)} < \Lambda_{s,j+1}^{(n,n)}, \qquad j \in \mathbb{N}.$$

Это обстоятельство позволяет выдвинуть следующую гипотезу:

Гипотеза. *Множества $\mathcal{S}_s^{(m,p)}$ и $\mathcal{S}_s^{(n,p)}$ при $m \neq n$ не пересекаются.*

В настоящей работе это утверждение доказывается в двух случаях:

- произвольное p, $m = n + 1$ или $m = n + 2$;
- произвольные m и n, $p = 1$.

Замечание 2. При $p = 1$ собственные числа $\Lambda_s^{(n,1)}$ задачи (2) являются квадратами корней функции Бесселя $J_{n-\frac{3}{2}}$, см. [15]. Не исключено, что утверждение о несовпадении корней функций Бесселя различного полуцелого порядка уже встречалось в литературе, и мы будем признательны читателю, который сообщит нам соответствующую ссылку. В общем случае собственные числа являются p-ми степенями корней определителя порядка p, составленного также из функций Бесселя полуцелого порядка, см. [16].

§2. Случаи $m = n + 1$ и $m = n + 2$

Введем следующие обозначения: $\omega = \exp(i\pi/p)$; $\lambda = \Lambda^{\frac{1}{2p}}$. Тогда, очевидно,

$$\mathcal{R}(x) = \sum_{k=0}^{2p-1} a_k \exp(i\lambda\omega^k x)$$

– общее решение уравнения $(-1)^p D^{2p}\mathcal{R} - \Lambda\mathcal{R} = 0$.

Заметим, что любая функция $z_s^{(n+1,p)}$ имеет вид

$$z_s^{(n+1,p)}(x) = \mathcal{R}(x) + \mathcal{P}_{2n-2p+1}(x) \tag{5}$$

(напомним, что $\mathcal{P}_k$ – полином, степень которого строго меньше k).

Поскольку случай $n = p$ уже разобран во Введении, будем считать, что $n > p$. Из (5) следует, что $c_n = \mathcal{L}^{n,p} z_s^{(n+1,p)}$ – константа.

Лемма 2.1. *Если* $c_n = 0$ *или* $\langle \mathbf{1}, z_s^{(n+1,p)} \rangle = 0$, *то* $z_s^{(n+1,p)} \equiv 0$.

Доказательство. Положим $\Lambda = \Lambda_s^{(n+1,p)}$. Из (2) следует

$$\mathcal{L}^{n+1,p} - \lambda^2 \mathcal{L}^{n,p} = (-D^2 - \lambda^2)\mathcal{L}^{n,p} = \overline{A}(iD)A(iD),$$

где

$$A(\sigma) = \sigma^{n-p}\big(\sigma^2 - \lambda^2\big) \cdot \prod_{k=1}^{p-1} \big(\sigma - \lambda\omega^k\big).$$

Поэтому

$$\big\langle \overline{A}(iD)A(iD) z_s^{(n+1,p)}, z_s^{(n+1,p)} \big\rangle = -\lambda^2 \big\langle c_n, z_s^{(n+1,p)} \big\rangle.$$

Заметим, что $A(iD)$ – оператор порядка $n+1$. Интегрируя по частям с учетом граничных условий на $z_s^{(n+1,p)}$, получим

$$\begin{aligned} \big\langle A(iD) z_s^{(n+1,p)}, A(iD) z_s^{(n+1,p)} \big\rangle &= \big\langle \overline{A}(iD) z_s^{(n+1,p)}, \overline{A}(iD) z_s^{(n+1,p)} \big\rangle \\ &= -\lambda^2 \big\langle c_n, z_s^{(n+1,p)} \big\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

При выполнении условия леммы из (6) следует

$$A(iD) z_s^{(n+1,p)} = \overline{A}(iD) z_s^{(n+1,p)} = 0.$$

Ввиду (5) это означает, что

$$(-D^2 - \lambda^2) z_s^{(n+1,p)} = \mathcal{P}_{n-p}.$$

Но $z_s^{(n+1,p)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{n+1}(-1,1)$ влечет

$$\mathcal{P}_{n-p} \in \overset{\circ}{W}{}_2^{n-1}(-1,1) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{P}_{n-p} \equiv 0.$$

Ввиду четности $z_s^{(n+1,p)}$ отсюда следует $z_s^{(n+1,p)} = a\cos\lambda x$. Поскольку $n+1 \geqslant 2$, из граничных условий вытекает $a = 0$. □

Теорема 2.1. $\mathcal{S}_s^{(n,p)} \cap \mathcal{S}_s^{(n+1,p)} = \varnothing$.

Доказательство. Пусть $\Lambda_s^{(n,p)} = \Lambda_s^{(n+1,p)} =: \Lambda$. Тогда для соответствующих собственных функций интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned}\Lambda\big\langle D^{n-p}z_s^{(n+1,p)}, D^{n-p}z_s^{(n,p)}\big\rangle &= (-1)^{n-p}\Lambda\big\langle z_s^{(n+1,p)}, D^{2n-2p}z_s^{(n,p)}\big\rangle \\ &= (-1)^n\big\langle z_s^{(n+1,p)}, D^{2n}z_s^{(n,p)}\big\rangle = (-1)^n\big\langle D^{2n}z_s^{(n+1,p)}, z_s^{(n,p)}\big\rangle \\ &= (-1)^{n-p}\Lambda\big\langle D^{2n-2p}z_s^{(n+1,p)}, z_s^{(n,p)}\big\rangle + (-1)^{n-p}\big\langle \mathcal{L}^{n,p}z_s^{(n+1,p)}, z_s^{(n,p)}\big\rangle \\ &= \Lambda\big\langle D^{n-p}z_s^{(n+1,p)}, D^{n-p}z_s^{(n,p)}\big\rangle + (-1)^{n-p}\big\langle c_n, z_s^{(n,p)}\big\rangle.\end{aligned}$$

Таким образом, либо $c_n = 0$, либо $\big\langle \mathbf{1}, z_s^{(n,p)}\big\rangle = 0$. По лемме 2.1 в первом случае имеем $z_s^{(n+1,p)} \equiv 0$, во втором $z_s^{(n,p)} \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Теорема 2.2. *Спектр задачи* (2) *простой, т.е. каждому собственному числу соответствует одна* (*с точностью до умножения на константу*) *собственная функция.*

Доказательство. Если $\Lambda_{s,j}^{(n,p)} = \Lambda_{s,j+1}^{(n,p)}$, то из собственных функций $z_{s,j}^{(n,p)}$ и $z_{s,j+1}^{(n,p)}$ можно составить нетривиальную линейную комбинацию z, такую, что $\big\langle \mathbf{1}, z\big\rangle = 0$, что противоречит лемме 2.1.

Случай $\Lambda_{a,j}^{(n,p)} = \Lambda_{a,j+1}^{(n,p)}$ сводится к предыдущему ввиду тождества (4).

Наконец, случай $\Lambda_{s,j}^{(n,p)} = \Lambda_{a,k}^{(n,p)}$ невозможен ввиду тождества (4) и теоремы 2.1. □

Теорема 2.3. $\mathcal{S}_s^{(n,p)} \cap \mathcal{S}_s^{(n+2,p)} = \varnothing$.

Доказательство. Собственные числа $\Lambda_s^{(n+2,p)}$ являются критическими уровнями функционала $\Phi_{n+2,p}(u)$ на подпространстве четных функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^{n+2}(-1,1)$ (а соответствующие собственные функции – критическими точками этого функционала). Аналогично Замечанию 1, замена $y = D^2u$ показывает, что $\Lambda_s^{(n+2,p)}$ являются критическими уровнями функционала $\Phi_{n,p}(y)$ на подпространстве четных функций из $\overset{\circ}{W}{}_2^{n}(-1,1)$, удовлетворяющих дополнительным условиям

$$\int_{-1}^{1} y(t)\,dt = 0; \quad \int_{-1}^{1} y(t)\,t\,dt = 0. \tag{7}$$

Поскольку второе условие выполнено автоматически, мы видим, что $\Lambda_s^{(n+2,p)}$ и $\Lambda_s^{(n,p)}$ являются критическими уровнями одного и того же функционала $\Phi_{n,p}$ на пространствах, отличающихся на одномерное подпространство. Ввиду вариационного принципа (см., напр., [3, §10.2, Теорема 5]) имеем

$$\Lambda_{s,j}^{(n,p)} \leqslant \Lambda_{s,j}^{(n+2,p)} \leqslant \Lambda_{s,j+1}^{(n,p)}, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Но по лемме 2.1 собственные функции $z_s^{(n,p)}$ не могут удовлетворять первому условию в (7). Поэтому оба неравенства в (8) строгие, что и доказывает теорему. □

§3. Случай $p = 1$

Как указано в Замечании 2, $\mathcal{S}_s^{(n,1)}$ совпадает с множеством квадратов (ненулевых) корней функции Бесселя $J_{n-\frac{3}{2}}$. Поэтому требуемое утверждение ($\mathcal{S}_s^{(m,1)} \cap \mathcal{S}_s^{(n,1)} = \varnothing$ при $m \neq n$) вытекает из следующей теоремы.

Теорема 3.1. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Если $\lambda > 0$ и $J_{n-\frac{3}{2}}(\lambda) = 0$, то $J_{n+m-\frac{3}{2}}(\lambda) \neq 0$.*

Доказательство. Начнем с хорошо известного рекуррентного соотношения для функций Бесселя (см., напр., [5, 8.471]):

$$J_{n+k+\frac{1}{2}}(\lambda) = \frac{2n+2k-1}{\lambda}\, J_{n+k-\frac{1}{2}}(\lambda) - J_{n+k-\frac{3}{2}}(\lambda), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда немедленно следует, что в условиях теоремы $J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda) \neq 0$ (иначе все функции Бесселя с полуцелыми индексами обращаются в нуль в точке λ, что невозможно). Далее, $J_{n+m-\frac{3}{2}}(\lambda)$ при всех $m > 1$ выражаются через $J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda)$:

$$J_{n+m-\frac{3}{2}}(\lambda) = \frac{\mathbb{P}_{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}(\lambda^2)}{\lambda^{m-1}}\, J_{n-\frac{1}{2}}(\lambda),$$

где $\mathbb{P}_k$ – некоторый полином степени k с целыми коэффициентами, $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа. Отсюда следует, что если $J_{n+m-\frac{3}{2}}(\lambda) = 0$, то λ – алгебраическое число.

Однако из [5, 8.462] видно, что

$$J_{n-\frac{3}{2}}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \Big(\exp(i\lambda)\, \frac{\mathbb{Q}_{n-2}(i\lambda)}{\lambda^{n-2}} + \exp(-i\lambda)\, \frac{\mathbb{Q}_{n-2}(-i\lambda)}{\lambda^{n-2}} \Big),$$

где $\mathbb{Q}_k$ – некоторый полином степени k с рациональными коэффициентами. В условиях теоремы это дает

$$\exp(2i\lambda) = -\frac{\mathbb{Q}_{n-2}(-i\lambda)}{\mathbb{Q}_{n-2}(i\lambda)},$$

что противоречит теореме Линдемана о неалгебраичности экспоненты алгебраического числа [13]. □

Мы признательны Ю. Петровой, А. Соболеву и К. Чепуркину за полезные обсуждения. Первый автор благодарен Сондужской Высшей Школе и, в частности, А. и И. Завьяловым и А. Гущину за вдохновляющие условия для работы.

Литература

1. X. Ai, W. Li, G. Liu, *Karhunen–Loève expansions for the detrended Brownian motion.* — Stat. Probab. Letters **82**, No. 7 (2012), 1235–1241.
2. X. Ai, W. Li, *Karhunen–Loève expansions for the m-th order detrended Brownian motion.* — Science China Math. **57**, No. 10 (2014), 2043–2052.
3. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — изд. 2, Лань (2010).
4. G. Cimmino, *Su una questione di minimo.* — Boll. Un. Mat. Ital. **9** (1930), 1–6.
5. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* изд. 4, Наука, М., 1963.
6. M. Janet, *Sur la méthode de Legendre–Jacobi–Clebsch et quelques-unes de ses applications.* — Bull. Sci. Math. **53** (1929), 144–160.
7. M. Janet, *Sur une suite de fonctions considérée par Hermite et son application à un problème du calcul des variations* C.R.A.S. Paris, **190** (1930), 32.
8. M. Janet, *Les valeurs moyennes des carrés de deux dérivées dTordre consécutifs, et le développement en fraction continue de* $\tan(x)$. — Bull. Sci. Math. **2**, No. 55 (1931), 1–13.
9. M. Janet, *Sur le minimum du rapport de certaines intégrales.* — C.R.A.S. Paris, **193** (1931), 977–979.
10. М. Г. Крейн, *Осцилляционные теоремы для обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка.* — Докл. АН СССР **25**, No. 9 (1939), 717–720.
11. N. G. Kuznetsov, A. I. Nazarov, *Sharp constants in Poincaré, Steklov and related inequalities (a survey)*, Mathematika. **61** (2015), 328–344.
12. А. Ю. Левин, Г. Д. Степанов, *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* — Сиб. матем. журнал, **17**, No. 3 (1976), 606–625.
13. F. Lindemann F., *Über die Zahl* π. — Math. Annalen **20** (1882), 213–225.

14. D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *An integral inequality ascribed to Wirtinger, and its variations and generalizations.* — Publ. fac. d'électrotech. l'Univ. Belgrade, Sér. Math. et Phys., no. 272 (1969), 157–170.
15. А. И. Назаров, А. Н. Петрова, *О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка.* — Вестник Санкт-Петербургского университета, No. 4 (2008), 16–20.
16. Ю. П. Петрова, *Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями.* — Матем. заметки. **102** (2017), No. 3, 405–414.
17. А. С. Сластенин, *Точные константы в некоторых одномерных теоремах вложения.* Дипломная работа, СПбГУ, 2014.
18. В. А. Стеклов, *Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня.* — Сообщ. Харьковского мат. общества, Сер. 2 **5** (1896), 136–181.
19. W. Stekloff, *Problème de refroidissement d'une barre hétérogène.* — Ann. fac. sci. Toulouse, Sér. 2 **3** (1901), 281–313.

Minarsky A. M., Nazarov A. I. On the spectra of boundary value problems generated by some 1D embedding theorems.

We consider the spectra of boundary value problems related to 1D higher order embedding theorems. For some orders, we prove that the eigenvalues corresponding to even eigenfunctions of different problems cannot coincide.

Академический университет РАН,
С.-Петербург.
E-mail: aminarsky@yandex.ru

Поступило 11 сентября 2017 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН;
С.-Петербургский госуниверситет
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com