Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 549, 2017 г.

Г. И. Бижанова

СХОДИМОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ ГЕЛЬДЕРА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

§1. Введение. Постановка задач. Основные результаты.

Рассматривается двухфазная задача (задача A) для параболических уравнений с двумя малыми параметрами $\kappa > 0$, $\varepsilon > 0$ при старших членах в граничном условии.

Эту задачу при $\kappa = 1,\ \varepsilon = 1$ изучали в пространстве Гельдера Б. В. Базалий [1], Е. В. Радкевич [2], Г. И. Бижанова [3], Г. И. Бижанова, В. А. Солонников [4]. В [5,6] была рассмотрена двухфазная задача для уравнений теплопроводности с $\kappa = 1,\ \varepsilon > 0$, получены в классическом и весовом пространствах Гельдера оценки решения с постоянными, не зависящими от ε. В [7] изучена однофазная задача с малым параметром ε при производной по времени в граничном условии. Были установлены в пространстве Гельдера оценки решения возмущенного члена.

Цель настоящей работы – получить из решения задачи A с двумя малыми параметрами $\varepsilon > 0$ и $\kappa > 0$ решения задач B, C, D как пределы решения задачи A при $\kappa \to 0,\ \varepsilon > 0$; $\varepsilon \to 0,\ \kappa > 0$; $\varepsilon = 0,\ \kappa \to 0$ соответственно. При этом мы найдем решения задач B, C, D, не решая их и без потери гладкости заданных функций, т.е. получим их решения максимальной гладкости. Эти результаты показывают, что при стремлении малых параметров к нулю погранслойные функции не возникают, хотя малые параметры содержатся при старших членах в граничном условии.

Задача A лежит в основе решения многомерной двухфазной нелинейной задачи с двумя малыми параметрами на свободной границе для

Ключевые слова: краевые задачи, параболическое уравнение, малые параметры, пространство Гельдера, существование, единственность, оценки решения.

Работа выполнена по гранту 3358/ГФ4 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

параболических уравнений и будет использована при решении этой нелинейной задачи. Такие задачи со свободной границей возникают при изучении процессов с фазовыми переходами (плавление, кристаллизация вещества), в теории фильтрации жидкостей и газов в пористой среде, теории горения и т.д., они имеют практическое применение, т.к. малые параметры – это коэффициенты задачи, характеризующие свойства среды. Возникает вопрос, как поведет себя решение задачи при стремлении малого параметра к нулю, т.е. при изменении характеристики среды.

В работе будут доказаны теоремы 1.1, 1.2, которые позволят обосновать предельный переход в решении задачи А при $\kappa \to 0,\ \varepsilon > 0$; $\varepsilon \to 0,\ \kappa > 0$; $\varepsilon = 0,\ \kappa \to 0$ (теоремы 1.3– 1.5).

Пусть

$$D_1 := \mathbb{R}^n_- = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n < 0\},$$
$$D_2 := \mathbb{R}^n_+ = \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n > 0\},$$
$$n \geqslant 2,$$
$$R := \{x : x' \in \mathbb{R}^{n-1},\ x_n = 0\},\ D_{pT} := D_p \times (0,T),$$
$$p = 1,2,$$
$$R_T := R \times [0,T], \quad x = (x', x_n), \quad x' = (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

$\varepsilon > 0,\ \kappa > 0$ – малые параметры.

Через $C_1, C_2, \dots$, мы будем обозначать положительные постоянные.

Рассмотрим четыре задачи с неизвестными функциями $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$.

Задача А ($\varepsilon > 0,\ \kappa > 0$).

$$\partial_t u_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} u_p = f_p(x,t) \quad \text{в} \quad D_{pT}, \quad p = 1,2, \tag{1.1}$$

$$u_p|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_p, \quad p = 1,2, \tag{1.2}$$

$$\big(u_1 - u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_0(x',t) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}\big(\varepsilon\, \partial_t u_1 + \kappa b \nabla^T u_1 - c \nabla^T u_2\big)|_{x_n=0} \\ = \varphi_1(x',t) + \varepsilon \varphi_2(x',t) + \kappa \varphi_3(x',t) \quad \text{на} \quad R_T.\end{aligned} \tag{1.4}$$

Задача B ($\varepsilon > 0,\ \kappa = 0$).

$$\partial_t u_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} u_p = f_p(x,t) \quad \text{в} \quad D_{pT}, \quad p = 1,2, \tag{1.5}$$

$$u_p|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_p, \quad p = 1,2, \tag{1.6}$$

$$\big(u_1 - u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_0(x',t) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{1.7}$$

$$\big(\varepsilon\, \partial_t u_1 - c\nabla^T u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t) + \varepsilon\varphi_2(x',t) \quad \text{на} \quad R_T. \tag{1.8}$$

Задача C ($\varepsilon = 0,\ \kappa > 0$).

$$\partial_t u_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} u_p = f_p(x,t) \quad \text{в} \quad D_{pT}, \quad p = 1,2, \tag{1.9}$$

$$u_p|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_p, \quad p = 1,2, \tag{1.10}$$

$$\big(u_1 - u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_0(x',t) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{1.11}$$

$$\big(\kappa b\nabla^T u_1 - c\nabla^T u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t) + \kappa\varphi_3(x',t) \quad \text{на} \quad R_T. \tag{1.12}$$

Задача D ($\varepsilon = 0,\ \kappa = 0$).

$$\partial_t u_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} u_p = f_p(x,t) \quad \text{в} \quad D_{pT}, \quad p = 1,2, \tag{1.13}$$

$$u_p|_{t=0} = 0 \text{ в } D_p,\ p = 1,2, \tag{1.14}$$

$$\big(u_1 - u_2\big)|_{x_n=0} = \varphi_0(x',t) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{1.15}$$

$$-c\nabla^T u_2|_{x_n=0} = \varphi_1(x',t) \quad \text{на} \quad R_T. \tag{1.16}$$

Здесь все коэффициенты постоянные, $b = (b', b_n)$, $b' = (b_1, \ldots, b_{n-1})$, $c = (c', c_n)$, $c' = (c_1, \ldots, c_{n-1})$, $\nabla^T = \mathrm{colon}(\partial_{x_1}, \ldots, \partial_{x_n})$ – вектор – столбец, $b\,c^T = b_1c_1 + \ldots + b_nc_n$ – скалярное произведение, $\Delta = \partial^2_{x_1} + \ldots + \partial^2_{x_n}$, $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $b_n > 0$, $c_n > 0$.

Коэффициенты уравнений (1.1), (1.5), (1.9), (1.13) удовлетворяют условию эллиптичности

$$a_{i\,j}^{(p)} = a_{j\,i}^{(p)},\ i,\ j = 1,\dots,n,\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j}^{(p)}\,\xi_i\xi_j \geqslant a_0\xi^2,\ \xi\in\mathbb{R}^n,\ p=1,2. \quad (1.17)$$

$a_0 = \mathrm{const} > 0$.

Мы будем изучать задачи в пространстве Гельдера $C^{2+l,\,1+l/2}_{x\qquad t}(\overline{\Omega}_T)$, l – нецелое положительное число, функций $u(x,t)$ с нормой [8]

$$\begin{aligned} |u|^{(2+l)}_{\Omega_T} = &\sum_{2m_0+|m|=0}^{2+[l]} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u|_{\Omega_T} \\ &+ \sum_{2m_0+|m|=2+[l]} \Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}\Big) \\ &+ \sum_{2m_0+|m|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Omega_T}, \quad \alpha = l-[l]\in(0,1), \end{aligned} \quad (1.18)$$

где Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_T := \Omega\times(0,T)$, $m = (m_1,\dots,m_n)$, m_i, – неотрицательные целые числа, $i = 1,\dots,n$, $|m| = m_1+\ldots+m_n$,

$$\begin{aligned} |v|_{\Omega_T} &= \max_{(x,t)\in\overline{\Omega}_T} |\,v|, \\ [v]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} &= \max_{(x,t),(z,t)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(z,t)\big|}{|x-z|^\alpha}, \\ [v]^{(\alpha)}_{t,\Omega_T} &= \max_{(x,t),(x,t_1)\in\overline{\Omega}_T} \frac{\big|v(x,t)-v(x,t_1)\big|}{|t-t_1|^\alpha}. \end{aligned}$$

Через $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,\,1+l/2}_{x\qquad t}(\overline{\Omega}_T)$ обозначим подмножество функций $u(x,t)\in C^{2+l,\,1+l/2}_{x\qquad t}(\overline{\Omega}_T)$ таких, что $\partial_t^k u\big|_{t=0} = 0$, $k = 0,\dots,1+[l/2]$.

Справедлива лемма [9].

Лемма 1.1. *В пространстве* $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,\,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{\Omega}_T)$, l *– нецелое положительное число, норма* $|u|^{(2+l)}_{\Omega_T}$, *определенная по формуле* (1.18), *эквивалентна норме*

$$
\begin{aligned}
||u||^{(2+l)}_{\Omega_T} = &\sup_{(x,t)\in\Omega_T} t^{-1-l/2}|u(x,t)| \\
&+ \sum_{2m_0+|m|=2+[l]} \Big([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha)}_{x,\Omega_T} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha/2)}_{t,\Omega_T}\Big) \\
&+ \sum_{2m_0+|m|=1+[l]} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\Omega_T},
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

$\alpha = l - [l] \in (0,1)$.

Приведем основные результаты работы.

Теорема 1.1. *Пусть* $b_n > 0$, $c_n > 0$, $\kappa \in (0,\kappa_0]$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, l*–нецелое положительное число.*

При любых функциях

$$f_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{l,\,l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1,2;$$

$$\varphi_0(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x'\quad t}(R_T);$$

$$\varphi_1(x',t), \varepsilon\varphi_2(x',t), \quad \kappa\varphi_3(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\quad t}(R_T)$$

задача (1.1) – (1.4) *имеет единственное решение*

$$u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1,2,$$

$$\varepsilon\,\partial_t u_1|_{x_n=0} \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x'\quad t}(R_T),$$

и оно подчиняется оценке

$$\sum_{p=1}^{2} |u_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon\partial_t u_1|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_1 M_l, \tag{1.20}$$

$$M_l := \sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(l)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T} + \varepsilon|\varphi_1|^{(1+l)}_{R_T} + \kappa|\varphi_2|^{(1+l)}_{R_T} + |\varphi_3|^{(1+l)}_{R_T},$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* ε.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1.1, $l = k + \alpha$, $k = 0, 1, \ldots,\ \ \alpha \in (0, 1)$.

Тогда производная по времени $\varepsilon\partial_t u(x,t)|_{x_n=0}$ *в граничном условии* (1.4) *задачи* (1.1)–(1.4) *удовлетворяет оценке*

$$|\varepsilon\partial_t u|_{C^{1+k+\beta,\,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x'\quad t}(R_T)} \leqslant C_2\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} M_{k+\alpha}, \quad \beta \in (0, \alpha/2) \tag{1.21}$$

где постоянная C_2 *не зависит от* κ *и* ε.

Теорема 1.3. *Пусть* $c_n > 0,\ \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],\ \ l$ *– нецелое положительное число.*

При любых функциях $f_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,l,\,l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{pT})$, $p = 1, 2$;

$$\varphi_0(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,1+l/2}_{x'\quad\ t}(R_T); \quad \varphi_1(x',t), \varepsilon\varphi_2(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\,\frac{1+l}{2}}_{x'\quad\ t}(R_T)$$

задача (1.5) – (1.8) *имеет единственное решение*

$$u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,1+l/2}_{x\quad\ t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1, 2, \varepsilon\partial_t u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\,\frac{1+l}{2}}_{x\quad\ t}(R_T),$$

и оно подчиняется оценке

$$\sum_{p=1}^{2} |u_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon\partial_t u_1|^{(1+l)}_{R_T}$$
$$\leqslant C_3\Big(\sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(l)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{R_T} + \varepsilon|\varphi_2|^{(1+l)}_{R_T}\Big), \tag{1.22}$$

где постоянная C_3 *не зависит от* ε.

Теорема 1.4. *Пусть* $b_n > 0$, $c_n > 0$, $\kappa \in (0, \kappa_0]$, l *– нецелое положительное число.*

При любых функциях $f_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,l,\,l/2}_{x\quad t}(\overline{D}_{pT})$, $p = 1, 2$;

$$\varphi_0(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,\,1+l/2}_{x'\quad\ t}(R_T); \quad \varphi_1(x',t), \kappa\varphi_3(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\,\frac{1+l}{2}}_{x'\quad\ t}(R_T)$$

задача (1.9) – (1.12) *имеет единственное решение*

$$u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,\,1+l/2}_{x\quad\ t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1, 2,$$

и оно удовлетворяет оценке

$$\sum_{p=1}^{2} |u_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} \leqslant C_4\Big(\sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(l)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{R_T} + \kappa|\varphi_3|^{(1+l)}_{R_T}\Big), \tag{1.23}$$

где постоянная C_4 не зависит от к.

Теорема 1.5. *Пусть $c_n > 0$, l – нецелое положительное число.*

При любых функциях $f_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,l,\,l/2}_{\;x\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $p = 1,2$;

$$\varphi_0(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,\,1+l/2}_{\;x'\;\;\;t}(R_T), \quad \varphi_1(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\,\frac{1+l}{2}}_{\;x'\;\;\;t}(R_T),$$

задача (1.13) – (1.16) *имеет единственное решение*

$$u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,\,1+l/2}_{\;x\;\;\;t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1,2,$$

и для него справедлива оценка

$$\sum_{p=1}^{2} |u_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} \leqslant C_5\Big(\sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(l)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{R_T}\Big). \tag{1.24}$$

Доказательство сходимости решения возмущенной задачи при стремлении одного из малых параметров к нулю – теорем 1.3–1.5 основано на теоремах 1.1, 1.2.

§2. Доказательство теорем 1.1 и 1.2.

Рассмотрим задачу (1.1)–(1.4).

Для сведения ее к более удобной форме построим вспомогательные функции $U_1(x,t)$ и $U_2(x,t)$ как решения следующих задач:

$$\begin{gathered} \partial_t U_1 - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(1)}_{ij}\partial^2_{x_i x_j} U_1 = f_1(x,t) \quad \text{в} \quad D_{1T}, \\ U_1|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_1, U_1|_{x_n=0} = 0 \quad \text{на} \quad R_T, \end{gathered} \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \partial_t U_2 - \sum_{i,j=1}^{n} a^{(2)}_{ij}\partial^2_{x_i x_j} U_2 = f_2(x,t) \quad \text{в} \quad D_{2T}, \\ U_2|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_2, U_2|_{x_n=0} = -\varphi_0(x',t) \quad \text{на} \quad R_T. \end{gathered} \tag{2.2}$$

При выполнении условий теоремы 1.1 каждая из задач (2.1) и (2.2) имеет единственное решение [8]

$$U_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,1+l/2}_{\;x\;\;\;t}(\overline{D}_{pT}), \quad p = 1,2,$$

и для решений справедливы оценки

$$|U_1|^{(2+l)}_{D_{1T}} \leqslant C_1|f_1|^{(l)}_{D_{1T}}, \quad |U_2|^{(2+l)}_{D_{2T}} \leqslant C_2\big(|f_2|^{(l)}_{D_{1T}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T}\big). \tag{2.3}$$

После замены

$$u_p(x,t) = U_p(x,t) + \widehat{u}_p(x,t), \quad p = 1,2, \tag{2.4}$$

в задаче (1.1)–(1.4) мы получим задачу для новых неизвестных функций $\widehat{u}_1(x,t)$ и $\widehat{u}_2(x,t)$

$$\partial_t \widehat{u}_p - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(p)}\, \partial^2_{x_i x_j} \widehat{u}_p = 0 \quad \text{в} \quad D_{pT}, \quad p = 1,2, \tag{2.5}$$

$$\widehat{u}_p|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_p, \quad p = 1,2, \tag{2.6}$$

$$\big(\widehat{u}_1 - \widehat{u}_2\big)|_{x_n=0} = 0 \quad \text{на} \quad R_T, \tag{2.7}$$

$$\big(\varepsilon\, \partial_t \widehat{u}_1 + \kappa b \nabla^T \widehat{u}_1 - c \nabla^T \widehat{u}_2\big)|_{x_n=0} = \Phi(x',t) \text{ на } R_T, \tag{2.8}$$

где

$$\Phi(x',t) = \varphi_1(x',t) + \varepsilon\varphi_2(x',t) + \kappa(\varphi_3(x',t) - b_n \partial_{x_n} U_1|_{x_n=0}) + c\nabla^T U_2|_{x_n=0},$$

при выполнении условий теоремы 1.1 $\Phi(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{x' \quad t}(R_T)$ и

$$|\Phi|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_3\Big(\sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(l)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+l)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+l)}_{R_T} + \varepsilon|\varphi_2|^{(1+l)}_{R_T} + \kappa|\varphi_3|^{(1+l)}_{R_T}\Big). \tag{2.9}$$

Сведем первое уравнение (2.5) ($p = 1$) к уравнению Лапласа при помощи ортогонального преобразования координат, сжатия и снова ортогонального преобразования, которое повернет плоскость R, разделяющую области D_1 и D_2 так, что она будет задана уравнением $y_n = 0$ и $D_1 = \mathbb{R}^n_-$ и $D_2 = \mathbb{R}^n_+$ в новых координатах $\{y\}$. Обозначим это преобразование в виде

$$x = \mathcal{A}y,$$

где $\mathcal{A}$ – невырожденная матрица, второе уравнение в (2.5) ($p = 2$) останется параболическим после этого преобразования. После преобразования координат $\{x\}$ к координатам $\{y\}$ задача (2.5)–(2.8) сведется к задаче с неизвестными функциями

$$v_p(y,t) = \widehat{u}_p(x,t)|_{x=\mathcal{A}y}, \quad p = 1,2. \tag{2.10}$$

Замечание 2.1. Для удобства мы будем обозначать новые координаты через $\{x\}$ вместо $\{y\}$ и запишем задачу для функций $v_p(x,t)$, $p = 1,2$ (вместо $v_p(y,t)$). При возвращении к задаче А мы будем рассматривать функцию v_p как $v_p(y,t)$, $p = 1,2$.

Итак, мы получили задачу

$$\partial_t v_1 - a\,\Delta v_1 = 0 \quad \text{в} \quad D_{1T}, \tag{2.11}$$

$$\partial_t v_2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{i\,j}\,\partial^2_{x_i x_j} v_2 = 0 \quad \text{в} \quad D_{2T}, \tag{2.12}$$

$$v_p|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad D_p, \quad p = 1, 2, \tag{2.13}$$

$$\big(v_1 - v_2\big)|_{x_n=0} = 0 \quad \text{на} \quad R_T, \tag{2.14}$$

$$\big(\varepsilon\,\partial_t v_1 + \kappa d \nabla^T v_1 - h \nabla^T v_2\big)|_{x_n=0} = \varphi(x', t) \quad \text{на} \quad R_T, \tag{2.15}$$

где все коэффициенты постоянные,

$$a > 0,\ d = (d', d_n),\ d' = (d_1, \ldots, d_{n-1}),\ h = (h', h_n),\ h' = (h_1, \ldots, h_{n-1}),$$

кроме того коэффициенты a_{ij} в уравнении (2.12) удовлетворяют условиям (1.17), $\varphi(y', t) = \Phi(x', t)|_{x=\mathcal{A}y,\, y_n=0}$.

Пусть ν_0 – единичная нормаль к плоскости $R : x_n = 0$ в задаче (1.1)–(1.4), направленная в D_2 (т.е. по направлению координатной оси x_n). Известно, что скалярные произведения $b\,\nu_0^T = b_n > 0$, $c\,\nu_0^T = c_n > 0$ не изменяются после ортогональных преобразований координат. Преобразование сжатия задается диагональной матрицей с положительными компонентами, и оно сохраняет знаки скалярных произведений $b\,\nu_0^T$, $c\,\nu_0^T$ и переводит диагональную матрицу к единичной, умноженной на $a > 0$, в результате мы получаем оператор $a\Delta$ в уравнении (2.11) и в условии (2.15) –

$$d_n > 0,\ h_n > 0.$$

Доказательство теоремы 1.1. Для задачи (2.11)–(2.15) была установлена теорема [10]

Теорема 2.1. *Пусть* $d_n > 0,\ h_n > 0,\ \kappa \in (0, \kappa_0],\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Для любой функции $\varphi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\frac{1+l}{2}}_{\;x'\quad t}(R_T)$, l *– нецелое положительное число, задача* (2.11)–(2.15) *имеет единственное решение*

$$v_p(x, t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+l,1+l/2}_{\;x\quad t}(\overline{D}_{pT}),\ p = 1, 2,\ \varepsilon\,\partial_t v_1(x, t)|_{x_n=0} \in \overset{\circ}{C}{}^{\,1+l,\frac{1+l}{2}}_{\;x'\quad t}(R_T),$$

и оно подчиняется оценке

$$\sum_{p=1}^{2} |v_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon \partial_t v_1|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_4 |\varphi|^{(1+l)}_{R_T}, \tag{2.16}$$

где постоянная C_1 *не зависит от* κ *и* ε.

В работе [11] были построены функции $v_p(x,t)$, $p=1,2$, в явном виде при помощи преобразований Лапласа и Фурье

$$v_p(x,t)=\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\varphi(y',\tau)G_p(x'-y',x_n,t-\tau)\,dy', \tag{2.17}$$

где

$$G_p(x,t)=\int\limits_0^t K_p(x,\sigma,t-\sigma)d\sigma,$$

$$K_1(x,\sigma,t)=\partial_{x_n}g_1(x,\sigma,t),\quad K_2(x,\sigma,t)=\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{x_k}g_2(x,\sigma,t) \tag{2.18}$$

$$g_1(x,\sigma,t)=-4a\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\Gamma_1(x-\eta-\frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma,t-\tau_1)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta',$$

$$K_1(x,\sigma,t)=-4a\int\limits_0^t d\tau_1\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\partial_{x_n}\Gamma_1(x-\eta-\frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma,t-\tau_1)$$
$$\times\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{\eta_k}\Gamma_2(\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'$$

$$\begin{aligned}&\equiv\int\limits_0^t d\,\tau_1\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{-x_n+\eta_n+\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi(t-\tau_1)})^n(t-\tau_1)}e^{-\frac{(x-\eta-\kappa d\,\sigma/\varepsilon)^2}{4a(t-\tau_1)}}\\&\times\frac{h_n\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi\tau_1})^n\tau_1}\\&\times\frac{1}{\sqrt{|A_n|}}e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(\eta_i+h_i\sigma/\varepsilon)(\eta_j+h_j\sigma/\varepsilon)}{4\tau_1}}\big|_{\eta_n=0}\,d\,\eta',x_n<0,\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$g_2(x,\sigma,t) = -4a\int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\eta_n}\Gamma_1(\eta - \frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma,\tau_1)$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\Gamma_2(x-\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},t-\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta',$$

$$K_2(x,\sigma,t) = -4a\int\limits_0^t d\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \partial_{\eta_n}\Gamma_1(\eta - \frac{\kappa}{\varepsilon}d\sigma,\tau_1)$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}}\sum_{k=1}^n a_{kn}\partial_{x_k}\Gamma_2(x-\eta+\frac{h\sigma}{\varepsilon},t-\tau_1)\big|_{\eta_n=0}\,d\eta'$$
$$\equiv \int\limits_0^t d\,\tau_1 \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\kappa d_n\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{a\pi\tau_1})^n\tau_1}e^{-\frac{(\eta-\kappa d\sigma/\varepsilon)^2}{4a\tau_1}}\frac{x_n-\eta_n+h_n\sigma/\varepsilon}{(2\sqrt{\pi(t-\tau_1)})^n(t-\tau_1)} \tag{2.20}$$
$$\times \frac{1}{\sqrt{|A_n|}}e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}(x_i-\eta_i+h_i\sigma/\varepsilon)(x_j-\eta_j+h_j\sigma/\varepsilon)}{4(t-\tau_1)}}\big|_{\eta_n=0}\,d\,\eta',\ x_n>0,$$

$$\Gamma_1(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{a\pi t})^n}e^{-\frac{x^2}{4at}},\quad \Gamma_2(x,t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n a^{ij}x_ix_j}{4t}}, \tag{2.21}$$

$|A_n| > 0$ – определитель матрицы $A_n = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, a^{ij} – элементы обратной матрицы A_n^{-1}, $i,j=1,\dots,n$.

Кроме того, в [11] были установлены оценки ядер (2.18)–(2.20) $K_p(x,\sigma,t)$, $p=1,2$,

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,K_p(x,\sigma,t)| \leqslant C_5\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|+1}{2}}}\,e^{-\frac{q_1^2x^2}{t}-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2 t}}, \tag{2.22}$$

где

$$q_1^2 = \frac{c_0^2h_n^2}{2(h^2+\kappa_0^2d^2+2\kappa_0|d'h'|)},\quad q_2^2 = \frac{c_0^2h_n^2}{2}.$$

постоянная C_5 не зависит от ε и κ, постоянная c_0^2 находится из оценки фундаментальных решений (2.21) уравнений (2.11), (2.12)

$$|\partial_t^k\partial_x^m\,\Gamma_p(x,t)| \leqslant C_6\frac{1}{t^{\frac{n+2k+|m|}{2}}}\,e^{-c_0^2\frac{x^2}{t}},\ p=1,2,\ c_0=\mathrm{const}>0. \tag{2.23}$$

Теорема 2.1 доказывается непосредственными оценками функций $v_p(x,t)$, $p=1,2$, определенных по формулам (2.17) [10].

Вернемся к первоначальной задаче (1.1)–(1.4) с неизвестными функциями $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, которые определяются по формуле (2.4):

$$u_p(x,t) = U_p(x,t) + \widehat{u}_p(x,t),\ p = 1,2,$$

функции $U_p(x,t)$ принадлежат пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{\ x\quad t}(D_{pT})$, $p = 1,2$, и подчиняются оценке (2.3).

Вспоминая обозначение (2.10):

$$v_p(y,t) = \widehat{u}_p(x,t)|_{x=\mathcal{A}y},\ \widehat{u}_p(x,t) = v_p(\mathcal{A}^{-1}x,t),\ p = 1,2,$$

и оценку (2.16) функций v_1, v_2 на основании теоремы 2.1 мы получим, что

$$\widehat{u}_p(x,t) = v_p(\mathcal{A}^{-1}x,t)\ \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{\ x\quad t}(\overline{D}_{pT}),$$

$p = 1,2$, $\varepsilon\partial_t\widehat{u}_1(x,t)|_{x_n=0} = \varepsilon\partial_t v_1(\mathcal{A}^{-1}x,t)|_{x_n=0} \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{\ x'\quad t}(R_T)$, и справедлива оценка

$$\sum_{p=1}^{2}|\widehat{u}_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon\partial_t\widehat{u}_1|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_7\sum_{p=1}^{2}|v_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon\partial_t v_1|^{(1+l)}_{R_T}$$
$$\leqslant C_8|\varphi(\mathcal{A}^{-1}x,t)|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_9|\Phi|^{(1+l)}_{R_T},$$

где $\Phi(x',t)$ подчиняется оценке (2.9).

Отсюда, из подстановки (2.4) и условия $U_1(x,t)|_{x_n=0} = 0$ будет следовать, что $u_p(x,t)\ \in \overset{\circ}{C}{}^{2+l,1+l/2}_{\ x\quad t}(\overline{D}_{pT})$, $p = 1,2$,

$$\begin{aligned}\varepsilon\partial_t u_1(x,t)\big|_{x_n=0} &= \varepsilon\big(\partial_t U_1(x,t) + \partial_t v_1(\mathcal{A}^{-1}x,t)\big)\big|_{x_n=0}\\ &= \varepsilon\partial_t v_1(\mathcal{A}^{-1}x,t)\big|_{x_n=0},\end{aligned} \tag{2.24}$$

$\varepsilon\partial_t u_1(x,t)|_{x_n=0} \in \overset{\circ}{C}{}^{1+l,\frac{1+l}{2}}_{\ x'\quad t}(R_T)$ и

$$\sum_{p=1}^{2}|u_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\varepsilon\partial_t u_1|^{(1+l)}_{R_T} \leqslant C_{10}\Big(\sum_{p=1}^{2}|U_p|^{(2+l)}_{D_{pT}} + |\Phi|^{(1+l)}_{R_T}\Big),$$

где постоянная C_{10} не зависит от ε и κ.

Применяя оценки (2.3) для U_1, U_2 и (2.9) для Φ, мы будем иметь оценку (1.20) и теорему 1.1. □

Для доказательства теоремы 1.2 рассмотрим задачу (2.11)–(2.15), к которой мы свели задачу (1.1)–(1.4). Докажем для нее теорему.

Теорема 2.2. *Пусть* $d_n > 0$, $h_n > 0$, $\kappa \in (0, \kappa_0]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $l = k+\alpha$, $k = 0, 1, \ldots,$ $\alpha \in (0, 1)$.

Для любой функции $\varphi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+k+\alpha, \frac{1+k+\alpha}{2}}_{x' \quad t}(R_T)$ *производная по времени* $\varepsilon \partial_t v_1(x, t)|_{x_n=0}$ *в условии* (2.15) *задачи* (2.11)–(2.15) *удовлетворяет оценке*

$$|\varepsilon \partial_t v_1|_{C^{1+k+\beta, \frac{1+k+\beta}{2}}_{x' \quad t}(R_T)} \leqslant C_{11} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} |\varphi|_{C^{1+k+\alpha, \frac{1+k+\alpha}{2}}_{x' \quad t}(R_T)}, \qquad \beta \in (0, \alpha/2), \tag{2.25}$$

где постоянная C_{11} *не зависит* κ *от* ε.

Доказательство теоремы 2.2. В работе [10] была получена формула

$$\varepsilon \partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \partial_t v_1(x, t)|_{x_n=0} = -W_1^{(s)}(x', t) + W_2^{(s)}(x', t) - W_3^{(s)}(x', t), \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned} W_1^{(s)}(x', t) = \frac{\kappa}{\varepsilon} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau \big(\Phi_s(y', \tau - \sigma) - \Phi_s(y', \tau)\big) \\ \times d \nabla_x^T K_1(x - y', \sigma, t - \tau)\, d\sigma\big|_{x_n=0}, \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} W_2^{(s)}(x', t) = \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_0^\tau \big(\Phi_s(y', \tau - \sigma) - \Phi_s(y', \tau)\big) \\ \times h \nabla_x^T K_2(x - y', \sigma, t - \tau)\, d\sigma\big|_{x_n=0}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned} W_3^{(s)}(x', t) &= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_s(y', \tau) K_1(x - y', \tau, t - \tau)\, dy'\big|_{x_n=0} \\ &\equiv \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_s(y', t - \tau) K_1(x - y', t - \tau, \tau)\, dy'\big|_{x_n=0}, \end{aligned} \tag{2.29}$$

$\Phi_s(x', t) = \partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \varphi(x', t)$, $2m_0 + |m'| = s$, $s = 0, 1, 2, \ldots, k, 1 + k$, $k = 0, 1, \ldots,$ $m' = (m_1, \ldots, m_{n-1})$.

Заметим, что $\Phi_0(x', t) \equiv \varphi(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+k+\alpha, \frac{1+k+\alpha}{2}}_{x' \quad t}(R_T)$, $\Phi_{1+k}(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha, \alpha/2}_{x' \ t}(R_T)$, $\Phi_k(x', t) \in \overset{\circ}{C}{}^{1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2}}_{x' \quad t}(R_T)$.

Согласно лемме 1.1 и формуле (1.19) нам нужно оценить норму

$$
\begin{aligned}
&||\varepsilon\partial_t v_1||_{C^{1+k+\beta,\,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x'\quad t}(R_T)} := \sup_{(x',t)\in R_T} t^{-(1+k+\beta)/2}|\varepsilon\partial_t v_1| \\
&\quad + \sum_{2m_0+|m'|=1+k} \left([\varepsilon\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\partial_t v_1]^{(\beta)}_{x',R_T} + [\varepsilon\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\partial_t v_1]^{(\beta/2)}_{t,R_T}\right) \\
&\quad + \sum_{2m_0+|m'|=k} [\varepsilon\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\partial_t v_1]^{(\frac{1+\beta}{2})}_{t,R_T},
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

В дальнейшем нам потребуются оценки функций $\varphi(x',t)$ и $\Phi_{1+k}(x',t)$, $\Phi_k(x',t)$

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(y',\tau-\sigma)-\varphi(y',\tau)| \leqslant M_0\,\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}},\ k=0, \\
&|\varphi(y',\tau-\sigma)-\varphi(y',\tau)| \leqslant M_k\,\sigma\tau^{\frac{k-1+\alpha}{2}},\ k=1,2,\dots, \\
&|\varphi(y',\tau)| \leqslant M_k\tau^{\frac{1+k+\alpha}{2}}, M_k = \left[\partial_t^{[\frac{1+k}{2}]}\varphi\right]^{(\frac{1+k+\alpha}{2}-[\frac{1+k}{2}])}_{t,R_T}, k=0,1,\dots;
\end{aligned}
\tag{2.31}
$$

$$
|\Phi_{k+j}(y',\tau)| \leqslant N_{k+j}\,\tau^{\frac{1+\alpha-j}{2}}, \tag{2.32}
$$

$$
|\Phi_{k+j}(y',\tau-\sigma)-\Phi_{k+j}(y',\tau)| \leqslant N_{k+j}\,\sigma^{\frac{1+\alpha-j}{2}}, \tag{2.33}
$$

$$
N_{k+j} = \left[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\varphi\right]^{(\frac{1+\alpha-j}{2})}_{t,R_T}, \quad 2m_0+|m'|=k+j, \quad j=0,1.
$$

Мы оценим функции $W_1^{(s)}(x',t)$ и $W_3^{(s)}(x',t)$, определенные по формулам (2.27), (2.29), функция $W_2^{(s)}(x',t)$, определяемая по формуле (2.28), удовлетворяют той же оценке, что и функция $W_1^{(s)}(x',t)$.

Сначала оценим модуль производной $\partial_t v_1(x,t)|_{x_n=0}$, т.е. $|W_1^{(0)}|$ и $|W_3^{(0)}|$ с плотностью $\Phi_0(x',t)=\varphi(x',t)$.

Пусть $k=0$. Рассмотрим потенциал $W_1^{(0)}(x',t)$. Применяя оценку (2.22) ядра K_1, (2.31) плотности φ, неравенства $\sigma^{\frac{1+\alpha}{2}} \leqslant \sigma^{\frac{1+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}} \leqslant \tau^{\frac{1+\beta}{2}}\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}$ и

$$
\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}} \leqslant C_{\frac{\alpha-\beta}{2}}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{4}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{2\varepsilon^2(t-\tau)}}, \tag{2.34}
$$

где последнее неравенство вытекают из оценки

$$
|\xi|^\gamma e^{-\xi^2} \leqslant C_\gamma e^{-\xi^2/2},\ \gamma \geqslant 0, \tag{2.35}
$$

и, проинтегрировав по y' и σ, мы получим при $k=0$

$$
\begin{aligned}
|W_1^{(0)}(x',t)| &\leqslant C_{12} M_0 \frac{\kappa}{\varepsilon} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^\tau \frac{\sigma^{\frac{1+\beta}{2}} \sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\sigma \\
&\leqslant C_{13} M_0 \frac{\kappa_0}{\varepsilon} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{1+\beta}{2}}}{(t-\tau)^{3/2-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\, d\tau \int\limits_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{2\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\sigma \\
&\leqslant C_{14} M_0 \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{t^{\frac{1+\beta}{2}}}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\, d\tau \\
&= C_{15}\, M_0\, \kappa_0\, \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta}{2}}\, t^{\frac{\alpha-\beta}{4}},
\end{aligned}
$$

$$
|W_1^{(0)}(x',t)| \leqslant C_{15}\, M_0 \kappa_0\, \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+\beta}{2}}\, T^{\frac{\alpha-\beta}{4}},\ \beta \in (0,\alpha),\ k=0. \tag{2.36}
$$

Пусть $k=1,2,\ldots$. Применяя оценки (2.22) ядра K_1 и (2.31) плотности φ, неравенства $\sigma^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}} \leqslant \tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}} \leqslant t^{1-\frac{\alpha-\beta}{2}} \leqslant$ и (2.34) и проинтегрировав по y', мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
|W_1^{(0)}(x't)| &\leqslant C_{16} M_k \frac{\kappa_0}{\varepsilon} \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{k-1+\alpha}{2}}}{(t-\tau)^{3/2}}\, d\tau \int\limits_0^\tau \sigma\, e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\sigma \\
&\leqslant C_{17} M_k \frac{\kappa_0}{\varepsilon} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{k-1+\alpha}{2}+1-\frac{\alpha-\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{3/2-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\, d\tau \int\limits_0^\tau e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\sigma \\
&\leqslant C_{18} M_k \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{k+1+\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\, d\tau \\
&= C_{19} M_k \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} T^{\frac{\alpha-\beta}{4}}
\end{aligned}
$$

$$
|W_1^{(0)}(x',t)^{(0)}| \leqslant C_{20}\, M_k\, \kappa_0\, \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+k+\beta}{2}},\ \beta \in (0,\alpha),\ k=1,2,\ldots. \tag{2.37}
$$

Функция $W_2^{(0)}$ удовлетворяет той же самой оценке, что и $W_1^{(0)}$, но без множителя κ_0.

Рассмотрим потенциал $W_3^{(0)}(x',t)$, определяемый по формуле (2.29). Воспользуемся оценками (2.22) для K_1, (2.31) для φ и проинтегрируем

по y', тогда

$$|W_3^{(0)}(x',t)| \leqslant C_{21} M_k \int\limits_0^t \frac{\tau^{\frac{1+k+\beta}{2}}\, \tau^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{t-\tau} e^{-\frac{q_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\tau.$$

Далее, применим неравенство (2.35) и проинтегрируем по τ

$$\begin{aligned} |W_3^{(0)}| &\leqslant C_{22} M_k \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, t^{\frac{1+k+\beta}{2}} \int\limits_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\, d\tau \\ &\leqslant C_{23} M_k \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} t^{\frac{1+k+\beta}{2}} T^{\frac{\alpha-\beta}{4}},\ \beta \in (0,\alpha). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Собирая оценки (2.36) – (2.38), мы будем иметь

$$|\varepsilon \partial_t v_1| \leqslant C_{24}\, t^{\frac{1+k+\beta}{2}} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} (1+\kappa_0)\, [\varphi]_{t,R_T}^{(\frac{1+k+\alpha}{2})},\ \beta \in (0,\alpha). \tag{2.39}$$

Теперь оценим константы Гельдера по t согласно формуле (2.30). Сформируем разности потенциалов, положив, для определенности, $t_1 < t$,

$$\triangle_{p,j} := W_p^{(k+j)}(x',t) - W_p^{(k+j)}(x',t_1),\ p=1,3,\ j=0,1,$$

с плотностями $\Phi_{k+j}(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{j+\alpha,\frac{j+\alpha}{2}}_{x'\ \ t}(R_T)$, $j=0,1$.

Представив функцию $W_1^{(k+j)}$ в виде

$$\begin{aligned} W_1^{(k+j)}(x',t) = \frac{\kappa}{\varepsilon} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_0^{t-\tau} \big(\Phi_{k+j}(y',t-\tau-\sigma) - \Phi_{k+j}(y',t-\tau)\big) \\ \times d\nabla_x^T K_1(x-y',\sigma,\tau)\, d\sigma\big|_{x_n=0}, \end{aligned}$$

мы можем записать $\triangle_{1,j}$ и $\triangle_{2,j}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}\triangle_{1,j} = \frac{\kappa}{\varepsilon}\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_{0}^{t-\tau} \big(\Phi_{k+j}(y', t-\tau-\sigma) - \Phi_{k+j}(y', t-\tau)\big) \\ \times d\nabla_x^T K_1(x-y', \sigma, \tau)\, d\sigma\big|_{x_n=0} \\ +\frac{\kappa}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_{t_1-\tau}^{t-\tau} \big(\Phi_{k+j}(y', t-\tau-\sigma) - \Phi_{k+j}(y', t-\tau)\big) \\ \times d\nabla_x^T K_1(\cdot)\, d\sigma\big|_{x_n=0} \\ +\frac{\kappa}{\varepsilon}\int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dy' \int\limits_{0}^{t_1-\tau} \tilde{\triangle}_{1,j}(y', t, t_1, \tau, \sigma) d\nabla_x^T K_1(\cdot)\, d\sigma\big|_{x_n=0},\end{aligned} \tag{2.40}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{\triangle}_{1,j} = \Phi_{k+j}(y', t-\tau-\sigma) - \Phi_{k+j}(y', t-\tau) \\ - \Phi_{k+j}(y', t_1-\tau-\sigma) + \Phi_{k+j}(y', t_1-\tau),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle_{2,j} &= W_3^{(k+j)}(x', t) - W_3^{(k+j)}(x', t_1) \\ &= \int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{k+j}(y', t-\tau) K_1(x-y', t-\tau, \tau)|_{x_n=0} dy' \\ &+ \int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \widetilde{\triangle}_{2,j}(y', t, t_1, \tau) K_1(x-y', t-\tau, \tau)|_{x_n=0} dy' \\ &+ \int\limits_{t_1}^{t} d\tau_1 \int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Phi_{k+j}(y', t_1-\tau) \partial_{\tau_1} K_1(x-y', \tau_1-\tau, \tau)|_{x_n=0} dy',\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\widetilde{\triangle}_{2,j} = \Phi_{k+j}(y', t-\tau) - \Phi_{k+j}(y', t_1-\tau).$$

Оценим $|\widetilde{\triangle}_{1,j}| = |\widetilde{\triangle}_{1,j}|^{\theta}|\widetilde{\triangle}_{1,j}|^{1-\theta}$. Положим $\theta = \frac{1+\beta-j}{1+\alpha-j}$, $\beta \in (0,\alpha)$, $j = 0,1$, и применив неравенство (2.33) для Φ_{k+j}, мы найдем

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\triangle}_{1,j}| &= |\big(\Phi_{k+j}(y',t-\tau-\sigma) - \Phi_{k+j}(y',t_1-\tau-\sigma)\big) \\
&\quad + \big(\Phi_{k+j}(y',t_1-\tau) - \Phi_{k+j}(y',t-\tau)\big)|^{\theta} \\
&\quad \times |\Phi_{k+j}(y',t-\tau-\sigma) \\
&\quad - \Phi_{k+j}(y',t-\tau)\big) + \big(\Phi_{k+j}(y',t_1-\tau) \\
&\quad - \Phi_{k+j}(y',t_1-\tau-\sigma)\big)|^{1-\theta} \\
&\leqslant C_{25}\big(N_{k+j}(t-t_1)^{\frac{1+\alpha-j}{2}}\big)^{\theta}\big(N_{k+j}\sigma^{\frac{1+\alpha-j}{2}}\big)^{1-\theta} \\
&= C_{26}N_{k+j}(t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}}\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}},\ t_1 < t,\ \sigma \geqslant 0,\ \beta \in (0,\alpha).
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

Рассмотрим разность (2.40). Применив оценку (2.22) для ядра K_1, (2.33) для плотности $\Phi_j(x',t)$ и (2.42) и проинтегрировав по y', мы будем иметь

$$
\begin{aligned}
|\triangle_{1,j}| \leqslant C_{27}N_{k+j}\frac{\kappa}{\varepsilon}\Big(&\int\limits_{t_1}^{t} d\tau \int\limits_{0}^{t-\tau} \frac{\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\sigma^{\frac{1+\beta-j}{2}}}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}}\,d\sigma \\
&+ \int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{t_1-\tau}^{t-\tau} \frac{\sigma^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}\,\sigma^{\frac{1+\beta-j}{2}}2}{\tau^{3/2}\,\sigma} e^{-\frac{\gamma_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}}\,d\sigma \\
&+ (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \int\limits_{0}^{t_1} d\tau \int\limits_{0}^{t_1-\tau} \frac{\sigma^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau^{3/2}} e^{-\frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2\tau}}\,d\sigma\Big),\ \beta \in (0,\,\alpha).
\end{aligned}
$$

Теперь мы используем неравенство $\sigma^{\frac{1+\beta-j}{2}} \leqslant (t-\tau)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \leqslant (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}}$ в первом интеграле и (2.34) – во всех остальных и проинтегрируем по σ, тогда

$$
\begin{aligned}
|\triangle_{1,j}| \leqslant C_{28}\,N_{k+j}\,\kappa_0\,\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\Big((t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} &\int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \\
&+ \int\limits_{0}^{t_1} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \int\limits_{t_1-\tau}^{t-\tau} \frac{d\sigma}{\sigma^{1-\frac{1+\beta-j}{2}}} + (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}}\Big).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует

$$|\triangle_{1,j}| = |W_1^{(k+j)}(x',t) - W_1^{(k+j)}(x',t_1)| \leqslant C_{29}\, N_{k+j}\, \kappa_0\, \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, T^{\frac{\alpha-\beta}{4}} (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}}$$

и

$$\big[W_1^{(k+j)}\big]^{(\frac{1+\beta-j}{2})}_{t,R_T} \equiv \max_{(x,t),(x,t_1)\in R_T} \big(|\triangle_{1,j}||t-t_1|^{-\frac{1+\beta-j}{2}}\big) \leqslant C_{30}\, \kappa_0\, \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \big[\partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \varphi\big]^{(\frac{1+\alpha-j}{2})}_{t,R_T}, \qquad (2.43)$$

где $2m_0 + |m'| = k+j,\ \beta \in (0,\alpha), j = 0,1$.

Функция $W_2^{(0)}(x',t)$ удовлетворяет той же самой оценке, что и $W_1^{(0)}(x',t)$, но без множителя κ_0.

Рассмотрим разность $\triangle_{2,j}$, определенную по формуле (2.41), где $\widetilde{\triangle}_{2,j} = \Phi_{k+j}(y',t-\tau) - \Phi_{k+j}(y',t_1-\tau)$. На основании неравенств (2.33) и (2.32) для функций $\Phi_{k+j}(x',t)$ разность $\widetilde{\triangle}_{2,j}$ подчиняется оценке

$$\begin{aligned} |\widetilde{\triangle}_{2,j}| &\equiv |\widetilde{\triangle}_{2,j}|^{\theta} |\widetilde{\triangle}_{2,j}|^{1-\theta} \\ &\leqslant |\widetilde{\triangle}_{2,j}|^{\theta} |\Phi_{k+j}(y',t-\tau) + \Phi_{k+j}(y',t_1-\tau)|^{1-\theta} \\ &\leqslant C_{31} N_{k+j}\, (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}}\, (t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}, \end{aligned} \qquad (2.44)$$

$\theta = \frac{j+\beta-j}{1+\alpha-j}$, $t_1 < t,\ \beta \in (0,\,\alpha), j = 0,1$.

Теперь, как и раньше, применим оценки (2.33) для Φ_{k+j}, (2.22) для ядра K_1, (2.44) и проинтегрируем по y'

$$\begin{aligned} |\triangle_{2,j}| \leqslant C_{32} N_{k+j} \Big(&\int_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{\frac{1+\alpha-j}{2}}}{\tau} e^{-\frac{q_2^2 (t-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}}\, d\tau \\ &+ (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \int_0^{t_1} \frac{(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau}\, e^{-\frac{q_2^2 (t-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}}\, d\tau \\ &+ \int_{t_1}^{t} d\tau_1 \int_0^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-j}{2}}}{\tau^{3/2}}\, e^{-\frac{q_2^2 (\tau_1-\tau)^2}{\varepsilon^2 \tau}} d\tau \Big). \end{aligned}$$

В первом и последнем интегралах воспользуемся оценками соответственно

$$(t-\tau)^{\frac{1+\alpha-j}{2}} \leqslant (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} (t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}},$$

$$(t_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-j}{2}} \leqslant (\tau_1-\tau)^{\frac{1+\alpha-j}{2}} \leqslant \frac{(\tau_1-\tau)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(\tau_1-\tau)^{1-\frac{1+\beta-j}{2}}} \leqslant \frac{(\tau_1-\tau)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{(\tau_1-t_1)^{1-\frac{1+\beta-j}{2}}},$$

$\tau_1 \in (t_1,t)$, $\tau \in (0,t_1)$, и во всех интегралах применим неравенство (2.34), тогда мы получим

$$\begin{aligned}
|\triangle_{2,j}| &\leqslant C_{33}\, N_{k+j}\Big(2(t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \int\limits_{t_1}^{t} \frac{(t-\tau)^{\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau} e^{-\frac{q_2^2(t-\tau)^2}{\varepsilon^2\tau}}\, d\tau \\
&+ \int\limits_{t_1}^{t} \frac{d\tau_1}{(\tau_1-t_1)^{1-\frac{1+\beta-j}{2}}} \int\limits_{0}^{t_1} \frac{(\tau_1-\tau)^{1+\frac{\alpha-\beta}{2}}}{\tau^{3/2}}\, e^{-\frac{q_2^2(\tau_1-\tau)^2}{\varepsilon^2\tau}}\, d\tau\Big) \\
&\leqslant C_{34} N_{k+j} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} \Big(\int\limits_{0}^{t} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} + \varepsilon \int\limits_{0}^{t_1} \frac{d\tau}{\tau^{1-\frac{\alpha-\beta}{4}}} \Big) \\
&\leqslant C_{35} N_{k+j} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} (t-t_1)^{\frac{1+\beta-j}{2}} T^{\frac{\alpha-\beta}{4}} (1+\varepsilon_0),
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\big[W_3^{(k+j)}\big]_{t,R_T}^{(\frac{1+\beta-j}{2})} &= \max_{(x',t),(x',t_1)\in R_T} \big(|\triangle_{2,j}||t-t_1|^{-\frac{1+\beta-j}{2}}\big) \\
&\leqslant C_{36}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \big[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\varphi\big]_{t,R_T}^{(\frac{1+\alpha-j}{2})}, \qquad (2.45)
\end{aligned}$$

где $\beta \in (0,\alpha)$, $2m_0+|m'| = k+j$, $j=0,1$,

$$\triangle_{2,j} := W_3^{(k+j)}(x',t) - W_3^{(k+j)}(x',t_1).$$

Таким образом, мы установили оценки констант Гельдера по t в двух последних суммах в формуле (2.30), определяющей норму, при $\beta \in (0,\alpha)$.

Теперь мы оценим константы Гельдера по пространственным переменным x' потенциалов $W_p^{(1+k)}(x',t)$, $p=1,3$, с плотностями $\Phi_{1+k}(x',t) \in \overset{\circ}{C}{}^{\alpha,\alpha/2}_{x'\ t}(R_T)$ согласно формуле (2.30). Для этого составим разности с $r=|x'-z'|$

$$
\begin{aligned}
&\triangle_3 := W_1^{(1+k)}(x',t) - W_1^{(1+k)}(z',t)\\
&= -\frac{\kappa}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'|\leqslant 2r} dy' \int\limits_0^\tau \big(\Phi_{1+k}(y',\tau-\sigma) - \Phi_{1+k}(y',\tau)\big)\big(d'\nabla_{y'}'^T - d_n\partial_{y_n}\big)\\
&\times \Big(K_1(x'-y',y_n,\sigma,t-\tau) - K_1(z'-y',y_n,\sigma,t-\tau)\Big)\Big|_{y_n=0} d\sigma\\
&+ \frac{\kappa}{\varepsilon}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'|>2r} dy' \int\limits_0^\tau \big(\Phi_{1+k}(y',\tau-\sigma) - \Phi_{1+k}(y',\tau)\big) \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu - z_\nu)\\
&\times \partial_{y_\nu}\big(d'\nabla_{y'}'^T - d_n\partial_{y_n}\big)K_1(z'-y'+\lambda(x'-z'),y_n,\sigma,t-\tau)\Big|_{y_n=0} d\lambda\, d\sigma,
\end{aligned}
\tag{2.46}
$$

$$
\begin{aligned}
&\triangle_4 := W_3^{(1+k)}(x',t) - W_3^{(1+k)}(z',t)\\
&= \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'|\leqslant 2r} \Phi_{1+k}(y',\tau)\Big(K_1(x'-y',y_n,\sigma,t-\tau)\\
&- K_1(z'-y',y_n,\sigma,t-\tau)\Big)\Big|_{y_n=0} dy'\\
&- \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{|y'-z'|>2r} \Phi_{1+k}(y',\tau) \int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu - z_\nu)\\
&\times \partial_{y_\nu} K_1(z'-y'+\lambda(x'-z'),y_n,\sigma,t-\tau)\Big|_{y_n=0} d\lambda dy'.
\end{aligned}
\tag{2.47}
$$

В (2.46) мы использовали для удобства записи равенство, заменив $x_n = 0$ на $y_n = 0$,

$$
\begin{aligned}
&d\nabla_x^T K_1(x'-y',x_n,\sigma,t-\tau)|_{x_n=0}\\
&\qquad = -(d'\nabla_{y'}'^T - d_n\partial_{y_n})K_1(x'-y',y_n,\sigma,t-\tau)|_{y_n=0},
\end{aligned}
$$

кроме того, в обеих разностях мы применили формулу

$$
\begin{aligned}
&K_1(x'-y',x_n,\cdot)\big|_{x_n=0} - K_1(z'-y',z_n,\cdot)\big|_{z_n=0}\\
&\qquad = -\int\limits_0^1 \sum_{\nu=1}^{n-1}(x_\nu - z_\nu)\partial_{y_\nu} K_1(z'-y'+\lambda(x'-z'),y_n,\cdot)\big|_{y_n=0} d\lambda
\end{aligned}
$$

и также переобозначили $x_n = 0$ на $y_n = 0$.

Рассмотрим разность $\triangle_3$, определяемую по формуле (2.46). Применим неравенства (2.22) для K_1, (2.33) для Φ_{1+k}, перейдем к сферическим координатам, положив $\rho = |x' - y'|$, $\rho = |z' - y'|$ и $\rho = |z' - y' + \lambda(x' - z')|$ в первом, втором и третьем интегралах соответственно, тогда мы будем иметь

$$|\triangle_3| \leqslant C_{37} N_{1+k} \frac{\kappa}{\varepsilon} \Bigg(\int\limits_0^t d\tau \Big(\int\limits_0^{3r} + \int\limits_0^{2r} \Big) \rho^{n-2} d\rho \times \int\limits_0^\tau \frac{\sigma^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} e^{-\frac{q_1^2\rho^2}{t-\tau} - \frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}} d\sigma + r \int\limits_0^t d\tau \int\limits_r^\infty \rho^{n-2}\, d\rho \int\limits_0^\tau \frac{\sigma^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+3}{2}}} e^{-\frac{q_1^2\rho^2}{t-\tau} - \frac{q_2^2\sigma^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}} d\sigma \Bigg).$$

Воспользовавшись оценками

$$\frac{\rho^{n-\mu-\beta}}{(t-\tau)^{\frac{n-\mu-\beta}{2}}} e^{-\frac{q_1^2\rho^2}{t-\tau}} \leqslant C_{38}, \quad \beta \in (0, \alpha/2), \quad \mu = 1, 0, \tag{2.48}$$

в двух первых интегралах с $\mu = 1$ и в последнем интеграле с $\mu = 0$, а также (2.34) и проинтегрировав по σ, мы получим

$$\begin{gathered} |\triangle_3| \leqslant C_{39} N_{1+k} \kappa_0 \varepsilon^{\alpha/2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-2\beta}{4}}} \Bigg(\Big(\int\limits_0^{3r} + \int\limits_0^{2r} \Big) \rho^{-1+\beta}\, d\rho \\ + r \int\limits_r^\infty \rho^{-2+\beta}\, d\rho \Bigg) \leqslant C_{40} N_{1+k} \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \varepsilon_0^{\beta/2} t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}} r^\beta, \\ r = |x' - z'|, \ \beta \in (0, \alpha/2), \end{gathered} \tag{2.49}$$

и

$$\begin{aligned} \big[W_1^{(1+k)}\big]^{(\beta)}_{x', R_T} &\equiv \max_{(x',t),(z',t) \in R_T} \frac{|\triangle_3|}{|x' - z'|^\beta} \\ &\leqslant C_{41} \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \big[\partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \varphi\big]^{(\alpha/2)}_{t, R_T}, \end{aligned} \tag{2.50}$$

где $\quad 2m_0 + |m'| = 1 + k, \quad \triangle_3 := W_1^{(1+k)}(x', t) - W_1^{(1+k)}(z', t).$

Разность $W_2^{(1+k)}(x',t) - W_2^{(1+k)}(z',t)$ оценивается, как и разность $\triangle_3$, и подчиняется неравенству (2.50), только без множителя κ_0.

Оценим разность $\triangle_4$, определенную формулой (2.47), при помощи неравенств (2.22), (2.33), (2.35), (2.48)

$$
\begin{aligned}
|\triangle_4| &\leqslant C_{42} N_{1+k} \Big(\int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+1}{2}}} d\tau \Big(\int\limits_0^{3r} + \int\limits_0^{2r} \Big) \rho^{n-2} e^{-\frac{q_1^2\rho^2}{t-\tau} - \frac{q_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\rho \\
&\quad + r \int\limits_0^t \frac{\tau^{\alpha/2}}{(t-\tau)^{\frac{n+2}{2}}} d\tau \int\limits_r^\infty \rho^{n-2} e^{-\frac{q_1^2\rho^2}{t-\tau} - \frac{q_2^2\tau^2}{\varepsilon^2(t-\tau)}}\, d\rho \Big) \\
&\leqslant C_{43}\, N_{1+k} \varepsilon^{\alpha/2} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\frac{\alpha-2\beta}{4}}} \Big(\Big(\int\limits_0^{3r} + \int\limits_0^{2r} \Big) \rho^{-1+\beta}\, d\rho \\
&\quad + r \int\limits_r^\infty \rho^{-2+\beta}\, d\rho \Big) \\
&\leqslant C_{44} N_{1+k} \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\, \varepsilon_0^{\beta/2} t^{\frac{\alpha-2\beta}{2}} r^\beta, \ \beta \in (0, \alpha/2), \ r = |x'-z'|,
\end{aligned}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\big[W_3^{(1+k)}\big]_{x',R_T}^{(\beta)} &\equiv \max_{(x',t),(z',t)\in R_T} \frac{|\triangle_4|}{|x'-z'|^\beta} \\
&\leqslant C_{45} \kappa_0 \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \big[\partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \varphi\big]_{t,R_T}^{(\alpha/2)}, \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

где $2m_0 + |m'| = 1 + k$, $\beta \in (0, \alpha/2)$,

$$\triangle_4 := W_3^{(1+k)}(x',t) - W_3^{(1+k)}(z',t).$$

Итак, мы установили оценки констант Гельдера по x при $\beta \in (0, \alpha/2)$.

Вспоминая, что

$$\varepsilon \partial_t^{m_0} \partial_{x'}^{m'} \partial_t v_1|_{x_n=0} = -W_1^{(s)}(x',t) + W_2^{(s)}(x',t) - W_3^{(s)}(x',t),$$

$s = 2m_0 + |m'|$, в формуле нормы (2.30) производной $\varepsilon \partial_t v_1|_{x_n=0}$ мы применим установленные оценки (2.39), (2.43), (2.45), (2.50), (2.51) модуля $|\varepsilon \partial_t v_1|_{x_n=0}|$ и констант Гельдера

$$\big[W_1^{(k+j)}\big]_{t,R_T}^{(\frac{1+\beta-j}{2})}, \big[W_3^{(k+j)}\big]_{t,R_T}^{(\frac{1+\beta-j}{2})}, \ j = 0, 1,$$

$$\big[W_1^{(1+k)}\big]_{x',R_T}^{(\beta)}, \ \big[W_3^{(1+k)}\big]_{x',R_T}^{(\beta)},$$

тогда будем иметь

$$|\varepsilon\partial_t v_1|_{C^{1+k+\beta,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x',t}(R_T)} \leqslant C_{46}||\varepsilon\partial_t v_1||_{C^{1+k+\beta,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x',t}(R_T)}$$
$$\leqslant C_{47}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}(1+\kappa_0)$$
$$\times\Big(\sum_{2m_0+|m'|=1+k}\big[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\varphi\big]^{(\alpha/2)}_{t,R_T}+\sum_{2m_0+|m'|=k}\big[\partial_t^{m_0}\partial_{x'}^{m'}\varphi\big]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,R_T}\Big),$$

и

$$|\varepsilon\partial_t v_1|_{C^{1+k+\beta,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x',t}(R_T)} \leqslant C_{48}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\varphi|^{(1+k+\alpha)}_{R_T},$$
$$\beta\in(0,\alpha/2), \quad (2.52)$$

где постоянная C_{48} не зависит от ε и κ. А это есть оценка (2.25).

Теорема 2.2 доказана полностью. □

Доказательство теоремы 1.2. Из формулы (2.24):

$$\varepsilon\partial_t u_1(x,t)|_{x_n=0}=\partial_t v_1(\mathcal{A}^{-1}x,t)|_{x_n=0}$$

и (2.52) будет следовать

$$|\varepsilon\partial_t u_1|_{C^{1+k+\beta,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x',t}(R_T)} \equiv |\partial_t v_1(\mathcal{A}^{-1}x,t)|_{C^{1+k+\beta,\frac{1+k+\beta}{2}}_{x',t}(R_T)}$$
$$\leqslant C_{48}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}\,|\varphi(\mathcal{A}^{-1}x,t)|_{x_n=0}|_{C^{1+k+\alpha,\frac{1+k+\alpha}{2}}_{x',t}(R_T)}$$
$$\leqslant C_{49}\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}}|\Phi|_{C^{1+k+\alpha,\frac{1+k+\alpha}{2}}_{x',t}(R_T)}.$$

Применяя оценку (2.9) для $\Phi(x't)$, мы получим оценку (1.21) и теорему 1.2. □

§3. Доказательство теорем 1.3 – 1.5.

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $l = k+\alpha$, $k = 0,1,...$, $\alpha\in(0,1)$.

Для доказательства разрешимости задачи (1.5)–(1.8) – задачи B, рассмотрим задачу (1.1)–(1.4) – задачу A, для которой была доказана теорема 1.1. Обозначим решение задачи A через $u_{1\kappa}(x,t)$ и $u_{2\kappa}(x,t)$.

Согласно теореме 1.1 и оценке (1.20) семейства функции $\{u_{p\kappa}(x,t)\}$ ограничены в $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $p=1,2$, и компактны в

$$\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT}),\ p=1,2,\ \beta\in(0,\alpha/2).$$

Пусть $\{u_{p\kappa_n}(x,t)\}$, $p=1,2$, – сходящиеся подпоследовательности в $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$ при $n\to\infty$ $(\kappa_n\to 0)$.

Обозначим

$$\lim_{n\to\infty} u_{p\kappa_n}(x,t)\} =: u_p(x,t)\in \overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT}),\ p=1,2. \tag{3.1}$$

Из оценки (1.20) следует

$$|u_{p\kappa_n}|_{\overset{\circ}{C}{}^{2+k,\,1+k/2}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})} \leqslant C_1\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T}$$
$$+|\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \varepsilon|\varphi_2|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \kappa_n|\varphi_3|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\Big),\ p=1,2. \tag{3.2}$$

Учитывая сходимость при $n\to\infty$ подпоследовательностей $\{u_{p\kappa_n}(x,t)\}$ в $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$ к $u_p(x,t)$, $p=1,2$, мы перейдем к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве (3.2), тогда получим

$$|u_p|_{\overset{\circ}{C}{}^{2+k,\,1+k/2}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})} \leqslant C_1\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T}$$
$$+|\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \varepsilon|\varphi_2|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\Big),\ p=1,2. \tag{3.3}$$

Принимая во внимание, что производные $\partial_{x_i}u_{1\kappa_n}(x,t)$ и $\partial_{x_i}u_1(x,t)$ ограничены в $\overline{D}_{1T}$, мы будем иметь

$$\lim_{n\to\infty}\kappa_n\partial_{x_i}u_{1\kappa_n}(x,t)=0,\ i=1,\dots,n. \tag{3.4}$$

Запишем задачу А для функций $u_{p\kappa_n}(x,t)$, $p=1,2$, и также $\kappa=\kappa_n$ в ней, перейдем к пределу при $n\to\infty$ и, учитывая обозначение (3.1) и равенство (3.4), мы получим, что предельные функции (3.1) – $u_p(x,t)$, $p=1,2$, удовлетворяют всем условиям задачи (1.5)–(1.8), т.е. являются ее решением.

Докажем, что функции $u_p(x,t)$ принадлежат пространству

$$\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT}),\ p=1,2.$$

Для этого достаточно оценить константы Гельдера старших производных решения, входящие в норму (1.18),

$$\begin{aligned}\sum_{2m_0+|m|=2+k} &\left([\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p]^{(\alpha)}_{x,D_{pT}} + [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p]^{(\alpha/2)}_{t,D_{pT}}\right)\\ &+ \sum_{2m_0+|m|=1+k} [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p]^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,D_{pT}},\ p=1,2,\end{aligned} \tag{3.5}$$

т.к. сумма $\sum\limits_{2m_0+|m|=0}^{2+k} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p|_{D_{pT}}$ ограничена согласно неравенству (3.3).

Оценим, например, константу Гельдера $[\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p]^{(\alpha)}_{x,D_{pT}}$, $2m_0+|m| = 2+k$, $p=1,2$, привлекая оценку (1.20) решения $u_{p\kappa_n}(x,t)$ задачи (1.1)–(1.4). Для этого рассмотрим отношение

$$\begin{aligned}&\frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p(x,t) - \partial_t^{m_0}\partial_z^m u_p(z,t)|}{|x-z|^\alpha}\\ &\quad\leqslant \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p(x,t) - \partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}(x,t)|}{|x-z|^\alpha}\\ &\quad+ \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_z^m u_p(z,t) - \partial_t^{m_0}\partial_z^m u_{p\kappa_n}(z,t)|}{|x-z|^\alpha}\\ &\quad+ \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}(x,t) - \partial_t^{m_0}\partial_z^m u_{p\kappa_n}(z,t)|}{|x-z|^\alpha},\ (x,t),\ (z,t)\in \overline{D}_{pT}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

В силу оценки (1.20) последнее слагаемое в (3.6) подчиняется неравенству

$$\begin{aligned}\frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}(x,t) - \partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}(z,t)|}{|x-z|^\alpha} &\leqslant [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}]^{(\alpha)}_{x,D_{pT}}\\ &\leqslant C_1\Big(\sum_{p=1}^{2} |f_p|^{(k+\alpha)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\\ &\qquad + \varepsilon|\varphi_2|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \kappa_n|\varphi_3|^{(1+l)}_{R_T}\Big).\end{aligned}$$

Применим полученную оценку в (3.6), устремим n к ∞ и, учитывая сходимость последовательности $\{\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_{p\kappa_n}(x,t)\}$, $2m_0+|m| = 2+k$,

в $C^{\,2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$ к $\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p$, получим

$$\sup_{(x,t),(z,t)\in D_{pT}} \frac{|\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p(x,t)-\partial_t^{m_0}\partial_z^m u_p(z,t)|}{|x-z|^\alpha} \equiv [\partial_t^{m_0}\partial_x^m u]^{(\alpha)}_{x,D_{pT}}$$
$$\leqslant C_1\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{R_T}+|\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T}+|\varphi_1|^{(1+k+l)}_{R_T}+\varepsilon|\varphi_2|^{(1+k+l)}_{R_T}\Big).$$

Аналогично оцениваются остальные константы Гельдера функции $u_p(x,t)$ в (3.5). Их оценки вместе с неравенством (3.3) приводят к оценке (1.22) решения $u_1(x,t), u_2(x,t)$ задачи B и доказывают, что $u_p(x,t)\in \overset{\circ}{C}{}^{\,2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $p=1,2$. Из граничного условия (1.8) задачи B имеем

$$\varepsilon\partial_t u_1(x,t)\big|_{x_n=0}=c\nabla^T u_2(x,t)\big|_{x_n=0}+\varphi_1(x',t)+\varepsilon\varphi_2(x',t).$$

Отсюда в силу доказанного и условий теоремы 1.3 следует, что производная по времени $\varepsilon\partial_t u_1(x,t)\big|_{x_n=0}$ принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}{}^{\,1+k+\alpha,\,\frac{1+k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(R_T)$ и подчиняется оценке (1.22).

Из оценки (1.22) следует единственность решения задачи B. □

Доказательство теоремы 1.4. Пусть $l=k+\alpha$, $k=0,1,...$, $\alpha\in(0,1)$.

Обозначим решение задачи A через $u_{1\varepsilon}(x,t)$ и $u_{2\varepsilon}(x,t)$. Семейства функций $\{u_{p\varepsilon}(x,t)\}$ ограничены в $\overset{\circ}{C}{}^{\,2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $p=1,2$, компактны в пространстве $\overset{\circ}{C}{}^{\,2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $\beta\in(0,\alpha/2)$. Пусть $\{u_{p\varepsilon_n}(x,t)\}$, $p=1,2$, – сходящиеся подпоследовательности в этом пространстве при $n\to\infty(\varepsilon_n\to 0)$, обозначим

$$\lim_{n\to\infty} u_{p\varepsilon_n}(x,t)=:u_p(x,t), \tag{3.7}$$

очевидно, $u_p(x,t) \in \overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT}),\ p=1,2$. Из оценки (1.20) для функций $u_{p\varepsilon_n}(x,t)$, переходя к пределу при $n\to\infty$, будем иметь

$$\sum_{2m_0+|m|=0}^{2+k} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p|^{(2+k)}_{D_{pT}} \leqslant C_1\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{R_T} + |\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T} + |\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \kappa|\varphi_3|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\Big). \quad (3.8)$$

Оценим константы Гельдера (3.5) функций $u_p(x,t)$ точно так же, как при доказательстве теоремы 1.3 для задачи B. Их оценки вместе с (3.8) приведут к оценке (1.23) функций $u_p(x,t),\ p=1,2$, и докажут их принадлежность пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT}),\ p=1,2$.

Покажем, что найденные функции $u_p(x,t),\ p=1,2$, являются решением задачи C. Теорема 1.1 гарантирует только ограниченность последовательности $\{\varepsilon_n\partial_t u_{1\varepsilon_n}(x,t)\big|_{x_n=0}\}$. Однако эта последовательность стремится к нулю при $n\to\infty$. Действительно, на основании оценки (1.21) теоремы 1.2

$$|\varepsilon_n\partial_t u_{1\varepsilon_n}|_{C^{1+k+\beta,\,\frac{1+k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(R_T)} \leqslant C_2\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} \times\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{D_{pT}} + |\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T} + \varepsilon_n|\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + \kappa|\varphi_2|^{(1+k+\alpha)}_{R_T} + |\varphi_3|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\Big), \quad \beta\in(0,\alpha/2),$$

получим

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n\partial_t u_{1\varepsilon_n}(x,t)=0. \quad (3.9)$$

Далее, записав задачу A для функций $u_{1\varepsilon_n}(x,t)$ и $u_{2\varepsilon_n}(x,t)$, а также ε_n вместо ε в ней и приняв во внимание (3.7) и (3.9), устремим ε_n к нулю ($n\to\infty$), в результате получим, что предельные функции $u_p(x,t), p=1,2$, являются решением задачи (1.9)–(1.12).

Единственность решения сразу получаем из оценки (1.23). □

Доказательство теоремы 1.5. Пусть $l=k+\alpha, k=0,1,...,\alpha\in$ (0,1).

Рассмотрим задачу (1.9)–(1.12), для которой мы установили теорему 1.4. Обозначим ее решение через $u_{p\kappa}(x,t)$, $p=1,2$. Согласно оценке (1.23) последовательности $\{u_{p\kappa}\}$, $p=1,2$, компактны в $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $\beta\in(0,\alpha)$. Пусть $\{u_{p\kappa_n}\}$ – сходящиеся подпоследовательности в этом пространстве, обозначим

$$\lim_{n\to\infty} u_{p\kappa_n}(x,t) =: u_p(x,t),\ p=1,2, \tag{3.10}$$

где $u_p(x,t)\in\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\beta,\,1+\frac{k+\beta}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$. Из оценки (1.23) решения задачи C с $\kappa=\kappa_n$, устремив κ_n к нулю, мы получим

$$\sum_{2m_0+|m|=0}^{2+k} |\partial_t^{m_0}\partial_x^m u_p|^{(2+k)}_{D_{pT}}$$
$$\leqslant C_4\Big(\sum_{p=1}^{2}|f_p|^{(k+\alpha)}_{R_T}+|\varphi_0|^{(2+k+\alpha)}_{R_T}+|\varphi_1|^{(1+k+\alpha)}_{R_T}\Big).$$

Затем оценим константы Гельдера (3.5) функций $u_p(x,t)$ точно так же, как при доказательстве теоремы 1.3 для задачи B, и получим, что функции $u_p(x,t)$ подчиняются оценке (1.24) и принадлежат пространству $\overset{\circ}{C}{}^{2+k+\alpha,\,1+\frac{k+\alpha}{2}}_{\;\;x\qquad\;\;t}(\overline{D}_{pT})$, $p=1,2$.

И наконец, записав задачу C для функций $u_{1\kappa_n}(x,t)$ и $u_{2\kappa_n}(x,t)$ и κ_n вместо κ в этой задаче и учитывая ограниченность производных $\partial_{x_i}u_{1\kappa_n}(x,t)$ и их пределов $\partial_{x_i}u_1(x,t)$, $i=1,\dots,n$, при $\kappa_n\to 0$, мы устремим κ_n к нулю и получим, что предельные функции $u_p(x,t)$, $p=1,2$, действительно, являются решением задачи (1.13)–(1.16).

В силу оценки (1.24) решение задачи D будет единственным. □

Литература

1. Б. В. Базалий, *Задача Стефана.* — Доклады АН СССР. Сер.А, No. 11 (1986), 3–7.
2. Е. В. Радкевич, *О разрешимости общих нестационарных задач со свободной границей.* – Некоторые применения функционального анализа к задачам математической физики, Новосибирск (1986), 85–111.
3. Г. И. Бижанова, *Решение начально - краевой задачи с производной по времени в условии сопряжения для параболического уравнения второго порядка в весовом пространстве Гельдера.* — Алгебра и анализ, **6**, No. 1 (1994), 62–92.
4. Г. И. Бижанова, В. А. Солонников, *О задачах со свободной границей для параболических уравнений.* – Алгебра и анализ, **12**, No. 1 (2001), 3–45.

5. Г. И. Бижанова, *Uniform estimates of the solution to the linear two – phase Stefan problem with a small parameter* — Математический журнал, Алматы, No. 1 (2005), 19–28.
6. Г. И. Бижанова, *Solution of a model problem related to singularly perturbed, free boundary, Stefan type problems.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **362** (2008), 64–91.
7. Г. И. Бижанова, *On the solutions of the linear free boundary problems of Stefan type with a small parameter. II.* — Математический журнал, Алматы, No. 2 (2012), 70–86.
8. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* Москва, Наука, 1967.
9. В. А. Солонников, *Об оценке максимумов модулей производных решения однородной параболической начально – краевой задачи.* – Препринт ЛОМИ, No. P-2-77 (1977), 20 с.
10. Г. И. Бижанова, *Estimates of the solution of the two–phase singularly perturbed problem for the parabolic equations. II.* — Математический журнал, Алматы, No. 3 (2014), 14–34.
11. Г. И. Бижанова, *Estimates of the solution of the two–phase singularly perturbed problem for the parabolic equations. I.* — Математический журнал, Алматы, No. 2 (2013), 31–49.

Bizhanova G. I. Convergence in the Hölder space of the solutions of the problems for the parabolic equations with two small parameters in a boundary condition.

Multidimensional two-phase problem for the parabolic equations with two small parameters $\varepsilon > 0$ and $\kappa > 0$ at the principal terms in the conjugation condition is studied in the Hölder space. An estimate of the perturbed term – time derivative is derived. Its proved that the solution of the problem converges as $\varepsilon > 0$ the solution of the problem as $\kappa \to 0$, $\varepsilon > 0$; $\varepsilon \to 0$, $\kappa > 0$; $\varepsilon = 0$, $\kappa \to 0$ without loss of the smoothness of the given functions.

Институт математики и математического моделирования МОН РК,
ул.Пушкина 125, г. Алматы
E-mail: galina_math@mail.ru
E-mail: bizhanova@math.kz

Поступило 23 октября 2017 г.