Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

О. М. Фоменко

ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ В ЧЕТЫРЕХМЕРНОМ ШАРЕ

§1. Введение, результаты

Пусть $r_4(n)$ – число представлений целого $n \geqslant 0$ суммой четырех квадратов целых чисел;

$$A_4(x) := \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} r_4(n)$$

означает число целых точек (a_1, a_2, a_3, a_4) в четырехмерном шаре

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 \leqslant x;$$

$$V_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2$$

– объем этого шара.

Известно, что

$$A_4(x) = V_4(x) + P_4(x),$$

где $P_4(x)$ – остаточный член проблемы.

Оценка

$$P_4(x) = O(x^{3/2})$$

является тривиальной. Из общих теорем Ландау [1] и [2, с. 54] о числе целых точек в эллипсоидах следует, что

$$P_4(x) = O(x^{6/5}).$$

Однако уже в [1] Ландау находит простой метод, основанный на формулах Якоби для $r_4(n)$, позволивший ему получить

$$P_4(x) = O(x^{1+\epsilon}).$$

Позднее тем же методом Ландау [2, с. 149] улучшил эту оценку:

$$P_4(x) = O(x \log x).$$

Впоследствии Вальфиш [3], сочетая метод Ландау с оценками тригонометрических сумм, довел результат до

$$P_4(x) = O(x \log^{2/3} x).$$

Ключевые слова: четырехмерный шар, средние Рисса, омега-результаты.

эти оценки уже близки к неулучшаемым, поскольку известен $\Omega_{\pm}$-результат [4]

$$P_4(x) = \Omega_{\pm}(x \log\log x).$$

Недавно автор настоящей работы сравнительно легко доказал [5], что

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant x} P_4(n) = \frac{\pi^2}{4}x^2 + \Psi_4(x),$$

где

$$\Psi_4(x) = O(x^{3/2+\epsilon}).$$

Из теоремы 1 настоящей работы, доказанной ниже, следует, что

$$\Psi_4(x) = O(x^{11/8}).$$

Из результатов Чандрасекхарана и Нарасимхана [6] можно вывести $\Omega_{\pm}$-результат:

$$\lim_{x\to\infty} \begin{matrix}\sup\\ \inf\end{matrix} \quad x^{-5/4}\Psi_4(x) = \begin{matrix}+\infty\\ -\infty\end{matrix}.$$

Этот вывод опирается на изучение средних Рисса коэффициентов дзета-функции Эпштейна

$$\zeta_4(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_4(n)n^{-s} (\mathrm{Re}\ s > 2) :$$

$$D_\rho(x;\zeta_4) := \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n\leqslant x} (x-n)^\rho r_4(n) \quad (\rho > 0).$$

Свойства дзета-функции Эпштейна $\zeta_k(s)$, $k \geqslant 2$, хорошо известны:

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n)n^{-s} (\sigma > \frac{k}{2})$$

допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = k/2$ с вычетом $\pi^{k/2}\Gamma(k/2)$; имеет место функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_k(s) = \pi^{-(\frac{k}{2}-s)}\Gamma(\frac{k}{2}-s)\zeta_k(\frac{k}{2}-s).$$

Из общих результатов Ландау [2] и Чандрасекхарана и Нарасимхана [7] следует, что

$$D_\rho(x;\zeta_4) = \frac{\pi^2 x^{2+\rho}}{\Gamma(\rho+3)} + \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\zeta_4(0) + \Delta_\rho(x;\zeta_4), \quad (\rho > 0) \qquad (1.1)$$

где

$$\Delta_\rho(x;\zeta_4) = \begin{cases} O(x^{3/4+\rho/2}), \text{если } \rho > 3/2; \\ \Omega_\pm(x^{3/4+\rho/2}), \text{если } (\rho > 0). \end{cases}$$

В работе [6] для функции $\Delta_\rho(x;\zeta_4)$ получены более точные $\Omega_\pm$–результаты

$$\lim_{x\to\infty}\sup \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_4)}{x^{3/4+\rho/2}} = +\infty, \quad \lim_{x\to\infty}\inf \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_4)}{x^{3/4+\rho/2}} = -\infty, \qquad (1.2)$$

если $0 < \rho \leqslant 3/2$.

В §2 будет доказан следующий результат.

Теорема 1. *Формула* (1.1) *справедлива с оценкой остаточного члена при* $0 < \rho \leqslant 3/2$

$$\Delta_\rho(x;\zeta_4) = \begin{cases} O(x^{1/2+\rho+\epsilon})(1 < \rho \leqslant 3/2), \\ O(x^{9/8+\rho/4})(1/2 < \rho \leqslant 1), \\ O(x^{5/4+\epsilon})(0 < \rho \leqslant 1/2). \end{cases}$$

Следствие 1. *Справедлива оценка*

$$\Psi_4(x) = O(x^{11/8}).$$

Последняя оценка легко следует из

$$\Delta_1(x;\zeta_4) = O(x^{11/8}).$$

Конкретизация результатов (1.2) трудна, однако в §3 мы в одном частном случае сделаем это. Точнее, будет доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Справедлив* Ω*–результат*

$$\Delta_{1/2}(x;\zeta_4) = \Omega(x\log^{1/2} x).$$

§2. Доказательство теоремы 1

Случай $1 < \rho \leqslant 3/2$ приводится в формулировке теоремы 1 для полноты картины; он уже рассматривался в предложении 1 [8].

Переходим к случаю $0 < \rho \leqslant 1$. Мы используем обозначения и результаты работы Лау [9]. Вместо ряда для $\zeta_4(s)$ будем рассматривать ряд $\varphi_4(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_4(n)\mu_n^{-s}$, где $\mu_n = \pi n$. Роль $\Delta_\rho(x;\zeta_4)$ будет играть

$\Delta_\rho(y;\varphi_4)$. Сначала докажем нужную нам оценку экспоненциальной суммы (мы используем метод работы [10])

$$V_N(R) = \sum_{n\asymp N} r_4(n) e(R\sqrt{n}),$$

где $R > 1$, $e(z) = e^{2\pi i z}$ и $n \asymp N$ означает $c_1 N < n < c_2 N$ с некоторыми положительными константами c_1, c_2 (которые не обязательно одни и те же в каждом появлении). Сначала выведем, что

$$\begin{aligned} V_N(R) &\ll \Big| \sum_{a,b,c,d} e(R\sqrt{a^2 = b^2 + c^2 + d^2}) \Big| \\ &\ll N^{1/2+\epsilon} \sum_{n\asymp N} \Big| \sum_{c\ll\sqrt{N}} e(\theta c) e(R\sqrt{n + c^2}) \Big| \end{aligned} \tag{2.1}$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$. Для доказательства (2.1) мы выберем наименьшую переменную, скажем c, а из переменных a, b, d образуем новую переменную $n = a^2 + b^2 + d^2$. Учитываем оценку $r_3(n) \ll n^{1/2+\epsilon}$.
Далее разбиваем интервал внутреннего суммирования на отрезки длины $N^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ и применяем неравенство Коши, тогда получаем

$$V_N^2(R) \ll N^{7/2+\epsilon} + N^{2+\epsilon} \sum_{y\asymp D} \Big| \sum_{x\asymp N} e(f(x,y)) \Big|,$$

где

$$f(x,y) = R(\sqrt{x} - \sqrt{x+y}).$$

Если $D \ll N^{3/2}R^{-1}$, то, по теореме 2.1 [11],

$$\sum_{x\asymp N} e(f(x,y)) \ll N^{3/2}R^{-1}D^{-1}$$

и

$$N^{2+\epsilon} \sum_{y\asymp D} | \sum_{x\asymp N} e(f(x,y))| \ll N^{7/2+\epsilon}.$$

Если $D \gg N^{3/2}R^{-1}$, то используется хорошо известный метод ван дер Корпута (подробности см. в доказательстве леммы 3.1 [10]). В результате, имеем следующий результат.

Лемма 1. *Для* $R > 1$

$$\begin{aligned} V_N(R) \ll N^{7/4+\epsilon} + N^{1/2+\epsilon} \min\big\{ & R^{3/8}N^{15/16} + R^{1/8}N^{17/16}, \\ & R^{7/24}N^{49/48} + R^{5/24}N^{53/48}\big\}. \end{aligned}$$

Чтобы применить результаты работы [9], нам необходимо выполнение некоторых условий. В нашем случае достаточно выполнить требование (A4) из [9] – наличие асимптотики для суммы

$$\sum := \sum_{n \leqslant x} r_4^2(n).$$

Сформулируем самый последний результат на эту тему [12]:

$$\sum = 32\zeta(3)x^3 + O(x^2(\log x)^{5/3}). \tag{2.2}$$

Остальные требования носят стандартный характер и здесь не приводятся.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1 в случае $0 < \rho \leqslant 1$. Пусть $X \geqslant y \geqslant cX$, $Z \geqslant 2y \geqslant cZ$, где $0 < c < 1$ –абсолютная константа. Из теоремы 1 [9] следует, что при $0 < \rho \leqslant 1$

$$\Delta_\rho(y;\varphi_4) = E_{1,\rho}(y,X) + R_{1,\rho}(y,X,Z) + H_{1,\rho}(y,X),$$

где

$$E_{1,\rho}(y,X) = e_0(\rho)y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\rho}\int\limits_1^2 \sum_{\mu_n<uX} \frac{r_4(n)}{\mu_n^{5/4+\rho/2}}\cos(2(\mu_n y)^{1/2} + k_0(\rho)\pi)du,$$

$$R_{1,\rho}(y,X,Z) = c_0(\rho)y^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\rho}\sum_{\mu_n<Z}\frac{r_4(n)}{\mu_n^{5/4}} \times \int\limits_1^2\int\limits_{uX}^\infty t^{-\rho/2-1}\sin(2(y^{1/2}-\mu_n^{1/2})t^{1/2} - \rho\frac{\pi}{2})dtdu,$$

$$H_{1,\rho}(y,X) = e_1(\rho)y^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\rho}\int\limits_1^2\sum_{\mu_n<uX}\frac{r_4(n)}{\mu_n^{7/4+\rho/2}} \times \cos(2(\mu_n y)^{1/2} + k_1(\rho)\pi)du + O(y^{\frac{1}{2}});$$

значения $e_0(\rho)$, $c_0(\rho)$, $e_1(\rho)$, $k_0(\rho)$ и $k_1(\rho)$ см. в [9]. рассмотрим формулу для $E_{1,\rho}(y,X)$. Сумму $\sum\limits_{\mu_n<uX}\ldots$ разбиваем на две

$$\sum_{\mu_n<\sqrt{uX}}\cdots + \sum_{\sqrt{uX}\leqslant\mu_n<uX}\cdots.$$

Первую сумму оцениваем тривиально, а вторую – с помощью леммы 1. В результате, получаем

$$E_{1,\rho}(y,X) \ll y^{9/8+\rho/4} + y^{5/4+\epsilon}.$$

В формуле для $R_{1,\rho}(y,X,Z)$ интеграл

$$\int_1^2 \int_{uX}^{\infty} \cdots \ll y^{-\rho/2},$$

а сумма

$$\sum_{\mu_n < Z} \frac{r_4(n)}{\mu_n^{5/4}} \ll y^{3/4};$$

следовательно,

$$R_{1,\rho}(y,X,Z) \ll y.$$

Наконец, в формуле для $H_{1,\rho}(y,X)$

$$\sum_{\mu_n < uX} \frac{r_4(n)}{\mu_n^{7/4+\rho/2}} \ll (uX)^{1/4-\rho/2},$$

поэтому $H_{1,\rho}(y,X) \ll y^{1/2}$. Теорема 1 доказана. □

§3. Доказательство теоремы 2

Из вычислений Лау и Тзанга [13], опиравшихся на общие результаты Хафнера [14, Theorem B], следует выражение для $\Delta_\rho(y;\varphi_4)$: в интервале $1/2 < \rho \leqslant 3/2$

$$\begin{aligned}\Delta_\rho(y;\varphi_4) = e_0(\rho) y^{3/4+\rho/2} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4(n)}{\mu_n^{5/4+\rho/2}} \cos(2\sqrt{\mu_n y} + k_0(\rho)\pi) + e_1(\rho) y^{1/4+\rho/2} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_4(n)}{\mu_n^{7/4+\rho/2}} \cos(2\sqrt{\mu_n y} + k_1(\rho)\pi) + O(y^{-1/4+\rho/2}),\end{aligned} \tag{3.1}$$

где выражения для $e_0(\rho), e_1(\rho), k_0(\rho)$ и $k_1(\rho)$ даются в [13], O-константа от ρ не зависит; это важно, поскольку ниже рассматривается переход к пределу $\rho \to \frac{1}{2}+$. Отметим, что условие $\rho > \frac{1}{2}$ требуется в работе Хафнера [14]. По [14, Theorem B], первая сумма в (3.1) сходится равномерно на любом конечном замкнутом интервале в $(0,\infty)$; вторая сумма сходится абсолютно для любого фиксированного $\rho > \frac{1}{2}$, поскольку $r_4(n) \ll n\log n$. Из соотношения (1.1) следует, что функция

$$\Delta(y) = \lim_{\rho\to\frac{1}{2}+} \Delta_\rho(y;\varphi_4)$$

существует и

$$\Delta(y) = \Delta_{1/2}(y;\varphi_4)$$

для всех $y \neq \mu_n$. Переходим непосредственно к доказательству теоремы 2. Используем приемы работы [13]. Пусть L достаточно велико и $L \leqslant \sqrt{x}$. Будем использовать ядро

$$K(u) = B\Big(\frac{\sin(\pi Bu)}{\pi Bu}\Big)^2,$$

где

$$B = [L^{1+1/7}]L^{-1} \asymp L^{1/7}.$$

Сначала рассмотрим

$$F_\rho(t) = \int\limits_{-L}^{L} \frac{\Delta_\rho((t+u)^2;\varphi_4)}{(t+u)^{3/2+\rho}} K(u)\,du$$

для $1/2 < \rho \leqslant 3/2$ и $t \geqslant 2L$. В [13] доказано, что

$$\int\limits_{-L}^{L} K(u)e^{iuy}dy = \max\Big(0, 1 - \Big|\frac{y}{2\pi B}\Big|\Big) + O(BL^{-1}y^{-2}).$$

Далее, при $|t| \geqslant 2L$ интегрированием по частям получаем

$$\int\limits_{-L}^{L} (t+u)^{-1}K(u)e^{iuy}du \ll B|t|^{-1}y^{-1}.$$

Используя также оценку

$$\int\limits_{-L}^{L} K(u)du \ll 1$$

и оценки, легко получаемые из (2.2), выводим из (3.1)

$$F_\rho(t) = \sum_{-L} \rho(t) + O(BL^{-1}), \tag{3.2}$$

где

$$\sum_{\rho}(t) = e_o(\rho) \sum_{\mu_n \leqslant (\pi B)^2} \frac{r_4(n)}{\mu^{5/4+\rho/2}} w_n \cos\left(2\sqrt{\mu_n t} + k_0(\rho)\pi\right)$$

$w_n = 1 - \sqrt{\mu_n}/(\pi B)$. Далее используем хорошо известные приемы из работы [15]: возведение в квадрат и почленное интегрирование с применением оценки

$$\int_T^{T+L} \cos(ut+\tau)dt \ll \min(L, |u|^{-1}).$$

После всех подсчетов имеем

$$L^{-1} \int_T^{T+L} \sum_{\rho}(t)^2 dt = \frac{e_o(\rho)^2}{2} \sum_{\mu_n \leqslant (\pi B)^2} \frac{r_4(n)^2}{\mu_n^{5/2+\rho}} w_n^2 + O(B^{1+\epsilon} L^{-1}). \qquad (3.3)$$

Отметим, что $w_n \ll 1$ и $w_n \geqslant \frac{1}{2}$ для $\mu_n \leqslant (\pi B/2)^2$.

В силу (3.2) и (3.3) имеем

$$L^{-1} \int_T^{T+L} F_\rho(t)^2 dt = \frac{e_o(\rho)}{2} \sum_{\mu_n \leqslant (\pi B)^2} \frac{r_4(n)^2}{\mu_n^{5/2+\rho}} w_n^2 + O(B^{1+\epsilon} L^{-1}). \qquad (3.4)$$

Из (1.1) следует, что $\Delta_\rho(x;\varphi_4)$ остается ограниченным для $1/2 < \rho \leqslant 3/2$, если x лежит в любом конечном интервале; поэтому мы можем перейти к пределу $\rho \to 1/2+$ под знаком интеграла и получить

$$\begin{aligned} \lim_{\rho\to 1/2+} F_\rho(t) &= \int_{-L}^{L} \lim_{\rho\to 1/2+} \frac{\Delta_\rho((t+u)^2;\varphi_4)}{(t+u)^2} K(u)du \\ &= \int_{-L}^{L} \frac{\Delta_{1/2}((t+u)^2;\varphi_4)}{(t+u)^2} K(u)\,du, \end{aligned} \qquad (3.5)$$

так как

$$\lim_{\rho\to 1/2+} \Delta_\rho(y;\varphi_4) = \Delta_{1/2}(y;\varphi_4),$$

исключая $y = \mu_n$.

С другой стороны, по (3.4), (2.2) и тому факту, что $B \asymp L^{1/7}$, мы имеем

$$\begin{aligned} L^{-1} \int\limits_T^{T+L} \lim_{\rho\to 1/2+} F_\rho^2(t)dt \\ &= \frac{e_0(1/2)}{2} \sum_{\mu_n \leqslant (\pi B)^2} \frac{r_4(n)^2}{\mu_n^3} w_n^2 + O(B^{1+\varepsilon}L^{-1}) \qquad (3.6) \\ &\geqslant \frac{e_o(1/2)}{8} \sum_{\mu_n \leqslant (\pi B/2)^2} \frac{r_4(n)^2}{\mu_n^3} + O(B^{1+\varepsilon}L^{-1}) \\ &\geqslant \log L. \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\sup_{t\in[T,T+L]} \lim_{\rho\to 1/2+} |F_\rho(t)|$$

достигается в точке $t = t_o$. Поэтому

$$\log^{1/2} L \ll \lim_{\rho\to 1/2+0} |F_\rho(t_0)|.$$

Из (3.5) следует, что

$$\lim_{\rho\to 1/2+} |F_\rho(t_0)| \leqslant \sup_{u\in[-L,L]} \frac{|\Delta_{1/2}((t_0+u)^2);\varphi_4|}{(t_0+u)^2} \int\limits_{-L}^{L} K(u)du. \qquad (3.7)$$

Учитывая (3.6), (3.7) и

$$\int\limits_{-L}^{L} K(u)du \ll 1,$$

получаем

$$\sup_{u\in[-L,L]} \frac{|\Delta_{1/2}((t_0+u)^2);\varphi_4|}{(t_0+u)^2} \gg \log^{1/2} L.$$

Выбирая $T = \sqrt{x} + L$, доказываем теорему 2. □

Замечание 1. На самом деле мы установили несколько более сильный факт, чем сформулированный в теореме 2. А именно, мы получили хорошую локализацию появления экстремальных значений величины $|\Delta_{1/2}(v;\varphi_4)|$: для любого достаточно большого $L \leqslant \sqrt{x}$ имеем

$$\sup_{u\in[x,x+L\sqrt{x}]} |\Delta_{1/2}(v;\varphi_4)| \gg x\log^{1/2} x.$$

Литература

1. E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.* — Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch – physikalische Klasse. 1912, 687–771.
2. E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre*, Berlin, 1962.
3. A.Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.
4. S. D. Adhikari, Y.-F. S. Pétermann, Lattice points in ellipsoids. — Acta Arith. **59** (1991), 329–338.
5. О. М. Фоменко, *Целые точки в многомерных шарах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 261–274.
6. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions.* — Acta Arithm. **6** (1961), 487–503.
7. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *Functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions.* — Ann. Math. **76** (1962), 93–136.
8. О. М. Фоменко, *О средних Рисса коэффициентов дзета-функций Эпштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ (2017), ?–?.
9. Y.-K. Lau, *On the mean square formula for the error term for a class of arithmetical functions.* — Mh. Math. **128** (1999), 111–129.
10. F. Chamizo, H. Iwaniec, *On the sphere problem.* — Rev. Mat. Iberoamericana **11** (1995), 417–429.
11. S. W. Graham, G. Kolesnik, *Van der Corput's method for exponential sums,* London Math. Soc. Lect. Notes **126**, Cambridge, 1991.
12. О. М. Фоменко, *О распределении целых точек на конусах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 193–203.
13. Y.-K. Lau, K.-M. Tsang, *Large values of error terms of a class of arithmetical functions.* — J. reine angew. Math. **544** (2002), 25–38.
14. J.-L. Hafner, *On the representation of the summatory function of a class of arithmetical functions.* Analytic Number Theory, M. I. Knopp, ed., Springer Lect. Notes Math. **899** (1981), 148–165.
15. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 73–82.

Fomenko O. M. Lattice points in the four-dimensional ball.

Let $r_4(n)$ denote the number of representations of n as a sum of 4 squares. The generating function $\zeta_4(s)$ is Epstein's zeta function. We consider the Riesz mean

$$D_\rho(x;\zeta_4) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n\leqslant x} (x-n)^\rho r_4(n)$$

for any fixed $\rho > 0$ and define the error term $\Delta_4(x;\zeta_4)$ by

$$D_\rho(x;\zeta_4) = \frac{\pi^2 x^{2+\rho}}{\Gamma(\rho+3)} + \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\zeta_4(0) + \Delta_\rho(x;\zeta_4).$$

In §2 one proves that

$$\Delta_4(x;\zeta_4) = \begin{cases} O(x^{1/2+\rho+\epsilon}) & (1 < \rho \leqslant 3/2), \\ O(x^{9/8+\rho/4}) & (1/2 < \rho \leqslant 1), \\ O(x^{5/4+\epsilon}) & (0 < \rho \leqslant 1/2). \end{cases}$$

In §3 one proves that

$$\Delta_{1/2}(x;\zeta_4) = \Omega(x \log^{1/2} x)$$

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2017 г.