Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

О. М. Фоменко

О СРЕДНИХ РИССА КОЭФФИЦИЕНТОВ ДЗЕТА-ФУНКЦИЙ ЭПШТЕЙНА

§1. Введение, результаты

Рассмотрим хорошо известную арифметическую функцию

$$r_3(n) := |\{n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z} : n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = n\}|.$$

Пусть

$$A_3(x) = \sum_{0 \leqslant n \leqslant x} r_3(n).$$

Положим

$$P_3(x) := A_3(x) - \frac{4}{3}\pi x^{3/2}.$$

Известно, что $P_3(x) = O(x^{21/32+\varepsilon})$ [1], $P_3(x) = \Omega_\pm(x^{1/2}\sqrt{\log x})$ [2].

Недавно автор сравнительно легко доказал [3], что

$$\sum_{0 \leqslant n \leqslant x} P_3(n) = \frac{2}{3}\pi x^{3/2} + \Psi_3(x),$$
$$\Psi_3(x) = O(x^{5/4+\varepsilon}).$$

Теперь мы доказываем более сильный результат.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\Psi_3(x) = O(x \log x).$$

Эта оценка практически неулучшаема, поскольку из сформулированных ниже результатов (1.4) имеем

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{\Psi_3(x)}{x} = +\infty,$$
$$\liminf_{x \to \infty} \frac{\Psi_3(x)}{x} = -\infty.$$

Ключевые слова: многомерные шары, дзета-функции Эпштейна, средние Рисса.

Теорема 1 будет следовать из теоремы 2, в которой изучаются при $0 < \rho \leqslant 1$ средние Рисса коэффициентов дзета-функции Эпштейна $\zeta_3(s)$,

$$D_\rho(x;\zeta_3) := \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n\leqslant x} (x-n)^\rho r_3(n) \quad (\rho \geqslant 0);$$

здесь

$$\zeta_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{n^s} \quad \Bigl(\sigma = \operatorname{Re} s > \frac{3}{2}\Bigr). \tag{1.1}$$

Хорошо известно, что

$$r_3(n) = O(n^{1/2+\varepsilon}). \tag{1.2}$$

При этом ε означает произвольно малое положительное число, которое не обязательно одно и то же в каждом появлении. Изучению средних Рисса сразу для дзета-функций Эпштейна

$$\zeta_Q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_Q(n) n^{-s} \quad (\operatorname{Re} s > k/2)$$

положительных квадратичных форм Q от $k \geqslant 2$ переменных с целыми рациональными коэффициентами посвящена работа [4]. Сформулируем полученный там результат в случае $k=3$, $\rho \geqslant 0$. Имеем

$$\begin{aligned} D_\rho(x;\zeta_Q) &:= \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} {\sum_{n\leqslant x}}' (x-n)^\rho r_Q(n) \\ &= \frac{\lambda x^{\rho+3/2}\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\rho+\frac{5}{2})} + \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\zeta_Q(0) + \Delta_\rho(x;\zeta_Q), \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$\begin{aligned} &\Delta_\rho(x;\zeta_Q) = \Omega_\pm(x^{1/2+\rho/2}) \quad (\rho \geqslant 0); \\ &\Delta_\rho(x;\zeta_Q) = O((x^{1/2+\rho/2}) \quad (\rho > 1); \\ &\Delta_0(x;\zeta_Q) = O(x^{3/4}). \end{aligned}$$

Последняя оценка, принадлежащая Ландау, доведена до $O(x^{2/3+\varepsilon})$ в работе [5]. В случае $\Delta_\rho(x;\zeta_3)$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, в работе [6] получены следующие $\Omega_\pm$-результаты:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_3)}{x^{1/2+\rho/2}} = +\infty, \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_3)}{x^{1/2+\rho/2}} = -\infty. \tag{1.4}$$

Теорема 2. *Формула* (1.3) *справедлива для* $Q(x) = z_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ *в случае* $0 < \rho \leqslant 1$ *с оценкой остаточного члена*

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3) = \begin{cases} O(x\log x) & (\rho = 1), \\ O(x^{2/3+\rho/3+\varepsilon}) & (1/2) < \rho < 1), \\ O(x^{3/4+\rho/4+\varepsilon}) & (0 < \rho \leqslant 1/2). \end{cases} \tag{1.5}$$

При $\rho = 1$ из (1.5) следует теорема 1. Действительно, связь $\Psi_3(x)$ и $\Delta_1(x;\zeta_3)$ легко усматривается из очевидного соотношения (x – целое положительное число)

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant x}\biggl(\sum_{1\leqslant m\leqslant n} r_3(m)\biggr) = \sum_{1\leqslant m\leqslant x}(x-m)r_3(m).$$

Теорема 2 доказывается в §2. В работах по проблеме шара ($\equiv$ получение наилучшей оценки для $P_3(x)$) авторы (И. М. Виноградов, Чен, Чамизо и Иванец, Хис–Браун) использовали оценки экспоненциальных сумм типа

$$V_K(R) = \sum_{n\asymp K} r_3(n)e(R\sqrt{n}),$$

где $n \asymp K$ означает, что

$$c_1K < n < c_2K,$$

c_1, c_2 – некоторые константы.

Для доказательства (1.5) в случае $0 < \rho < 1$ нам нужны такие же оценки.

В §3 доказаны теоремы 3–5, связанные с рассмотренными выше фактами. Из общих теорем Крупички [7] следует, что

$$x^{3/2} \ll \int_0^x |P_3(y)|\,dy. \tag{1.6}$$

В теореме 3 настоящей работы доказан более тонкий результат: справедливо неравенство

$$x \ll \int_x^{x+\widetilde{c}x^{1/2}} |\Delta_0(y;\zeta_3)|\,dy,$$

где $\widetilde{c}$ – некоторое положительное число. Из нашего результата следует, кстати, (1.6).

В теореме 4 доказано наличие для $1/2 < \rho \leqslant 1$ предельного распределения у величины $x^{-1/2-\rho/2}\Delta_\rho(x;\zeta_3)$.

В теореме 5 получена новая оценка сверху интеграла

$$\int\limits_0^x P_3(y)\,dy$$

и асимптотическая формула для суммы

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv 0 \pmod p}} P_3(n)$$

при растущем x. При этом простое p также может расти. Результат уточняет следствие 1 теоремы 3 [3] и теорему 4 [3]; доказательство использует сформулированную выше теорему 1. В §4 приведено утверждение о суммах Рисса коэффициентов $r_k(n)$ дзета-функции Эпштейна $\zeta_k(s)$ в случае $k \geqslant 4$.

§2. Доказательство теоремы 2

Случай $1/2 < \rho \leqslant 1$**.** Мы используем метод доказательства теоремы 12.4 книги [8]. По формуле обращения (см, теорему 3.1 Приложения в книге [9, с. 376]), получим стартовую формулу

$$\begin{aligned} D_\rho(x;\zeta_3) &= I_\rho\Big(x;\frac{3}{2}+\delta\Big) \\ &\quad + O\big(T^{-\rho}x^{\frac{1}{2}+\rho+\varepsilon}\big) + O\big(T^{-1-\rho}x^{\frac{3}{2}+\rho+\delta}\big), \end{aligned}$$

где $T > 1$, δ – достаточно малое положительное число с $\delta > \varepsilon$ и

$$I_\rho\Big(x;\frac{3}{2}+\delta\Big) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3}{2}+\delta-iT}^{\frac{3}{2}+\delta+iT} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\zeta_3(s)x^{s+\rho}\,ds.$$

При этом необходимо использовать разложение (1.1) и оценку (1.2). Заменим путь интегрирования в $I_\rho(x;\frac{3}{2}+\delta)$ прямоугольником, соединяющим точки $3/2+\delta-iT$, $-\delta-iT$, $-\delta+iT$ и $3/2+\delta+iT$. Интегралы по горизонтальным сторонам оцениваются посредством оценки выпуклости:

$$\zeta_3(\sigma+it) \ll |t|^{\frac{3}{2}+\delta-\sigma} \quad \Big(-\delta \leqslant \sigma \leqslant \frac{3}{2}+\delta\Big).$$

Если исключить окрестности простых полюсов в точках $s=0$, $s=3/2$, то на оставшейся части прямоугольника справедлива оценка

$$\left|\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\zeta_3(s)x^{s+\rho}\right| \ll |t|^{-1-\rho}|t|^{\frac{3}{2}+\delta-\sigma}x^{\sigma+\rho}.$$

Следовательно, мы получаем

$$\begin{aligned}\Delta_\rho(x;\zeta_3) &= I_\rho(x;-\delta) + O(T^{-\rho}x^{\frac{1}{2}+\rho+\varepsilon}) \\ &\quad + O(T^{-1-\rho}x^{\frac{3}{2}+\rho+\delta}) + O(T^{\frac{1}{2}-\rho+2\delta}x^{\rho-\delta}).\end{aligned}$$

При оценивании $I_\rho(x;-\delta)$ используем классический результат ван дер Корпута [8, лемма 4.3]:

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – вещественные функции, $G(x)/F'(x)$ монотонна и $F'(x)/G(x) \geqslant m > 0$, или $\leqslant -m < 0$. Тогда

$$\left|\int\limits_a^b G(x)e^{iF(x)}\,dx\right| \leqslant \frac{4}{m}.$$

Подставляя функциональное уравнение

$$\frac{\Gamma(s)}{\pi^s}\zeta_3(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\pi^{\frac{3}{2}-s}}\ \zeta_3\left(\frac{3}{2}-s\right)$$

в подинтегральное выражение интеграла $I_\rho(x;-\delta)$, имеем

$$\begin{aligned}I_\rho(x;-\delta) &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)x^\rho \int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma(s)}\frac{x^s}{n^{\frac{3}{2}-s}}\pi^{-\frac{3}{2}+2s}\,ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)x^\rho\pi^{-\frac{3}{2}}n^{-\frac{3}{2}} \int\limits_{\delta-iT}^{-\delta+iT} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma(s)}(\pi^2 xn)^s\,ds. \quad (2.1)\end{aligned}$$

Напомним некоторые классические соотношения для гамма-функции $\Gamma(s)$ [10, с. 37]: в каждой постоянной полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ при растущем $t>1$ равномерно имеем

$$\begin{aligned}\Gamma(\sigma+ti) &= c(\sigma)e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{ti(\log t-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right), \\ \Gamma(\sigma-ti) &= \bar{c}(\sigma)e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{-ti(\log t-1)}\left(1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right),\end{aligned}$$

$c = c(\sigma)$ от t не зависит и $\bar{c} = \bar{c}(\sigma)$ – комплексно сопряженное число. Следовательно, при $t > 1$

$$\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)} = c(\sigma,\rho)\frac{1}{t^{1+\rho}}\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big);$$

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{\Gamma(s)} &= \frac{\Gamma((\frac{3}{2}-\sigma)-it)}{\Gamma(\sigma+it)}\\ &= \frac{\bar{c}(\frac{3}{2}-\sigma)e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\frac{3}{2}-\sigma-\frac{1}{2}}e^{-ti(\log t-1)}(1+O(\frac{1}{t}))}{c(\sigma)e^{-\frac{\pi}{2}t}t^{\sigma-\frac{1}{2}}e^{ti(\log t-1)}(1+O(\frac{1}{t}))}\\ &= C(\sigma)t^{\frac{3}{2}-2\sigma}e^{i2t(-\log t+1)}\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл

$$J := \int\limits_{-\delta-iT}^{-\delta+iT}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{\Gamma(s)}(\pi^2xn)^s\,ds.$$

Поскольку $s = \sigma+it$, $\sigma = -\delta$, то

$$(\pi^2xn)^s = (\pi^2xn)^{-\delta}e^{it\log(\pi^2xn)}.$$

Положим

$$F(t) = 2t(-\log t+1)+t\log(\pi^2xn),$$

тогда

$$F'(t) = \log\frac{\pi^2xn}{t^2}.$$

Точками $-\delta+i$, $-\delta-i$ отрезок $[-\delta+iT,-\delta-iT]$ разбивается на три отрезка. Соответственно, интеграл J разбивается на три. Подробно изучим один из них:

$$J_1 = \int\limits_{-\delta+i}^{-\delta+iT}A(s)\,ds,$$

где

$$A(s) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s+\rho+1)}\frac{\Gamma(\frac{3}{2}-s)}{\Gamma(s)}\;(\pi^2xn)^s.$$

Имеем

$$J_1 = C(-\delta,\rho)\frac{1}{(\pi^2xn)^\delta}\int\limits_1^T e^{iF(t)}\Big\{G(t)\Big(1+O\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)\Big\}\,dt,$$

где $G(t) = t^{\frac{1}{2}+2\delta-\rho}$.

Пусть $T^2/(\pi^2 x) = N + \frac{1}{2}$, где N – целое число; рассмотрим члены с $n > N$. Оцениваем

$$\int_1^T e^{iF(t)} G(t)\,dt.$$

Имеем

$$F'(t) \geqslant \log \frac{n}{N+1}.$$

Можно считать, что $1/2 + 2\delta - \rho < 0$; тогда $G(t)$ убывает на $[1, T]$ от 1 до $T^{\frac{1}{2}+2\delta-\rho}$. Следовательно, $1/G(t)$ возрастает на $[1, T]$ с минимальным значением 1, поэтому имеем

$$F'(t)/G(t) \geqslant \log \frac{n}{N+\frac{1}{2}},$$

откуда, по результату ван дер Корпута,

$$\Big|\int_1^T e^{iF(t)} G(t)\,dt\Big| \leqslant \frac{4}{\log \frac{n}{N+\frac{1}{2}}}.$$

Очевидно,

$$\Big|\int_1^T e^{iF(t)} G(t) O\Big(\frac{1}{t}\Big)\,dt\Big| \ll 1.$$

Имеем, далее,

$$J_2 = \int_{-\delta-i}^{-\delta+i} A(s)\,ds \ll 1;$$

Случай

$$J_3 = \int_{-\delta-iT}^{-\delta-i} A(s)\,ds$$

аналогичен J_1.

Ряд (2.1) разобьем на два:

$$I_\rho(x; -\delta) = \sum_{n \leqslant N} + \sum_{n > N}.$$

С помощью только что полученных неравенств оцениваем $\sum\limits_{n>N}$. Имеем

$$\sum_{n>N} \ll \sum_{n>N} x^{\rho-\delta}\frac{r_3(n)}{n^{3/2+\delta}}\Big\{\frac{1}{\log\{n/(N+\frac{1}{2})\}}+1\Big\} \ll x^{\rho-\delta}.$$

Сумму $\sum\limits_{n\leqslant N}$ представим в виде

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant N} &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n\leqslant N} r_3(n)x^\rho\pi^{-3/2}n^{-3/2}\int\limits_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty} A(s)\,ds \\ &-\frac{1}{2\pi i}\sum_{n\leqslant N} r_3(n)x^\rho\pi^{-3/2}n^{-3/2}\Big\{\int\limits_{-\delta+iT}^{\delta+i\infty} A(s)\,ds+\int\limits_{-\delta-i\infty}^{-\delta-iT} A(s)\,ds\Big\} \\ &=: K_0-\{K_1+K_2\}.\end{aligned}$$

Рассмотрим сумму K_1 и соответствующий интеграл

$$\int\limits_T^\infty e^{iF(t)}G(t)\,dt.$$

В силу результата ван дер Корпута,

$$\Big|\int\limits_T^\infty e^{iF(t)}G(t)\,dt\Big| \ll \frac{T^{1/2+2\delta-\rho}}{\log\{(N+1/2)/n\}}$$

откуда

$$K_1 \ll \sum_{n\leqslant N} x^{\rho-\delta}\frac{r_3(n)}{n^{3/2+\delta}} \ll x^{\rho-\delta}.$$

K_2 оценивается аналогично. Следовательно,

$$\sum_{n\leqslant N} = K_0+O(x^{\rho-\delta}).$$

Сумма K_0 после преобразования $s\to 3/2-s$ равна

$$\begin{aligned}K_0 = \frac{1}{\pi^\rho}\sum_{n\leqslant N}\frac{r_3(n)}{(\pi n)^{3/2+\rho}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{3/2+\delta-i\infty}^{3/2+\delta+i\infty}\frac{\Gamma(3/2-s)}{\Gamma(3/2-s+\rho+1)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(3/2-s)} \\ \times(\pi x\cdot\pi n)^{3/2+\rho-s}\,ds.\end{aligned}$$

Пусть Φ – ориентированная ломаная с вершинами в точках $-1/2-i\infty$, $-1/2-i4$, $4-i4$, $4+i4$, $-1/2+i4$ и $-1/2+i\infty$. Тогда K_0 можно представить в виде

$$\frac{1}{\pi^\rho}\sum_{n\leqslant N}\frac{r_3(n)}{(\pi n)^{3/2+\rho}}\cdot f_\rho(\pi x\cdot\pi n),$$

где

$$f_\rho(y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Phi\frac{\Gamma(3/2-s)}{\Gamma(3/2-s+\rho+1)}\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(3/2-s)}y^{3/2+\rho-s}\,ds.$$

При $\rho\in[0,1]$ величина $f_\rho(y)$ была вычислена в [2]. В результате, имеем

$$K_0=e_0'(\rho)x^{1/2+\rho/2}\sum_{n\leqslant N}\frac{r_3(n)}{(\pi n)^{1+\rho/2}}\times\cos\{2\pi\sqrt{nx}-(1+\rho/2)\pi\}+O(x^{\rho/2}). \tag{2.2}$$

Собирая доказанное, имеем при $1/2<\rho\leqslant 1$

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3)=K_0+O(x^{\rho-\delta})+O(T^{-\rho}x^{1/2+\rho+\varepsilon})+O(T^{-1-\rho}x^{3/2+\rho+\delta}).$$

Поскольку $T\asymp\sqrt{x}\sqrt{N}$, то

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3)=K_0+O(x^{\rho-\delta})+O(x^{1/2+\rho/2+\varepsilon}N^{-\rho/2})+O(x^{1+\rho/2+\delta}N^{-1/2-\rho/2}). \tag{2.3}$$

Переходим к доказательству теоремы 2. При трактовке случаев $1/2<\rho<1$ и $0<\rho\leqslant 1/2$ нам потребуется лемма 3.1 [11]:

пусть

$$V_K(R)=\sum_{n\asymp K}r_3(n)e(R\sqrt{n}),$$

тогда для $R>1$

$$V_K(R)\ll R^{5/4+\varepsilon}+K^\varepsilon\min\left\{R^{3/8}K^{15/16}+R^{1/8}K^{17/16},R^{7/24}K^{49/48}+R^{5/24}K^{53/48}\right\}. \tag{2.4}$$

Выбирая в (2.2) и (2.3) $N=x^{2/3}$, делим интервал суммирования на части $1\leqslant n\leqslant x^{1/3}$, $x^{1/3}\leqslant n\leqslant x^{2/3}$. Первую сумму оцениваем тривиально, а вторую – с помощью (2.4).

В результате получаем (1.5) для $1/2<\rho<1$.

Случай $\rho=1$ трактуется посредством абелева суммирования без помощи (2.4).

Случай $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$. Мы используем обозначения и результаты Лау [12]. Как и в [12], вместо ряда $\zeta_3(s)$ будем рассматривать ряд $\varphi_3(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n)\mu_n^{-s}$, где $\mu_n = \pi n$. Роль $\Delta_\rho(x;\zeta_3)$ в (1.3) теперь будет играть $\Delta_\rho(y;\varphi_3)$. Пусть $X \geqslant y \geqslant cX$, $Z \geqslant 2y \geqslant cZ$, где $0 < c < 1$ – абсолютная константа.

В теореме 1 [12] доказано, что

$$\Delta_\rho(y;\varphi_3) = E_{1,\rho}(y,X) + R_{1,\rho}(y,X,Z) + H_{1,\rho}(y,X),$$

где

$$E_{1,\rho}(y,X) = e_0(\rho) y^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\rho} \int_1^2 \sum_{\mu_n < uX} \frac{r_3(n)}{\mu_n^{1+\rho/2}} \times \cos(2(\mu_n y)^{1/2} + (-1-\rho/2)\pi) du,$$

$$R_{1,\rho}(y,X.Z) = c_0(\rho) y^{\rho/2} \sum_{\mu_n < Z} \frac{r_3(n)}{\mu_n} \times \int_1^2 \int_{uX}^{\infty} t^{-\rho/2-1} \sin(2(y^{1/2} - \mu_n^{1/2})t^{1/2} - \rho\frac{\pi}{2})\, dt\, du,$$

$$H_{1,\rho}(y,X) = e_1(\rho) y^{\frac{1}{2}\rho} \int_1^2 \sum_{\mu_n < uX} \frac{r_3(n)}{\mu_n^{3/2+\rho/2}} \times \cos(2(\mu_n y)^{1/2} + (-1/2-\rho/2)\pi) du + O(1);$$

значения $e_0(\rho)$, $c_0(\rho)$ и $e_1(\rho)$ см. в [12].

Величину $E_{1,\rho}(y,X)$ оцениваем с помощью (2.4); получаем

$$E_{1,\rho}(y,X) = O(y^{3/4+\rho/4}).$$

В $R_{1,\rho}(y,X,Z)$ интеграл

$$\int_1^2 \int_{uX}^{\infty} \ldots dt du = O(1),$$

поскольку $\rho > 0$. Следовательно,

$$R_{1,\rho}(y,X.Z) = O(y^{1/2+\rho/2}).$$

Наконец,

$$H_{1,\rho}(y,X) = O(y^{\rho/2}). \qquad \square$$

§3. Теоремы 3–5

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$x \ll \int\limits_x^{x+\widetilde{c}x^{1/2}} |\Delta_0(y;\zeta_3)|dy,$$

где $\widetilde{c}$ – некоторое положительное число. То же неравенство справедливо для $P_3(y)$.

Доказательство. Мы используем метод Тонга [13], который излагается также в работе [14].

Представим функциональное уравнение для $\zeta_3(s)$ в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\zeta_3(\frac{3}{2}-s) = f(\zeta_3,s)\zeta_3(s),$$

где

$$f(\zeta_3,s) = \frac{1}{2\pi i}\pi^{\frac{3}{2}-s}\ \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}.$$

Рассмотрим Φ_ρ $(\rho = 0,1,2,3,\dots)$, ориентированную ломаную с вершинами в точках

$$-\frac{1}{2}-\rho-i\infty, \quad -\frac{1}{2}-\rho-i(4+\rho), \quad 4+\rho-i(4+\rho),$$
$$4+\rho+i(4+\rho), \quad -\frac{1}{2}-\rho+i(4+\rho), \quad -\frac{1}{2}-\rho+i\infty.$$

Введем теперь величину (основу метода Тонга)

$$I_{\zeta_3,\rho}(n,x) = \int\limits_{\Phi_\rho} x^{\rho+3/2-s}n^{-s}f(\zeta_3,s)\frac{\Gamma(3/2-s)}{\Gamma(\rho+1+3/2-s)}\,ds,$$

тесно связанную с функцией $f_\rho(y)$, изученной Хафнером [15] и Лау и Тзангом [2].

Как легко видеть,

$$I_{\zeta_3,\rho}(n,x) = \frac{f_\rho(\pi^2 nx)}{n^{3/2+\rho}},$$

где (в обозначениях [2]) при $\rho = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_\rho(y) = \sum_{\nu=0,1} e_\nu(\rho) y^{\theta_\rho - \nu/2} \cos(hy^{1/2} + k_\nu(\rho)\pi) + O(y^{\theta\rho - 1}),$$

$O(\ldots)$ не зависит от ρ, если ρ принадлежит фиксированному конечному интервалу; $\theta_\rho = 1/2 + \rho/2$, $e_0(\rho) = 1/\sqrt{2\pi}$ и $e_1(\rho)$ – квадратичный полином от ρ^2.

Производя соответствующие вычисления, получаем формулу

$$I_{\zeta_3,\rho}(n,x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\pi^\rho \frac{x^{1/2+\rho/2}}{n^1 + \rho/2} \cos\{2\pi\sqrt{nx} - (1+\rho/2)\pi\}$$
$$+O\Big\{(\rho+1)^2\pi^\rho \frac{x^{\rho/2}}{n^{3/2+\rho/2}}\Big\}, \qquad (3.1)$$

где $\rho = 0, 1, 2, 3, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. Нам необходимы также следующие равенства. При $N \geqslant 0$, целом $h \geqslant 2$ и $\min(x, x+hy) > 0$ имеем

$$\int_0^y \ldots \int_0^y \Delta_0(x + y_1 + \cdots + y_h; \zeta_3) dy_1 \ldots dy_h = \zeta_3(0) \cdot y^h$$
$$+ \sum_{n \leqslant N} r_3(n) \int_0^y \ldots \int_0^y I_{\zeta_3,0}(n, x + y_1 + \cdots + y_h) dy_1 \ldots dy_h$$
$$+ \sum_{l=0}^{h} (-1)^{h-l} \binom{h}{l} \sum_{n>N} r_3(n) I_{\zeta_3,h}(n, x + ly); \qquad (3.2)$$

при $j = 0, 1, 2, \ldots$ и $\min(u, u+y) > 0$ имеем

$$\int_0^y I_{\zeta_3,j}(n, u + y_1) dy_1 = I_{\zeta_3,j+1}(n, u+y) - I_{\zeta_3,j+1}(n, u). \qquad (3.3)$$

Теперь можно приступать непосредственно к выводу теоремы 3, причем равенства (3.1)–(3.3) будут играть важную роль. Приведем стартовое соотношение. Пусть $x \leqslant X \leqslant 2x$, $1 \leqslant u \leqslant x$, целое $h \geqslant 2$;

величина $j = 0, 1$ выбирается ниже. Имеем

$$(-1)^j \int\limits_0^u \left\{ \int\limits_0^y \dots \int\limits_0^y \Delta_0(X + y_1 + \dots + y_h; \zeta_3) dy_1 \dots dy_h \right\} dy$$

$$= (-1)^j \int\limits_0^u \left\{ \zeta_3(0) \cdot y^h + \sum_{l=0}^{h} (-1)^{h-l} \binom{h}{l} \sum_{n=1}^{\infty} I_{\zeta_3,h}(n, X + ly) \right\} dy$$

$$= \frac{(-1)}{h+1} \zeta_3(0) u^{h+1} + u \Big\{ (-1)^{j+h} r_3(1) I_{\zeta_3,h}(1, X)$$

$$+ (-1^{j+h} \sum_{n=2}^{\infty} r_3(n) I_{\zeta_3,h}(n, X) \Big\}$$

$$+ \sum_{l=1}^{h} \frac{(-1)^{j+h-l}}{l} \binom{h}{l} \sum_{n=1}^{\infty} r_3(n) \Big\{ I_{\zeta_3,h+1}(n, X + lu) - I_{\zeta_3,h+1}(n, X) \Big\}.$$

Поскольку $\zeta_3(0) = -1$, а в доказательстве используется положительность коэффициента при u^{h+1}, мы положим $j = 1$. Затем применяем трюк Тонга (который воспроизведен, в частности, в [14]), причем центральную роль играет формула (3.1). Получаем неравенство

$$\int\limits_0^{c' x^{1/2}} \left\{ \int\limits_0^y \dots \int\limits_0^y \Delta_0(X_q + y_1 + \dots + y_h; \zeta_3) dy_1 \dots dy_h \right\} dy \gg x^{1/2 + (h+1)/2},$$

где X_q, $x + 1 \leqslant X_q \leqslant x + 2x^{1/2}$, h и $c' > 0$ выбираются специальным образом. Отсюда следует неравенство

$$x \ll \int\limits_x^{x + \widetilde{c} x^{1/2}} |\Delta_0(y; \zeta_3)| dy,$$

где $\widetilde{c} = hc' + 2$. □

Теорема 4. *Фиксируем ρ, $1/2 < \rho \leqslant 1$. Величина $x^{-1/2-\rho/2} \Delta_\rho(x; \zeta_3)$ имеет предельное распределение с плотностью $p(\alpha)$; иначе говоря, для любого интервала I справедливо соотношение*

$$X^{-1} \operatorname{mes} \Big\{ x \in [1, X] : x^{-1/2-\rho/2} \Delta_\rho(x; \zeta_3) \in I \Big\} \longrightarrow \int\limits_I p(\alpha) d\alpha$$

при $X \to \infty$. Плотность $p(\alpha)$ и ее производные удовлетворяют условию убывания

$$\frac{d^k}{d\alpha^k} P(\alpha) \ll (1+|\alpha|)^{-A}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$ и любой константы A, причем $\ll$-константа зависит от A и k. Кроме того, $p(\alpha)$ продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$ как целая функция.

Доказательство теоремы, которое использует метод Хис–Брауна [16], здесь не приводится. Сделаем только несколько замечаний. Хис–Браун, доказывая наличие предельного распределения у функции $F(t)$, предположил, что $F(t)$ аппроксимируется в среднем осциллирующим рядом (см. предположение (H) и более тонкую лемму 1 в работе [16]). В нашем случае указанная аппроксимация гарантируется формулой (2.3) при $N = x$:

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3) = (2\pi^{\rho/2})^{-1} x^{1/2+\rho/2} \times \sum_{n \leqslant x} \frac{r_3(n)}{(\pi n)^{1+\rho/2}} \cos\{2\pi\sqrt{nx} - (1+\rho/2)\pi\} + O(x^{\rho-\delta}),$$

в которой остаточный член есть $o(x^{1/2+\rho/2})$ (ср. [16, с. 408–409].

Теорема 5.

$$\text{(i)} \quad \int_0^x P_3(y)\,dy \ll x \log x.$$

(ii) *Справедливо соотношение*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant x} P_3(pk) = (1 + 2L(p)p^{-2}) \frac{2}{3} \pi p^{1/2} x^{3/2} + O((px)^{7/6}),$$

где $p \geqslant 2$ – простое число, $x \gg p^2$; $L(p) = 0$, если $p = 2$ или $p \equiv 1 \pmod 4$; $L(3) = 1$; $L(p) = p \cdot h(-p)$, если $p \geqslant 7$ и $p \equiv 3 \pmod 4$, причем $h(-p)$ обозначает число классов мнимого квадратичного поля дискриминанта $-p$, O – константа абсолютная.

Доказательство следует рассуждениям работы [3] с использованием теоремы 1 настоящей работы; (i) и (ii) усиливают соответственно следствие 1 и теорему 4 работы [3].

§4. Дзета-функция Эпштейна $\zeta_k(s)$, $k \geqslant 4$

Пусть $r_k(n)$ означает число целых точек на k-мерной сфере радиуса $\sqrt{n}$. Порождающая функция

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-s}, \ k \geqslant 2,$$

есть дзета-функция Эпштейна. $\zeta_k(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с единственной особенностью – простым полюсом с вычетом $\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ в точке $s = k/2$; $\zeta_k(s)$ имеет функциональное уравнение

$$\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_k(s) = \pi^{-(\frac{k}{2}-s)}\Gamma\Big(\frac{k}{2}-s\Big)\zeta_k\Big(\frac{k}{2}-s\Big).$$

Рассматриваются разложения средних Рисса коэффициентов функций $\zeta_k(s)$, $k \geqslant 4$:

$$\Delta_\rho(x;\zeta_k) := \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{0\leqslant n\leqslant x} r_k(n)(x-n)^\rho - \frac{\pi^{k/2}x^{k/2+\rho}}{\Gamma(\rho+1+k/2)} - \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)}\zeta_k(0) \ (\rho > 0)$$

с $r_k(0) = 1$ и $k \geqslant 4$. Было доказано в [4], что если $\rho > \frac{1}{2}(k-1)$, то

$$\Delta_\rho(x;\zeta_k) = \begin{cases} O\{x^{(k-1)/4+\rho/2}\}, \\ \Omega_\pm\{x^{(k-1)/4+\rho/2}\}; \end{cases}$$

иначе говоря, оценки окончательные.

Если же $\rho \leqslant \frac{1}{2}(k-1)$, то в [6] получены только омега-результаты:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_k)}{x^{(k-1)/4+\rho/2}} = +\infty,$$
$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\Delta_\rho(x;\zeta_k)}{x^{(k-1)/4+\rho/2}} = -\infty.$$

Для полноты картины приведем оценки для $P_k(x)$ ($k \geqslant 4$), остаточного члена в формуле счета числа целых точек в k-мерном шаре радиуса $\sqrt{x}$. Вальфиш [17] показал, что

$$P_4(x) = O(x \log^{2/3} x);$$

это почти окончательная оценка. В случае $k > 4$ имеется окончательный результат (Вальфиш, Ландау (см. [10])):

$$P_k(x) = O(x^{\frac{k}{2}-1}).$$

В данной тематике нами получено следующее

Предложение 1. *Для* $k \geqslant 4$ *и* $1 \leqslant \rho \leqslant \frac{1}{2}(k-1)$ *справедлива оценка*

$$\Delta_\rho(x;\zeta_k) = O(x^{\rho+(k-3)/2+\varepsilon}).$$

Доказательство приводится вкратце поскольку сходное утверждение выводится в нашей работе [18, теорема 1]. Сделаем только несколько пояснений.

Задача сводится к оценке величины

$$x^{\alpha+\rho}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\zeta_k(\alpha+it)|}{1+t^{1+\rho}}\,dt, \tag{4.1}$$

где α выбирается специальным образом. Из результатов работы [19, с. 218] следует, что если $k \geqslant 3$ и $\delta > 0$ – константа, то при выполнении неравенств

$$\frac{1}{2}+\varepsilon_0 \leqslant \frac{k-1}{2}-\delta \leqslant \frac{k-1}{2}-\varepsilon_0$$

справедлива оценка

$$\frac{1}{T}\int_{T}^{2T}\Big|\zeta_k\Big(\frac{k-1}{2}-\delta+it\Big)\Big|\,dt \ll T^{\delta}; \tag{4.2}$$

здесь $\varepsilon_0 > 0$ – достаточно малая константа. Пусть $k \geqslant 4$. Положим $\delta = 1-\varepsilon_1$, $\alpha = \frac{k-1}{2}-\delta = \frac{k-3}{2}+\varepsilon_1$, где в случае $k = 4$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, а для $k \geqslant 5$ ε_1 – сколь угодно малая положительная константа. Тогда из (4.2) следует сходимость интеграла в (4.1). Учитывая выбранное α, доказываем утверждение. $\square$

Замечание 1. Оценки предложения 1 неокончательные. Их можно существенно улучшить.

Литература

1. D. R. Heath-Brown, *Lattice points in the sphere*, Number theory in progress. Vol. 2, de Gruyter, Berlin, 1999, pp. 883–892.
2. Y.-K. Lau, K.-M. Tsang, *Large values of error terms of a class of arithmetical functions.* — J. reine angew. Math. **544** (2002), 25–38.
3. О. М. Фоменко, *Целые точки в круге и шаре.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **418** (2013), 198–220.
4. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *functional equations with multiple gamma factors and the average order of arithmetical functions.* — Ann. Math. **76** (1962), 93–136.
5. F. Chamizo, *Lattice points in bodies of revolution.* — Acta Arithm. **85** (1998), 265–277.
6. K. Chandasekharan, R. Narasimhan, *Hecke's functional equation and the average order of arithmetical functions.* — Acta Arithm. **6** (1961), 487–503.
7. S. Krupička, *On the number of lattice points in multidimensional convex bodies* (in Czech with German symmary). — Czech. Math. J. **7** (1957), 524–552.
8. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
9. K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berliln, 1957.
10. E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre*, Berlin, 1962.
11. F. Chamizo, H. Iwaniec, *On the sphere problem.* — Rev. Mat. Iberoamericana **11** (1995), 417–429.
12. Y.-K. Lau, *On the mean square formula for the error term for a class of arithmetical functions.* — Mh. Math. **128** (1999), 111–129.
13. K.-C. Tong, *On divisor problems.* I, III. — Acta Math. Sinica **5** (1955), 313–324; **6** (1956), 515–541.
14. О. М. Фоменко, *О среднем квадратичном остатого члена для дзета-функций Дедекинда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 187–204.
15. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math., Vol. **899**, Springer, Berlin, 1981, pp. 148–165.
16. D. R. Heath-Brown, *The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem.* — Acta Arithm. **60** (1992), 389–415.
17. A. Walfisz, *Weylsche Exponentialsummen in der Neueren Zahlentheorie*, Berlin, 1963.
18. О. М. Фоменко, *Целые точки в многомерных шарах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 261–274.
19. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) **106** (1996), 217–226.

Fomenko O. M. On Riesz means of the coefficients of Epstein's zeta functions.

Let $r_k(n)$ denote the number of lattice points on a k-dimensional sphere of radius $\sqrt{n}$. The generating function

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} r_k(n) n^{-s}, k \geqslant 2,$$

is Epstein's zeta-function. Let $k = 3$. We consider the Riesz mean of the type

$$D_\rho(x;\zeta_3) = \frac{1}{\Gamma(\rho+1)} \sum_{n \leqslant x} (x-n)^\rho r_3(n)$$

for any fixed $\rho > 0$ and define the error term $\Delta_\rho(x;\zeta_3)$ by

$$D_\rho(x;\zeta_3) = \frac{\pi^{3/2} x^{\rho+3/2}}{\Gamma(\rho+5/2)} + \frac{x^\rho}{\Gamma(\rho+1)} \zeta_3(0) + \Delta_\rho(x;\zeta_3).$$

A result of K. Chandrasekharan and R. Narasimhan (1962, MR25#3911) gives

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3) = \begin{cases} O(x^{1/2+\rho/2)} & (\rho > 1), \\ \Omega_\pm(x^{1/2+\rho/2}) & (\rho \geqslant 0). \end{cases}$$

In §2 one proves that

$$\Delta_\rho(x;\zeta_3) = \begin{cases} O(x \log x) & (\rho = 1), \\ O(x^{2/3+\rho/3+\varepsilon}) & (1/2 < \rho < 1), \\ O(x^{3/4+\rho/4+\varepsilon}) & (0 < \rho \leqslant 1/2). \end{cases}$$

In §3 one mentions a few examples for which results of §2 are applicable.

In §4 one investigates Riesz means of the coefficients of $\zeta_k(s)$, $k \geqslant 4$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
С.-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2017 г.