Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

П. А. Пугач, В. А. Шлык

ВЕСОВЫЕ МОДУЛИ И ЕМКОСТИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§1. Введение и основные обозначения

В ряде задач геометрической теории функций хорошо известны приложения модуля конфигурации (модуля конечного набора семейств кривых с весовыми коэффициентами (см. [1, 2])) и емкости конденсатора с конечным числом пластин (см. [3, 4]).

Ниже для такого конденсатора на открытом множестве G с компактным замыканием в $\mathcal{R}$ установим (см. теорему 2) существование конфигурации на G такой, что ее (p,ω)-модуль $\big((p,\omega)$-модуль конденсатора$\big)$ совпадает с (p,ω)-емкостью конденсатора, где $p > 1$ и ω – A_p-вес Макенхаупта на $\mathcal{R}$.

При $p = 2$, $\omega = 1$ на $\mathcal{R} = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ это дает ответ на вопрос, поставленный Дубининым в [5].

Упомянутый выше результат остается справедливым и для конденсатора на $\mathcal{R}$ (см. теорему 2), у которого одна пластина совпадает с границей $\partial\mathcal{R}$ поверхности $\mathcal{R}$, где $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$.

Поскольку в работе используются методы многомерного вещественного анализа, то ниже отождествляем комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, а $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ отождествляем с $\bar{\mathbb{R}}^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. Также будем считать, что в $\mathbb{R}^2$ задана фиксированная декартова система координат с осями ox_1, ox_2 и запись $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ будет обозначать, что точка x имеет координаты x_1, x_2 в этой системе координат. В $\bar{\mathbb{R}}^2$ мы используем хордальную метрику $h_{\bar{\mathbb{R}}^2}(x,y)$, где $h_{\bar{\mathbb{R}}^2}(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+|x^2|}\sqrt{1+|y^2|}}$, когда $x \neq \infty$, $x \neq y$, $h_{\bar{\mathbb{R}}^2}(x,\infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|x^2|}}$.

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathcal{R}$, склеенная из конечного или счетного числа плоских областей замкнутой плоскости $\bar{\mathbb{R}}^2$ с соблюдением следующих условий:

1) при склеивании проекции точек сохраняются (проекцией точки плоской области мы считаем саму эту точку);

Ключевые слова: модуль семейства кривых, емкость конденсатора, риманова поверхность, вес Макенхаупта.

2) окрестностью каждой точки X римановой поверхности является однолистный круг или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре X (подробнее, см. [6, стр. 383]).

Отметим, что если одна из склеиваемых областей есть $\mathbb{R}^2$ или $\bar{\mathbb{R}}^2$, то $\mathcal{R}$ совпадает соответственно с $\mathbb{R}^2$ или $\bar{\mathbb{R}}^2$. Склеивание производится таким образом, что множество $\mathcal{R}$ есть связная, триангулируемая, следовательно, ориентируемая поверхность (см. [7, гл. III]). В том случае, когда это не вызывает недоразумений, мы не будем различать плоские области до склеивания (отождествления некоторых связных частей границ этих областей) и после склеивания (когда они являются уже подобластями поверхности $\mathcal{R}$).

Это будет происходить следующим образом. Пусть в выкладках заглавные буквы, обозначающие точки из $\mathcal{R}$, записываются в виде прописных букв. Тогда это будет означать, что выкладки проводятся в некоторой однолистной области (определение см. ниже) на $\mathcal{R}$, которую будем отождествлять с ее проекцией.

Граничные точки склеиваемых областей, не задействованные в склеивании, порождают граничные точки поверхности $\mathcal{R}$. Совокупность граничных точек обозначим через $\partial\mathcal{R}$. Операция проектирования $X \to \operatorname{pr} X = x$ индуцирует двумерную меру Лебега σ (см. ниже), одномерную меру Хаусдорфа $\mathcal{H}^1$, евклидову метрику ds, сферическую метрику dh на $\mathcal{R}$ (подробней см. [8]). Здесь $\operatorname{pr} X = x$ будем также называть локальным параметром точки $X \in \mathcal{R}$.

Кривой γ на $\mathcal{R}$ назовем образ невырожденного числового промежутка I при непрерывном отображении $X = X(t)$ его в $\mathcal{R}$. Непрерывность отображения $X = X(t)$ означает, что $h_{\bar{\mathbb{R}}^2}\big(\operatorname{pr} X(t), \operatorname{pr} X(t_0)\big) \to 0$ при $t \to t_0$. Здесь $t, t_0 \in I$ и $X(t)$ принадлежит некоторой окрестности точки $X(t_0)$ при t, достаточно близких к t_0. В дальнейшем считаем, что отображение $X(t)$ не является постоянным ни на одном интервале из I и задает параметризацию кривой γ. Когда это будет необходимо, параметризацию $X = X(t), t \in I$, будем записывать в виде $X_\gamma = X_\gamma(t)$, $t \in I$.

Под длиной $s(\gamma)$ $\big($соответственно, $h(\gamma)\big)$ кривой γ в $\mathcal{R}$ с параметризацией $X = X(t)$, $t \in I$, понимаем длину кривой $\operatorname{pr}\gamma \subset \bar{\mathbb{R}}^2$, вычисленную в евклидовой метрике (соответственно, в сферической метрике), при условии, что $\operatorname{pr}\gamma$ имеет параметризацию $x(t) = \operatorname{pr} X(t)$, $t \in I$. Определим сферическое расстояние $h(X, X')$ между точками

$X, X' \in \mathcal{R}$ как инфимум $h(\gamma)$ по всем кривым $\gamma \subset \mathcal{R}$, соединяющим точки X и X'. Аналогично определим евклидово расстояние $s(X, X')$ между точками X, $X' \in \mathcal{R}$, где локальный параметр X или X' не равен ∞.

Далее поверхность $\mathcal{R}$ мы рассматриваем как метрическое пространство $\big(\mathcal{R}, h(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$. Если $F \subset \mathcal{R}$, то $\bar{F}$, ∂F, $\operatorname{int} F$ соответственно означают замыкание, границу, внутренность множества F в $\big(\mathcal{R}, h(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$. Для $E, F \subset \mathcal{R}$ обозначим через $h(E, F)$ и $s(E, F)$ расстояния между множествами E и F соответственно в сферической и евклидовой метрике, если они имеют смысл.

Для $x \in \bar{\mathbb{R}}^2$ положим $B(x, \delta) = \{y \in \bar{\mathbb{R}}^2 : |y - x| < \delta\}$, если $x \neq \infty$ и $\delta > 0$, и $B(x, \delta) = \{y \in \bar{\mathbb{R}}^2 : |y| > \frac{1}{\delta}\}$, если $x = \infty$ и $\delta > 0$. Пусть теперь X – простая точка на $\mathcal{R}$. Тогда через $B(X, \delta)$ обозначим однолистную окрестность точки X, для которой $\operatorname{pr} B(X, \delta) = B(x, \delta)$. Если X – точка разветвления порядка $k > 1$ на $\mathcal{R}$, то через $B(X, \delta)$ обозначим k-листную окрестность точки X, для которой $\operatorname{pr} B(X, \delta) = B(x, \delta)$. В обоих случаях δ – достаточно малое положительное число. Множество $O(F, \delta) = \bigcup\limits_{X \in F} B(X, \delta)$ назовем δ-окрестностью множества F, где $\bar{F}$ – компакт на $\mathcal{R}$ и δ – достаточно малое положительное число. Нетрудно заметить, что если $Y \in B(X, \delta) \subset \mathcal{R}$, где $0 < \delta < \frac{1}{2}$, то $h(X, Y) \leqslant 2h_{\bar{\mathbb{R}}^2}(\operatorname{pr} X, \operatorname{pr} Y)$.

Множество $F \subset \mathcal{R}$ назовем однолистным, если операция проектирования $F \to \operatorname{pr} F$ есть биекция. Однолистный компакт $F \subset \mathcal{R}$ назовем треугольником, если $\operatorname{pr} F$ есть замкнутый треугольник (замкнутая область) с прямолинейными сторонами на $\bar{\mathbb{R}}^2$. Здесь одной из вершин треугольника $\operatorname{pr} F$ может оказаться бесконечно удаленная точка. Если F – треугольник на $\mathcal{R}$, то открытое множество $\operatorname{int} F$ назовем открытым треугольником. Аналогично определим координатный прямоугольник и открытый координатный прямоугольник на $\mathcal{R}$. Открытое множество $\Omega \subset \mathcal{R}$ назовем полиэдрическим, если Ω – внутренность объединения конечного числа треугольников на $\mathcal{R}$. Множество $\mathcal{R} \setminus \bar{\Omega}$, где $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$ и Ω – полиэдрическое множество на $\mathcal{R}$, назовем окрестностью множества $\partial\mathcal{R}$. Положим $\mathcal{R}_\infty = \{X \in \mathcal{R} : \operatorname{pr} X = \infty\}$, $\mathcal{R}_b = \{X \in \mathcal{R} : X$ – точка разветвления для $\mathcal{R}\}$.

Вещественную функцию u назовем локально липшицевой на $E \subset \mathcal{R}$, если для любой точки множества E существует окрестность этой точки и положительное число L такие, что для любой пары различных точек $X, X' \in E$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$|u(X) - u(X')| \leqslant L|\operatorname{pr} X - \operatorname{pr} X'|.$$

Пусть A_p – класс положительных, локально интегрируемых функций w на плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [9], $p \in (1, +\infty)$,

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\, dx \Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\, dx \Big)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным квадратам $Q \subset \mathbb{R}^2$, $|Q|$ – площадь Q, dx – элемент площади, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Будем говорить, что функция $\omega : \mathcal{R} \to (0, +\infty)$ удовлетворяет на $\mathcal{R}$ A_p-условию Макенхаупта, если существует функция $w \in A_p$ такая, что $\omega(X) = w(\operatorname{pr} X)$ для всех $X \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_\infty$. В дальнейшем будем говорить, что вес w порождает вес ω. Пусть

$$\Delta = \{\Delta_j\} \text{ – триангуляция поверхности } \mathcal{R}(\text{ см. [7]}), \tag{1}$$

где Δ_j – треугольник на $\mathcal{R}$ для всех $j \geqslant 1$. Множество $E \subset \mathcal{R}$ назовем измеримым по Лебегу (σ-измеримым), если $E \cap \big(\Delta_j \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)\big)$ измеримо по Лебегу как плоское множество для всех $j \geqslant 1$. Лебегову площадь (меру) $\sigma(E)$ для такого множества E определим как

$$\sum_{j \geqslant 1} \mathcal{L}^2 \Big(E \cap \big(\Delta_j \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \big) \Big),$$

где $\mathcal{L}^2(\,\cdot\,)$ – двумерная мера Лебега на $\mathbb{R}^2$.

По определению, площадь $\sigma\big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$ множества $\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b$ и любого его подмножества равна нулю. Как обычно, на основе меры $\sigma(E)$ вводится понятие измеримой по Лебегу вещественной функции на σ-измеримом множестве из $\mathcal{R}$. Стандартным образом на метрическом пространстве $\big(\mathcal{R}, h(\,\cdot\,,\,\cdot\,)\big)$ определим борелевские множества и борелевские вещественные функции (см. [10, стр. 71, 81]).

Обозначим через $L^{p,w}(D)$, $\big(L^{p,\omega}(\mathcal{D})\big)$, где D – борелевское множество на $\mathbb{R}^2$ $\big($соответственно, $\mathcal{D}$ – борелевское множество на $\mathcal{R}\big)$ класс функций $f : D \to [-\infty, +\infty]$ $\big(f : \mathcal{D} \to [-\infty, +\infty]\big)$, для которых

$$\|f\|_{p,w}(D) = \Big(\int\limits_D |f|^p w\, dx \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \ \left(\|f\|_{p,\omega}(\mathcal{D}) = \Big(\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^p\, \omega\, d\sigma \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \right).$$

Через $L_+^{p,w}(D)$ $\big(L_+^{p,\omega}(\mathcal{D})\big)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0,+\infty]$ $\big(f : \mathcal{D} \to [0,+\infty]\big)$, где $f \in L^{p,w}(D)$ $\big(f \in L^{p,\omega}(\mathcal{D})\big)$.

Определим максимальную функцию для локально интегрируемой в $\mathbb{R}^2$ функции f соотношением

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

где $|B(x,r)|$ – площадь круга $B(x,r)$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^2$ радиуса $r > 0$. Известно [9, Theorem 5.10], что

$$\|Mf\|_{p,w}(\mathbb{R}^2) \leqslant \mathrm{const}\, \|f\|_{p,w}(\mathbb{R}^2).$$

Определим $L^1(D)$ как класс вещественных функций f на борелевском множестве $D \subset \mathbb{R}^2$, для которых

$$\|f\|_1(D) = \int\limits_D |f|\, dx < \infty.$$

Всюду ниже G – открытое множество на $\mathcal{R}$, для которого $\bar{G}$ – компакт на $\mathcal{R}$. Пусть $m \geqslant 2$, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ (соответственно, $E_2, \ldots, E_m$) – попарно непересекающиеся компакты на $\bar{G}$ (соответственно, на $\mathcal{R}$, $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$); $\delta_1, \ldots, \delta_m$ – попарно неравные вещественные числа. Тогда набор $\big(\delta_1 E_1, \ldots, \delta_m E_m, G\big) = \big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ (соответственно, набор $\Big(\big(\delta_1 E_1, \ldots, \delta_m E_m, \mathcal{R}\big) = \big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$, где $E_1 = \partial\mathcal{R} \neq \varnothing\Big)$ назовем конденсатором на G (соответственно, на $\mathcal{R}$).

Величину $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) = \inf\limits_u \int\limits_G |\nabla u|^p\, \omega\, d\sigma$ назовем (p,ω)-емкостью конденсатора $\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$. Здесь инфимум берется по всем функциям u, локально липшицевым в G, равным δ_i в некоторой окрестности множества E_i и постоянным в какой-нибудь окрестности каждой точки из $G \cap \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$ для $i = 1, \ldots, m$. Вводя, если надо, срезки вида $\max(\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \delta_i, u)$, $\min(\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \delta_i, u)$, будем считать, что функции u, рассматриваемые в определении $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$, удовлетворяют в G неравенству $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \delta_i \leqslant u \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \delta_i$. Класс таких допустимых функций для $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ обозначим через $\mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$.

Аналогичным образом на $\mathcal{R}$ определим (p,ω)-емкость $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ и класс $\mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ для конденсатора

$$\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big),$$

где $E_1 = \partial\mathcal{R} \neq \varnothing$. Здесь, по определению, для каждой функции $u \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ есть полиэдрическая область $Q \subset \mathcal{R}$, где $u = \delta_1$ на $\mathcal{R} \setminus \bar{Q}$.

Пусть γ – некоторая кривая в $\mathcal{R}$ и $X = X(t)$, $a < t < b$, – ее параметризация. Положим $T = \{t \in (a,b) : X(t) \notin \mathcal{R}_\infty\}$. Поскольку $\mathcal{R}_\infty$ – замкнутое множество в $\mathcal{R}$, то T состоит из не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов T_i, $i \geqslant 1$, и $X = X(t)$, $t \in T_i$, задает кривую $\gamma_i \subset \mathcal{R}$.

Если γ_i – локально спрямляемая кривая для всех $i \geqslant 1$, то кривую γ назовем локально спрямляемой. В этом случае для каждой кривой γ_i можно определить ее натуральную параметризацию $X = X_i(s)$, $s \in S_i$, $i \geqslant 1$. Сам набор $X = X_i(s)$, $s \in S_i, i \geqslant 1$, будем называть натуральной параметризацией кривой γ.

Для борелевской функции $\rho : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ положим

$$\int\limits_{\gamma} \rho\, ds = \sum_{i\geqslant 1} \int\limits_{\gamma_i} \rho\, ds = \sum_{i\geqslant 1} \int\limits_{S_i} \rho\big(X_i(s)\big)\, ds.$$

Здесь интеграл $\int\limits_{S_i} \rho\big(X_i(s)\big)\, ds$ понимается в смысле Лебега и допускается, что $S_i = (-\infty, +\infty)$ для некоторых $i \geqslant 1$ (подробнее см. [9, §22, с. 18]).

Кривую γ, $\gamma \subset \mathcal{R}$, назовем локально спрямляемой в $\mathcal{R}$, если она: 1) локально спрямляема; 2) для любого компакта $K \subset \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_\infty$ имеет место оценка $\int\limits_{\gamma\cap K} ds < \infty$. Заменяя в этом определении $\mathcal{R}$ на $\mathcal{D}$, аналогично определим понятие локально спрямляемой кривой на открытом множестве $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$.

Пусть E, F – два непересекающихся компакта в $\mathcal{R}$. Будем говорить, что кривая γ соединяет E и F если для ее параметризации $X = X(t)$, $a < t < b$, выполняются условия

$$\lim_{t\to a} h\big(X(t), E\big) = \lim_{t\to b} h\big(X(t), F\big) = 0. \tag{2}$$

При выполнении условия (2) будем говорить, что кривая γ ориентирована в направлении от E к F.

Пусть теперь $\{\Omega_k\}$ – последовательность полиэдрических областей, исчерпывающих поверхность $\mathcal{R}$, $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$, для которых выполняются условия

$$\bar{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1} \text{ и } \partial\Omega_k \cap \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big) = \varnothing. \tag{3}$$

Будем говорить, что кривая $\gamma \subset \mathcal{R}$ соединяет компакт $E \subset \mathcal{R}$ и $\partial\mathcal{R}$, если для ее параметризации $X = X(t)$, $a < t < b$, и $k \geqslant 1$ можно указать числа $t_k \in (a, b)$, $k \geqslant 1$, такие, что $X(t) \in \mathcal{R} \setminus \bar{\Omega}_k$ при всех $t \in (t_k, b)$ и $\lim\limits_{t\to a} h\big(X(t), E\big) = 0$. Здесь, по определению, считаем, что кривая γ ориентирована в направлении от E к $\partial\mathcal{R}$.

Для семейства Γ локально спрямляемых кривых γ в $\mathcal{R}$ определим (p,ω)-модуль семейства Γ как величину $m_{p,\omega}(\Gamma) = \inf\limits_{\rho} \int \rho^p\,\omega\,d\sigma$. Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_{\gamma} \rho\,ds \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых функций для $m_{p,\omega}(\Gamma)$ обозначим через $\operatorname{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$.

Сопоставим конденсатору $\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ конфигурацию

$$\alpha H(G) = \big(\alpha_{1,2} H_{1,2}(G), \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m}(G)\big)$$

(соответственно, $\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ конфигурацию

$$\alpha H(\mathcal{R}) = \big(\alpha_{1,2} H_{1,2}(\mathcal{R}), \ldots, \alpha_{m-1,m} H_{m-1,m}(\mathcal{R})),$$

где $H_{i,j}(G)$ – семейство всех локально спрямляемых кривых в $G_0 = G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$ $\Big(H_{i,j}(\mathcal{R})$ – семейство всех локально спрямляемых кривых в $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i, E_1 = \partial\mathcal{R} \neq \varnothing\Big)$, которые соединяют компакты E_i, E_j, и $\alpha_{ij} = |\delta_i - \delta_j|$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Определим (p,ω)-модуль конфигурации $\alpha H(G)$ или, иначе говоря, (p,ω)-модуль конденсатора $\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ как величину $m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) = \inf\limits_{\rho} \int\limits_{G_0} \rho^p\,\omega\,d\sigma$. Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \to [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_{\gamma} \rho\,ds \geqslant \alpha_{i,j}$ для всех $\gamma \in H_{i,j}(G)$ и $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Аналогично определим (p,ω)-модуль конфигурации $\alpha H(\mathcal{R})$ $\Big((p,\omega)$-модуль конденсатора $\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)\Big)$, где $E_1 = \partial\mathcal{R} \neq \varnothing$.

Пусть $\mathcal{D}$ – открытое множество на $\mathcal{R}$ такое, что $\mathcal{D} \cap \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big) = \varnothing$ и l – некоторая прямая на $\mathbb{R}^2$. Положим $l(\mathcal{R}) = \{W \in \mathcal{R} : \operatorname{pr} W \in l\}$. Будем говорить, что вещественная функция u, заданная на $\mathcal{D}$, абсолютно непрерывна на l, $l(\mathcal{R}) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$, если она абсолютно непрерывна на любом однолистном отрезке из $l(\mathcal{R}) \cap \mathcal{D}$. Здесь отметим, что любой связный компакт из $l(\mathcal{R})$ будет однолистным отрезком. Пусть для заданной выше функции u можно указать множества $e_1 \subset ox_2$, $e_2 \subset ox_1$,

$\mathcal{H}^1(e_1 \cup e_2) = 0$, такие, что на любой прямой $l_i \parallel ox_i$, $l_i \cap e_i = \varnothing$, $l_i(\mathcal{R}) \cap \mathcal{D} \neq \varnothing$, $i = 1, 2$, функция u абсолютно непрерывна. Тогда u назовем абсолютно непрерывной в $\mathcal{D}$ относительно координатных осей. В этом случае мы будем также говорить, что u абсолютно непрерывна на $\mathcal{H}^1$-почти всех координатных прямых в $\mathcal{D}$. Градиент этой функции $\nabla u(X)$ σ-почти везде определен в обычном смысле на $\mathcal{D}$, если точку $X \in D$ в достаточно малой окрестности этой точки отождествить с ее локальным параметром.

Пусть теперь $\mathcal{D}$ – произвольное открытое множество на $\mathcal{R}$. Вещественную функцию u, заданную в $\mathcal{D}$, назовем абсолютно непрерывной в $\mathcal{D}$ относительно координатных осей, если u обладает этим свойством в $\mathcal{D} \setminus \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$.

Обозначим через $ACL_{p,\omega}(\mathcal{D})$ класс всех вещественных функций u на $\mathcal{D}$, абсолютно непрерывных относительно координатных осей в $\mathcal{D}$ и таких, что первые производные $\frac{\partial u}{\partial x_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ (в классическом смысле) принадлежат $L^{p,\omega}(\mathcal{D})$. Положим для $u \in ACL_{p,\omega}(\mathcal{D})$

$$\|u\|_{L^1_{p,\omega}(\mathcal{D})} = \|u\|_{p,\omega}(\mathcal{D}) = \Big(\int\limits_{\mathcal{D}} |\nabla u|^p \, \omega \, d\sigma \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

§2. Вспомогательные утверждения и теорема о существовании экстремальной функции для емкости конденсатора

Здесь и ниже, $E_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i$, $G_0 = G \setminus E_0$, $G_0' = G_0 \setminus \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$, $G_0'' = G_0 \setminus \mathcal{R}_\infty$, $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i$, $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \setminus \big(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\big)$, $\mathcal{R}'' = \mathcal{R} \setminus \mathcal{R}_\infty$, $\mathcal{R}_0' = \mathcal{R}' \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i$, $\mathcal{R}_0'' = \mathcal{R}_0 \setminus \mathcal{R}_\infty$.

Пусть $f = (f_1, f_2)$ – вектор-функция на открытом множестве $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$. По определению, считаем, что $f \in L^{p,\omega}(\mathcal{D})$, если $f_1, f_2 \in L^{p,\omega}(\mathcal{D})$. Для таких функций установим неравенство Кларксона (для $\mathbb{R}^2$ см. [11]).

Лемма 1. *Пусть вектор-функции $f, g \in L^{p,\omega}(\mathcal{D})$, где $\mathcal{D} = G$ или $\mathcal{D} = \mathcal{R}$. Если $2 \leqslant p < \infty$, то*

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \Big|\frac{f+g}{2}\Big|^p \omega \, d\sigma + \int\limits_{\mathcal{D}} \Big|\frac{f-g}{2}\Big|^p \omega \, d\sigma \leqslant \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^p \, \omega \, d\sigma + \int\limits_{\mathcal{D}} |g|^p \, \omega \, d\sigma \Big). \quad (4)$$

Если $1 < p \leqslant 2$, *то*

$$\left(\int\limits_{\mathcal{D}} \left|\frac{f+g}{2}\right|^p \omega\, d\sigma\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\int\limits_{\mathcal{D}} \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \omega\, d\sigma\right)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \left(\frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^p \omega\, d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{D}} |g|^p \omega\, d\sigma\right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\Delta = \{\Delta_j\}$ – триангуляция поверхности $\mathcal{R}$ из (1). Тогда

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^p \omega\, d\sigma = \sum_{j\geqslant 1} \int\limits_{\mathcal{D}\cap\Delta_j} |f|^p \omega\, d\sigma.$$

Такие же соотношения запишем для остальных функций в интегралах из (4), (5). Поскольку $\mathcal{D}\cap\Delta_j$ – однолистное множество на $\mathcal{R}$, то $\mathcal{D}\cap\Delta_j$ отождествим с его проекцией $\operatorname{pr}(\mathcal{D}\cap\Delta_j)$, $j \geqslant 1$. Это и неравенство Кларксона в плоском случае для $p \in [2,+\infty)$ позволяют получить следующую оценку

$$\int\limits_{\mathcal{D}\cap\Delta_j} \left|\frac{f\,\omega^{\frac{1}{p}} + g\,\omega^{\frac{1}{p}}}{2}\right|^p d\sigma + \int\limits_{\mathcal{D}\cap\Delta_j} \left|\frac{f\,\omega^{\frac{1}{p}} - g\,\omega^{\frac{1}{p}}}{2}\right|^p d\sigma \leqslant \frac{1}{2}\Big(\int\limits_{\mathcal{D}\cap\Delta_j} \left|f\,\omega^{\frac{1}{p}}\right|^p d\sigma + \int\limits_{\mathcal{D}\cap\Delta_j} \left|g\,\omega^{\frac{1}{p}}\right|^p d\sigma\Big).$$

Проводя затем суммирование по всем $j \geqslant 1$, приходим к неравенству (4).

Пусть теперь $1 < p \leqslant 2$ и пусть $\mathcal{D} = G$. Поскольку $\bar{G}$ – компакт в $\mathcal{R}$, то только конечное число треугольников из набора Δ имеют непустое пересечение с множеством G. Не ограничивая общности, будем считать, что это треугольники $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ и пусть $\bar{G}\cap\mathcal{R}_\infty = \varnothing$. Тогда $\operatorname{pr}\bar{G}$ – ограниченное множество на $\mathbb{R}^2$ и, следовательно, существует открытый круг $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < r\}$, который содержит $\operatorname{pr}\bar{G}$. Отождествим $G\cap\Delta_j$ и $\operatorname{pr}(G\cap\Delta_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Пусть $d = \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k} d_j$, где $d_j = \sup\limits_{x',x''\in G\cap\Delta_j} |x'-x''|$. Построим попарно непересекающиеся открытые круги $B_1, \ldots, B_k$ в $\mathbb{R}^2 \setminus B(r)$ с центрами соответственно в точках $x^1, \ldots, x^k$ и радиусами $2d$. Выберем точку $y^j \in G\cap\Delta_j$ и положим $a^j = y^j - x^j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. На каждом множестве $G\cap\Delta_j$ зададим преобразование $y = L_j(x) = x + a^j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Тогда

$$\int\limits_{L_j(G\cap\Delta_j)} \left|f(y-a^j)\,\omega^{\frac{1}{p}}(y-a^j)\right|^p d\sigma. = \int\limits_{G\cap\Delta_j} \left|f(x)\,\omega^{\frac{1}{p}}(x)\right|^p d\sigma.$$

По построению, $L_1(G\cap\Delta_1),\ldots,L_k(G\cap\Delta_k)$ – попарно непересекающиеся множества на $\mathbb{R}^2$. На $\widetilde{G} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_j(G\cap\Delta_j)$ определим функцию $\widetilde{f}$ по правилу $\widetilde{f} = f(y-a^j)\,\omega^{\frac{1}{p}}(y-a^j)$ для $y \in L_j(G\cap\Delta_j)$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Аналогично определим на $\widetilde{G}$ функцию $\widetilde{g}$. Тогда в силу неравенства Кларксона для плоских множеств и $p \in (1,2]$ имеем оценку

$$\Bigl(\int\limits_{\widetilde{G}} \Bigl|\frac{\widetilde{f}+\widetilde{g}}{2}\Bigr|^p d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}} + \Bigl(\int\limits_{\widetilde{G}} \Bigl|\frac{\widetilde{f}-\widetilde{g}}{2}\Bigr|^p d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \Bigl(\frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{G}} |\widetilde{f}|^p\,d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{\widetilde{G}} |\widetilde{g}|^p\,d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{6}$$

Разбивая множество $\widetilde{G}$ на $L_j(G\cap\Delta_j)$, $j = 1\ldots k$, в (6) и применяя на $L_j(G\cap\Delta_j)$ обратное преобразование L_j^{-1}, в силу аддитивности интеграла Лебега перепишем (6) как неравенство (5). Предположим теперь, что множество $\bar{G}\cap\mathcal{R}_\infty \neq \varnothing$ и состоит, не теряя общности, из двух точек X^1 и X^2. Выберем окрестности $B(X^1,\delta)$, $B(X^2,\delta)$ этих точек на $\mathcal{R}$ такими, чтобы их замыкания не пересекались и в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега выполнялись условия

$$\Bigl|\int\limits_{G} |f|^p\,\omega\,d\sigma - \int\limits_{G(\delta)} |f|^p\,\omega\,d\sigma\Bigr| = o(1),\quad \Bigl|\int\limits_{G} |g|^p\,\omega\,d\sigma - \int\limits_{G(\delta)} |g|^p\,\omega\,d\sigma\Bigr| = o(1),$$

где $G(\delta) = G \setminus \bigl(\bar{B}(X^1,\delta)\cup\bar{B}(X^2,\delta)\bigr)$ и $o(1)\to 0$ при $\delta\to 0$. Тогда $\bar{G}(\delta)\cap\mathcal{R}_\infty = \varnothing$ и по доказанному выше

$$\Bigl(\int\limits_{G(\delta)} \Bigl|\frac{f+g}{2}\Bigr|^p \omega\,d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}} + \Bigl(\int\limits_{G(\delta)} \Bigl|\frac{f-g}{2}\Bigr|^p \omega\,d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}} \leqslant \Bigl(\frac{1}{2}\int\limits_{G(\delta)} |f|^p\,\omega\,d\sigma + \frac{1}{2}\int\limits_{G(\delta)} |g|^p\,\omega\,d\sigma\Bigr)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Переходя здесь к пределу при $\delta \to 0$, получим неравенство (5) для $\mathcal{D} = G$.

Пусть теперь $\{\Omega_k\}$ – исчерпание поверхности $\mathcal{R}$ из (3) и положим в (5) $\mathcal{D} = \Omega_k$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, установим справедливость неравенства (5) и для $\mathcal{D} = \mathcal{R}$. $\square$

Аналогично лемме 1 можно получить неравенство Гельдера и неравенство Минковского.

Лемма 2. *Если $f, g \in L^{p,\omega}(\mathcal{D})$, то*

$$\int\limits_{\mathcal{D}} |f| \cdot |g| \, d\sigma \leqslant \Big(\int\limits_{\mathcal{D}} |f|^p \, \omega \, d\sigma \Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_{\mathcal{D}} |g|^q \, \omega^{1-q} \, d\sigma \Big)^{\frac{1}{q}},$$

$$\|f + g\|_{p,\omega}(\mathcal{D}) \leqslant \|f\|_{p,\omega}(\mathcal{D}) + \|g\|_{p,\omega}(\mathcal{D}).$$

Следуя Фюгледе [12], семейство Γ локально спрямляемых кривых γ в $\mathcal{R}$ назовем (p,ω)-исключительным $\big((p,\omega)$-искл.$\big)$, если $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$.

Лемма 3. *Семейство Γ является (p,ω)-искл. тогда и только тогда, когда существует функция $\rho \in L_+^{p,\omega}(\mathcal{R})$ такая, что $\int\limits_{\gamma} \rho \, ds = \infty$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$.*

Доказательство. Если существует такая функция $\rho \in L_+^{p,\omega}(\mathcal{R})$, то $\frac{\rho}{N} \in \mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$ для любого $N > 0$. Отсюда

$$m_{p,\omega}(\Gamma) \leqslant \frac{1}{N^p} \int\limits_{\mathcal{R}} \rho^p \, \omega \, d\sigma \to 0 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Это дает $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$.

Обратно, допустим, что $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$. Выберем последовательность $\{\rho_n\}$ борелевских функций $\rho_n \in \mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$ таких, что $\int\limits_{\mathcal{R}} \rho_n^p \, \omega \, d\sigma < 4^{-n}$. Полагая $\rho = \big(\sum\limits_{n\geqslant 1} 2^n \rho_n^p \big)^{\frac{1}{p}}$, имеем по теореме о монотонной сходимости (см. [13, глава 1, теорема 2])

$$\int\limits_{\mathcal{R}} \rho^p \, \omega \, d\sigma = \sum_{n\geqslant 1} 2^n \int\limits_{\mathcal{R}} \rho_n^p \, \omega \, d\sigma < \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} < \infty.$$

Следовательно, $\rho \in L_+^{p,\omega}(\mathcal{R})$. С другой стороны,

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds \geqslant 2^{\frac{n}{p}} \int\limits_\gamma \rho_n\, ds \geqslant 2^{\frac{n}{p}} \to \infty$$

при $n \to \infty$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. Отсюда $\int\limits_\gamma \rho\, ds = \infty$ для всех $\gamma \in \Gamma$. $\square$

Применяя рассуждения из [12, теорема 1.3], получим следующие два утверждения.

Лемма 4. *Пусть* Γ_n *– семейство локально спрямляемых кривых на открытом множестве* $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ *для всех* $n \geqslant 1$. *Тогда* $m_{p,\omega}\big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \Gamma_n\big) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant 1} m_{p,\omega}(\Gamma_n)$. *В частности, если* Γ_n *–* (p,ω)*-искл. для всех* $n \geqslant 1$, *то* Γ *–* (p,ω)*-искл.*

Лемма 5. *Пусть* $f = (f_1, f_2)$, $f_n = (f_{1n}, f_{2n})$ *– вектор-функции из* $L^{p,\omega}(\mathcal{D})$ *и* f_1, f_2, f_{1n}, f_{2n} *– борелевские функции на открытом множестве* $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}'$ *для всех* $n \geqslant 1$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathcal{D}} |f_n - f|^p\, \omega\, d\sigma = 0$, *то существует подпоследовательность* $\{n_k\}$ *и* (p,ω)*-искл. семейство* Γ' *локально спрямляемых кривых в* $\mathcal{D}$ *такие, что* $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_\gamma |f_{n_k} - f|^p\, ds = 0$ *для любой локально спрямляемой кривой* γ *в* $\mathcal{D}$ *и* $\gamma \notin \Gamma'$.

Лемма 6. *Имеют место неравенства*

$$m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) < \infty, \quad m_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big) < \infty,$$
$$C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) < \infty, \quad C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big) < \infty.$$

Доказательство. Пусть $u \in \operatorname{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$. Тогда по теореме Радемахера (см. [10, теорема 3.16]), функция u σ-почти везде дифференцируема на G_0'. В точках дифференцируемости функции u это дает равенство между борелевской в G_0' функцией $L(X,u) = \lim\limits_{h\to 0} \left|\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right|$ и $\big|\nabla u(X)\big|$, где $x = \operatorname{pr} X$, $x + h = \operatorname{pr} \widetilde{X}$, $s(X, \widetilde{X}) = |h|$. Ниже полагаем, что $\big|\nabla u(X)\big| = L(X,u)$ в тех точках G_0', где u не дифференцируема.

Положим $L(X,u)$ и $\big|\nabla u(X)\big|$ равными нулю во всех точках из $G_0 \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$. Тогда $L(X,u)$ и $\big|\nabla u(X)\big|$ в силу принадлежности u классу $\operatorname{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ будут равными нулю в некоторой окрестности каждой точки из $G_0 \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$, значит, борелевскими функциями на G_0.

Это и тот факт, что $u\big(X(s)\big)$ абсолютно непрерывна на каждом отрезке из S, где $X(s)$, $s \in S$, – натуральная параметризация кривой $\gamma \in H_{ij}(G)$, дает оценку

$$\alpha_{ij} = \Big| \int\limits_\gamma \frac{du}{ds}\, ds \Big| \leqslant \int\limits_\gamma |\nabla u|\, ds$$

для всех $\gamma \in H_{ij}(G)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Другими словами, $|\nabla u| \in \mathrm{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big)$. Тем самым, неравенство $m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) < \infty$ будет следовать из оценки $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) < \infty$. Чтобы ее установить, для компактов $E_1, \ldots, E_m$ образуем окрестности $O(E_1, \delta), \ldots, O(E_m, \delta)$, замыкания которых попарно не пересекаются и не содержат точек из $(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \setminus \big(E_0 \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)\big)$. Далее образуем компакты $F_i = \bar{O}(E_i, \frac{\delta}{2}) \setminus O(E_i, \frac{\delta}{4})$ в $\mathcal{R}'$, $i = \overline{1, m}$. На гладком многообразии $\mathcal{R}'$ зададим функцию $u_i \in C^\infty(\mathcal{R}')$, которая равна δ_i на F_i, $\operatorname{supp} u \subset O(E_i, \delta)$ (см. [14, стр. 236, A.5]).

Переопределим u_i на окрестности $O(E_i, \frac{\delta}{4})$, положив ее равной δ_i. Кроме того, положим $u_i = 0$ на $\mathcal{R} \setminus O(E_i, \delta)$ Тогда $u = u_1 + \ldots + u_m \in C^\infty(\mathcal{R}')$, $u \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ и

$$\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p\, \omega\, d\sigma \leqslant \sum_{i=1}^m \int\limits_{O(E_i,\delta) \setminus \bar{O}(E_i, \frac{\delta}{2})} |\nabla u_i|^p\, \omega\, d\sigma < \infty.$$

Здесь учитываем, что ω – локально интегрируемая функция на $\mathcal{R}'$ и $|\nabla u_i|$ – ограниченная, непрерывная функция на $\mathcal{R}'$.

Следовательно,

$$C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) \leqslant \int\limits_{G_0} |\nabla u|^p\, \omega\, d\sigma < \infty. \tag{7}$$

Рассмотрим теперь $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ и $m_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big)$, где $E_1 = \partial\mathcal{R} \neq \varnothing$ и $\alpha H(\mathcal{R})$ – конфигурация, соответствующая конденсатору $\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$. Как и выше, убедимся, что $|\nabla u|$, где $u \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$, принадлежит классу $\mathrm{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big)$. Поэтому для справедливости леммы 6 достаточно установить, что $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big) < \infty$. Для этого в приведенных рассуждениях в качестве G возьмем полиэдрическую область Ω_k из исчерпания (3), для которого $E_2 \cup \ldots \cup E_m \subset \Omega_1$.

Затем образуем конденсатор $\mathcal{K} = (\delta_1\partial\Omega_k, \delta_2 E_2, \ldots, \delta_m E_m, \Omega_k)$. Как и выше, построим $\widetilde{u}(X) \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\,\mathcal{K}$, $|\nabla\widetilde{u}(X)| \in L_+^{p,\omega}(\Omega_k)$, $|\nabla\widetilde{u}(X)| \in \mathrm{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(\Omega_k)\big)$, где $\alpha H(\Omega_k)$ – конфигурация, соответствующая конденсатору $\mathcal{K}$. Положим $\widetilde{u}(X)$, равной δ_1 на $\mathcal{R}\setminus\Omega_k$. Тогда $\widetilde{u}(X) \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}(\delta_1\partial\mathcal{R}, \delta_2 E_2, \ldots, \delta_m E_m, \mathcal{R})$, $|\nabla\widetilde{u}(X)| \in \mathrm{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big)$ и

$$C_{p,\omega}(\delta_1\partial\mathcal{R}, \delta_2 E_2, \ldots, \delta_m E_m, \mathcal{R}) \leqslant \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\widetilde{u}(X)|^p\,\omega\,d\sigma < \infty.$$

Это и (7) завершают доказательство леммы 6. $\square$

Следствие 1.

$$\begin{gathered} m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) \leqslant C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big), \\ m_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big) \leqslant C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big). \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть h_0 – некоторая функция из $L_+^{p,\omega}(\mathcal{D})$ в области $\mathcal{D}\subset\mathcal{R}'$. Назовем две точки $X, Y \in \mathcal{D}$ h_0-эквивалентными (см. [9]), если существует спрямляемая кривая $\gamma\subset\mathcal{D}$, где $X, Y\in\gamma$, для которой $\int\limits_\gamma h_0\,ds < \infty$. Тогда область $\mathcal{D}$ разбивается на h_0-классы эквивалентности. Если для некоторой точки $X\in\mathcal{D}$ не существует h_0-эквивалентной точки в $\mathcal{D}$, то, по определению, h_0-класс эквивалентности в $\mathcal{D}$, содержащий эту точку, состоит из единственной точки X.

Лемма 7. *Пусть $\mathcal{D}$ – область в $\mathcal{R}'$. Для $h_0 \in L_+^{p,\omega}(\mathcal{D})$ существует h_0-класс эквивалентности $H_0(\mathcal{D})$, который содержит σ-почти все точки из $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Рассмотрим координатный квадрат $K\subset\mathcal{D}$. Отождествим K и $\operatorname{pr} K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1, a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\}$. В силу неравенства Гельдера,

$$\int\limits_K h_0\,dx \leqslant \Big(\int\limits_K h_0^p\,\omega\,dx\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_K \omega^{1-q}\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Отсюда по теореме Фубини для $\mathcal{H}^1$-почти всех $x_1\in[a_1, b_1]$

$$\int\limits_{a_2}^{b_2} h_0\,dx_2 = \int\limits_{l_1(x_1)} h_0\,ds < \infty, \text{ где } l_1(x_1) = \big\{(x_1, x_2) \in K : a_2 \leqslant x_2 \leqslant b_2\big\}.$$

Аналогично, для $\mathcal{H}^1$-почти всех $x_2 \in [a_2, b_2]$

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} h_0\,dx_1 = \int\limits_{l_2(x_2)} h_0\,ds < \infty, \text{ где } l_2(x_2) = \big\{(x_1, x_2) \in K : a_1 \leqslant x_1 \leqslant b_1\big\}.$$

Другими словами, для $\mathcal{H}^1$-почти всех отрезков γ, соединяющих противоположные стороны квадрата K и параллельных координатным осям, справедлива оценка $\int\limits_\gamma h_0\,ds < \infty$.

Отсюда следует, что любые две точки указанных отрезков можно соединить в K ломаной γ, $\int\limits_\gamma h_0\,ds < \infty$, с конечным числом звеньев, параллельных координатным осям. Иначе говоря, h_0-класс эквивалентности $H_0(K)$, порожденный точками этих отрезков, содержит σ-почти все точки из K.

Пусть K', $K' \subset \mathcal{D}$, – еще один координатный квадрат. Образуем для него, как и выше, соответствующий h_0-класс эквивалентности $H_0(K')$.

Нетрудно заметить, что существует набор квадратов $K_j \subset \mathcal{D}$, $1 \leqslant j \leqslant j_1$, такой, что $\operatorname{int} K_j \cap \operatorname{int} K_{j+1} \neq \varnothing$ для $1 \leqslant j \leqslant j_1 - 1$, где $K = K_1$, $K' = K_{j_1}$. Образуем, как и выше, соответствующий h_0-класс эквивалентности $H_0(K_j)$, $1 < j < j_1$. В силу условия $\sigma(K_j \cap K_{j+1}) > 0$, $H_0(K_j) \cap H_0(K_{j+1}) \neq \varnothing$ для $1 \leqslant j \leqslant j_1 - 1$. Следовательно, все $H_0(K_j)$, $1 \leqslant j \leqslant j_1$, содержатся в одном h_0-классе эквивалентности $H_0(\mathcal{D})$ из области $\mathcal{D}$. Отсюда, покрывая область $\mathcal{D}$ последовательностью открытых координатных квадратов Π_j, $j \geqslant 1$, $\bar{\Pi}_j \subset \mathcal{D}$, получим, что σ-почти все точки из $\mathcal{D}$ содержатся в классе эквивалентности $H_0(\mathcal{D})$. $\square$

Следствие 2. *Для $\mathcal{H}^1$-почти всех координатных прямых l, $l \cap \operatorname{pr} \mathcal{D} \neq \varnothing$, точки любого отрезка $e \subset \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}'$, $\operatorname{pr} e \subset l$, принадлежат классу $H_0(\mathcal{D})$.*

Ниже класс $H_0(\mathcal{D})$ из леммы 7 будем называть основным h_0-классом эквивалентности в $\mathcal{D}$.

Пусть $u_0 \in ACL_{p,\omega}(G_0)$ $\big($соответственно $u_0 \in ACL_{p,\omega}(\mathcal{R}_0)\big)$, $u_0 = \lim\limits_{j\to\infty} u_j$ σ-почти везде в G_0 $\big(\sigma$-почти везде в $\mathcal{R}_0\big)$ и

$$\lim_{j\to\infty} \int\limits_{G_0} |\nabla u_j - \nabla u_0|^p\,\omega\,d\sigma = 0 \quad \Big(\lim_{j\to\infty} \int\limits_{\mathcal{R}_0} |\nabla u_j - \nabla u_0|^p\,\omega\,d\sigma = 0\Big)$$

для некоторой последовательности функций $u_j \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\left(\{\delta_i E_i\}, G\right)$ $\Big(u_j \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\left(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\right)\Big)$,

$$\int\limits_{G_0} |\nabla u_0|^p \,\omega\, d\sigma = C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)\Big(\int\limits_{\mathcal{R}_0} |\nabla u_0|^p \,\omega\, d\sigma = C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)\Big).$$

Тогда u_0 назовем экстремальной функцией для емкости $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ $\Big($соответственно, для $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)\Big)$.

Теорема 1. *Для $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$, $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ существуют экстремальные функции.*

Доказательство. Проведем доказательство только для емкости $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$, для $C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, \mathcal{R}\big)$ оно проводится аналогично. В силу леммы 6 существует последовательнось $v_k \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\left(\{\delta_i E_i\}, G\right)$, $k \geqslant 1$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_G |\nabla v_k|^p \,\omega\, d\sigma = C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$. Ввиду неравенства Кларксона (см. лемму 1) и свойства $\frac{v_k + v_{k'}}{2} \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\left(\{\delta_i E_i\}, G\right)$ для $k, k' \geqslant 1$ из известных рассуждений (см. [15, Lemma 3.9.]) сразу следует, что $\{\nabla v_k\}$ – фундаментальная последовательность в $L^{p,\omega}(G_0)$. По определению, ∇v_k принадлежит классу $L^{p,\omega}\big(B(X,\delta)\big)$ для любого однолистного круга $B(X,\delta)$, который отождествим с кругом $B(x,\delta)$, где $\operatorname{pr} X = x \in \mathbb{R}^2$. Поскольку $L^{p,\omega}\big(B(X,\delta)\big)$ – полное пространство в $\|\cdot\|_{p,\omega}\big(B(X,\delta)\big)$, то существует подпоследовательность ∇v_{k_l} такая, что $\lim\limits_{l\to\infty} \nabla v_{k_l} = g$ поточечно σ-почти везде на $B(X,\delta)$ и $\lim\limits_{l\to\infty} \nabla v_{k_l} = g$ в $L^{p,\omega}\big(B(X,\delta)\big)$ на $B(X,\delta)$.

Отсюда, покрывая G_0' последовательностью однолистных открытых кругов и применяя затем диагональный метод Кантора, будем считать, не ограничивая общности, что $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla v_k = g$ поточечно σ-почти везде на G_0' и $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla v_k = g$ в $L^{p,\omega}(G_0')$. Это дает $\lim\limits_{k\to\infty} \nabla v_k = g$ в $L^{p,\omega}(G_0)$.

Так как v_k – борелевская функция на G_0, то отождествляя однолистную окрестность $B(X,\delta)$, точки $X \in G_0'$ с ее проекцией $B(x,\delta)$, получим, что (см. [13, теорема 3.1.2])

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overline{v}_k(X)}{\partial x_1}=\frac{\partial\overline{v}_k(x)}{\partial x_1}&=\lim_{\Delta x_1\to 0}\sup\frac{v_k(x_1+\Delta x_1,x_2)-v_k(x_1,x_2)}{\Delta x_1}\\&=\lim_{n\to\infty}\sup_{0<|\Delta x_1|<\frac{1}{n}}\frac{v_k(x_1+\Delta x_1,x_2)-v_k(x_1,x_2)}{\Delta x_1},\\ \frac{\partial\overline{v}_k(X)}{\partial x_2}=\frac{\partial\overline{v}_k(x)}{\partial x_2}&=\lim_{\Delta x_2\to 0}\sup\frac{v_k(x_1,x_2+\Delta x_2)-v_k(x_1,x_2)}{\Delta x_2}\\&=\lim_{n\to\infty}\sup_{0<|\Delta x_2|<\frac{1}{n}}\frac{v_k(x_1,x_2+\Delta x_2)-v_k(x_1,x_2)}{\Delta x_2}\end{aligned}$$

– борелевская функция для всех $k\geqslant 1$ на G_0'. С другой стороны, по теореме Радемахера (см. [10]) функция v_k σ-почти везде дифференцируема на G_0', $k\geqslant 1$. Следовательно, $\frac{\partial\overline{v}_k}{\partial x_j}=\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ σ-почти везде на G_0' для $k\geqslant 1$, $j=1,2$. Поэтому, доопределив частную производную $\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ как $\frac{\partial\overline{v}_k}{\partial x_j}$ в тех точках, где она не существует, будем считать $\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$, ∇v_k борелевскими функциями на G_0'.

Аналогично, полагая затем $g_j=\lim\limits_{k\to\infty}\sup\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ в тех точках, где $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ не существует, $j=1,2$, будем считать, что $g=(g_1,g_2)$ – борелевская вектор-функция на G_0'. □

В силу леммы 5, где положим $\mathcal{D}=G_0'$, существует подпоследовательность $\{\nabla v_{k_n}-g\}$ и (p,ω)-искл. семейство кривых Γ' в G_0' такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_\gamma|\nabla v_{k_n}-g|\,ds=0$ для всех локально спрямляемых кривых γ в G_0', $\gamma\notin\Gamma'$.

Не ограничивая общности, будем считать, что подпоследовательность $\{\nabla v_{k_n}-g\}$ совпадает с $\{\nabla v_k-g\}$.

Пусть $U_k=\{X\in G_0' : v_k$ не дифференцируема в точке $X\}$ и $\Gamma_k=\{\gamma:\gamma$ – локально спрямляемая кривая в G_0', для которой $s(\gamma\cap U_k)>0\}$. Поскольку $\sigma(U_k)=0$, то по теореме Фюгледе (см. [12, Theorem 3]) Γ_k – (p,ω)-искл. для всех $k\geqslant 1$. Пусть, кроме того, $\Gamma''=\{\gamma:\gamma$ – локально спрямляемая кривая в G_0', для которой $\int\limits_\gamma|g|\,ds=\infty\}$. Положим

$$\widetilde{\Gamma}=\Gamma'\cup\Gamma''\cup\big(\bigcup_k\Gamma_k\big).$$

В силу лемм 4, 5, семейство $\widetilde{\Gamma}$ – (p,ω)-искл. и существует функция $h_0 \in L_+^{p,\omega}(G_0')$ такая, что $\int\limits_\gamma h_0\,ds = \infty$ для всех $\gamma \in \widetilde{\Gamma}$. Пусть $G_0' = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} G_0'(n)$, где $G_0'(1), G_0'(2), \dots$ – попарно непересекающиеся компоненты связности множества G_0'.

Ввиду леммы 7, для каждой области $G_0'(n)$ существует свой основной h_0-класс эквивалентности $H_0(n)$, которому принадлежит σ-почти все точки из $G_0'(n)$. Фиксируем в $H_0(n)$ точку $A(n)$ и, не ограничивая общности, в силу ограниченности $\{v_k(A(n))\}$ будем считать, что $\lim\limits_{k\to\infty} v_k(A(n))$ существует. Этот предел обозначим через $v_0(A(n))$. Положим для всех $X \in G_0' \cap H_0(n)$

$$v_0(X) = \lim_{k\to\infty}\left(v_k(A_n) + \int\limits_\gamma\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_k}{\partial x_2}\,dx_2\Big)\right), \tag{9}$$

где γ – любая спрямляемая кривая в $G_0'(n)$, которая соединяет точку $A(n)$ с точкой X, $\int\limits_\gamma h_0\,ds < \infty$. Здесь, по определению,

$$\int\limits_\gamma\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial v_k}{\partial x_2}\,dx_2\Big) = \int\limits_0^{s(\gamma)}\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_1}\,\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial v_k}{\partial x_2}\,\frac{dx_2}{ds}\Big)\,ds$$

$$= \int\limits_0^{s(\gamma)} \frac{dv_k\big(x_1(s), x_2(s)\big)}{ds}\,ds = v_k\big(X\big) - v_k\big(A(n)\big),$$

где $x = x(s) = \big(x_1(s), x_2(s)\big)$, $s \in [0, s(\gamma)]$, – натуральная параметризация кривой γ, записанная в терминах локального параметра. Кривая γ ориентирована от $A(n)$ к X, и определенный интеграл рассматривается в смысле Лебега.

В силу выбора кривой γ, выполняются условия

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_\gamma |\nabla v_k - g|\,ds = 0, \ \int\limits_\gamma |g|\,ds < \infty.$$

Это дает существование и ограниченность интеграла

$$\int\limits_\gamma\Big(g_1\,dx_1 + g_2\,dx_2\Big) = \int\limits_0^{s(\gamma)}\Big(g_1\,\frac{dx_1}{ds} + g_2\,\frac{dx_2}{ds}\Big)\,ds,$$

и равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma}\Big(\frac{\partial v_k}{\partial x_1}\,dx_1+\frac{\partial v_k}{\partial x_2}\,dx_2\Big)=\int\limits_{\gamma}(g_1\,dx_1+g_2\,dx_2).$$

Тогда (9) можно переписать в виде

$$v_0(X)=v_0\big(A(n)\big)+\int\limits_{\gamma}(g_1\,dx_1+g_2\,dx_2)=\lim_{k\to\infty}v_k(X). \tag{10}$$

Варьируя $n \geqslant 1$, определим $v_0(X)$ по формуле (10) σ-почти везде в G_0', значит, в G_0.

Покажем, что $v_0(X)\in ACL_{p,\omega}(G_0)$ и $\nabla v_0(X)=g(X)$ σ-почти везде на G_0. Выберем однолистный квадрат $K=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2: a_1\leqslant x_1\leqslant b_1, a_2\leqslant x_2\leqslant b_2\}$, $K\subset G_0'$, таким же, как в доказательстве леммы 7. Для $x_1\in[a_1,b_1]$ положим $l_1(x_1)=\{(x_1,x_2)\in K: a_2\leqslant x_2\leqslant b_2\}$, для $x_2\in[a_2,b_2]$ положим $l_2(x_2)=\{(x_1,x_2)\in K: a_1\leqslant x_1\leqslant b_1\}$.

В силу выбора h_0, K можно указать промежутки $e_1\subset[a_1,b_1]$, $e_2\subset[a_2,b_2]$, $\mathcal{H}^1(e_1)=\mathcal{H}^1(e_2)=0$, такие, что для всех $x_1\in[a_1,b_1]\setminus e_1$, $x_2\in[a_2,b_2]\setminus e_2$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\int\limits_{l_1(x_1)}\Big|\frac{\partial v_k}{\partial x_2}-g_2\Big|\,ds=0=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{a_2}^{b_2}\Big|\frac{\partial v_k}{\partial x_2}-g_2\Big|\,dx_2,\\
&\lim_{k\to\infty}\int\limits_{l_2(x_2)}\Big|\frac{\partial v_k}{\partial x_1}-g_1\Big|\,ds=0=\lim_{k\to\infty}\int\limits_{a_1}^{b_1}\Big|\frac{\partial v_k}{\partial x_1}-g_1\Big|\,dx_1.
\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}v_k(x_1,a_2)=v_0(x_1,a_2)\ \text{на}\ [a_1,b_1]\setminus e_1,\\
&\lim_{k\to\infty}v_k(a_1,x_2)=v_0(a_1,x_2)\ \text{на}\ [a_2,b_2]\setminus e_2.
\end{aligned} \tag{12}$$

Тогда из (11)–(12) следует, что на $l_1(x_1)$ для всех $x_1\in[a_1,b_1]\setminus e_1$ справедливы равенства

$$v_0(x_1,x_2) = v_0(x_1,a_2) + \int\limits_{a_2}^{x_2} g_2(x_1,t)\,dt$$
$$= \lim_{k\to\infty} v_k(x_1,a_2) + \lim_{k\to\infty} \int\limits_{a_2}^{x_2} \frac{\partial v_k(x_1,t)}{\partial t}\,dt.$$

Последнее означает, что функция $v_0(x_1,x_2)$ абсолютно непрерывна на $l_1(x_1)$ при всех $x_1 \in [a_1,b_1]\setminus e_1$ и для этих x_1 $\frac{\partial v_0}{\partial x_2} = g_2(x_1,x_2)$ $\mathcal{H}^1$-почти везде на $l_1(x_1)$. Аналогично установим, что $v_0(x_1,x_2)$ абсолютно непрерывна на $l_2(x_2)$ при всех $x_2 \in [a_2,b_2]\setminus e_2$ и для этих x_2 $\frac{\partial v_0}{\partial x_1} = g_1(x_1,x_2)$ $\mathcal{H}^1$-почти везде на $l_2(x_2)$.

Тем самым, $v_0 \in ACL_{p,\omega}(\operatorname{int} K)$. Покрывая G_0' счетным числом открытых квадратов K_i, $i \geqslant 1$, $\bar{K}_i \subset G_0'$, и заменяя в приведенных выше рассуждениях K на $\bar{K}_i$, $i \geqslant 1$, получим нужное свойство $v_0 \in ACL_{p,\omega}(G_0)$.

Далее нам потребуются следующие определения. Для каждой точки $X \in \mathcal{R}'$ обозначим через $h(X,\partial\mathcal{R}')$ расстояние от X до $\partial\mathcal{R}'$, которое определим как инфимум длин $h(\gamma)$ кривых $\gamma \subset \mathcal{R}'$, соединяющих точку X и достижимые граничные точки области $\mathcal{R}'$. Подобным образом определим в G_0' расстояние $h(X,\partial G_0')$. Кроме того, положим для $X \in \mathcal{R}'$ $R(X,\mathcal{R}') = \sup\{R : B(X,R)$ – однолистный круг в $\mathcal{R}'\}$. Аналогично определим $R(X,G_0')$ для $X \in G_0'$.

В дальнейшем запись $h(X,\partial G_0')$ в терминах локального параметра будем обозначать $h(x,\partial G_0')$.

Лемма 8. *Вещественные функции $h(X,\partial\mathcal{R}')$, $h(X,\partial G_0')$ положительны, ограничены сверху и локально липшицевы в своих областях определения.*

Доказательство. Сначала установим, что для каждой точки $X^0 \in \mathcal{R}'$ всегда $h(X^0,\partial\mathcal{R}') \leqslant \pi$. Действительно, если $R(X^0,\mathcal{R}') < \infty$, то это означает, что есть точка X^1, $|\operatorname{pr} X^1 - \operatorname{pr} X^0| = R(X^0,\mathcal{R}')$ и X^1 принадлежит $\partial\mathcal{R}$ либо $\mathcal{R}_b \setminus \mathcal{R}_\infty$.

Поэтому

$$h(X^0,\partial\mathcal{R}') \leqslant \int\limits_{[x^0,x^1]} dh \leqslant \pi, \quad \text{где} \;\; x^0 = \operatorname{pr} X^0, x^1 = \operatorname{pr} X^1.$$

Если $R(X^0, \mathcal{R}') = \infty$, то это означает, что одной из склеиваемых областей в определении $\mathcal{R}$ будет $\mathbb{R}^2$ или $\bar{\mathbb{R}}^2$. Тогда $\mathcal{R}$ соответственно есть $\mathbb{R}^2$ либо $\bar{\mathbb{R}}^2$, а $\mathcal{R}' = \mathbb{R}^2$ и бесконечно удаленная точка – единственная граничная точка $\mathcal{R}'$. В этом случае

$$h(X^0, \partial\mathcal{R}') \leqslant \int\limits_{l_0} dh \leqslant \pi,$$

где l_0 – луч $[x_0, \infty)$. В силу полученных выше оценок и очевидного неравенства

$$h(X, \partial G_0') \leqslant h(X, \partial\mathcal{R}'), \text{ где } X \in G_0',$$

получим $h(X, \partial G_0') \leqslant \pi$ в ее области определения.

Положительность рассматриваемых функций в соответствующих областях очевидна.

Установим теперь, что $g(X) = h(X, \partial\mathcal{R}')$ удовлетворяет локально условию Липшица в $\mathcal{R}'$. Возьмем некоторую точку $X^0 \in \mathcal{R}'$ и покажем, что функция $g(X)$ удовлетворяет условию Липшица на $B = B\big(X^0, R(X^0, \mathcal{R}')\big)$. Пусть X', X'' – две различные точки из B. Если $g(X') = g(X'')$, то неравенство $|g(X') - g(X'')| \leqslant |x' - x''|$, где $x' = \operatorname{pr} X'$, $x'' = \operatorname{pr} X''$, очевидно.

Пусть, например, $g(X'') > g(X')$. Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем такую кривую $\gamma_\varepsilon \subset \mathcal{R}'$, соединяющую точку X' с множеством $\partial\mathcal{R}'$, что ее длина $h(\gamma_\varepsilon)$ удовлетворяет условию

$$g(X') \leqslant h(\gamma_\varepsilon) = g(X') + o(1) < g(X''),$$

где $0 \leqslant o(1) < \varepsilon$. Дополним кривую γ_ε отрезком $[X', X'']$ и полученную кривую обозначим через $\widetilde{\gamma}_\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |g(X') - g(X'')| &= g(X'') - g(X') \leqslant h(\widetilde{\gamma}_\varepsilon) - g(X') \\ &\leqslant h(\widetilde{\gamma}_\varepsilon) - h(\gamma_\varepsilon) + o(1) = \int\limits_{[x', x'']} \frac{ds}{1 + |x|^2} + o(1) \leqslant |x'' - x'| + o(1). \end{aligned}$$

Здесь $x' = \operatorname{pr} X'$, $x'' = \operatorname{pr} X''$. Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим оценку

$$|g(X'') - g(X')| \leqslant |\operatorname{pr} X'' - \operatorname{pr} X'|. \tag{13}$$

Ввиду произвола в выборе $X^0 \in \mathcal{R}'$ оценка (13) дает требуемое условие Липшица для $g(X) = h(X, \partial\mathcal{R}')$ на $\mathcal{R}'$.

Аналогичными рассуждениями покажем, что неравенство

$$|h(X'', \partial G_0') - h(X', \partial G_0')| \leqslant |\operatorname{pr} X'' - \operatorname{pr} X'| \tag{14}$$

локально выполняется в области определения функции $h(X, \partial G_0')$. $\square$

Замечание 1. По определению, $R(X, G_0') \leqslant R(X, \mathcal{R}')$ для любого $X \in G_0'$. Поэтому если $R(X, G_0') = \infty$ для некоторой точки $X \in G_0'$, то из рассуждений в доказательстве леммы 8 следует, что $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$ либо $\mathcal{R} = \bar{\mathbb{R}}^2$. Значит, $G_0' \subset \mathbb{R}^2$ и поскольку $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $\partial G_0'$ содержит конечные граничные точки из $\mathbb{R}^2$. Это дает противоречие $R(X, G_0') < \infty$.

В силу (14), мы уточним результат леммы 8 следующим образом.

Следствие 3. *Функция $h(X, \partial G_0')$ удовлетворяет в своей области определения локально условию Липшица с постоянной, не превосходящей единицы. Кроме того,*

$$h(X, \partial G_0') \leqslant R(X, G_0') < \infty \ \text{ и } \ h(X, \partial G_0') \leqslant \pi \ \text{ в } \ G_0'.$$

Ниже полагаем $\varepsilon \in (0, 1]$, $0 < |\zeta| \leqslant 1$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \in \mathbb{R}^2$. Зададим отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ на G_0' по правилу: каждой точке $X \in G_0'$ отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ ставит в соответствие точку $Y \in B(X) = B\big(X, R(X, G_0')\big)$, для которой

$$y = x + \frac{\varepsilon}{2\pi}\, h(X, \partial G_0')\, \zeta, \ \text{ где } \ y = \operatorname{pr} Y, \ x = \operatorname{pr} X. \tag{15}$$

Поскольку $B(X)$ – однолистный круг и $|y - x| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\, h(X, \partial G_0') < \frac{1}{6} R(X, G_0')$ (см. следствие 3), то такая точка $Y \in B(X)$ существует и только одна.

Для удобства отображение $T_{\varepsilon,\zeta}(X)$ будем обозначать ниже в виде

$$Y = T_{\varepsilon,\zeta}(X) = X + \frac{\varepsilon}{2\pi}\, h(X, \partial G_0')\, \mathcal{Z},$$

отождествляя его в терминах локального параметра с отображением (15). Отметим, что, по построению, $T_{\varepsilon,\zeta}(G_0') \subset G_0'$. Ниже покажем, что $T_{\varepsilon,\zeta}(X)$ в своей области определения удовлетворяет локально следующему условию билипшицевости. В окрестности $B(X) = B\big(X, R(X, G_0')\big)$ можно указать окрестность B точки X, для которой выполняются соотношения $B \subset B(X)$, $T_{\varepsilon,\zeta}(B) \subset B(X)$ и найдутся положительные постоянные C_1, C_2 такие, что справедливо

$$C_1\, s(X', X'') \leqslant s\big(T_{\varepsilon,\zeta}(X'), T_{\varepsilon,\zeta}(X'')\big) \leqslant C_2\, s(X', X''), \tag{16}$$

где X', X'' – произвольные точки из B. В терминах локального параметра неравенства (16) имеют вид

$$C_1\,|x'-x''| \leqslant |y'-y''| \leqslant C_2\,|x'-x''|,$$

где $x' = \operatorname{pr} X'$, $x'' = \operatorname{pr} X''$, $y' = \operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(X')$, $y'' = \operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(X'')$.

Лемма 9. *Отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ есть гомеоморфизм G_0' на G_0' и локально билипшицево на G_0'.*

Доказательство. Обозначим через L множество всех прямых $l \subset \mathbb{R}^2$, параллельных ζ как вектору. Для каждой прямой $l \in L$ положим

$$l(G_0') = \{X \in G_0' : \operatorname{pr} X \in l\}$$

и обозначим бесконечно удаленную точку, достижимую вдоль прямой l в направлении вектора ζ, символом $l(\infty)$, а в противоположном направлении – символом $l(-\infty)$. Пусть τ – некоторая компонента связности в $l(G_0')$. Тогда τ – прямолинейный однолистный интервал (Z^1, Z^2), соединяющий две достижимые вдоль τ граничные точки Z^1, Z^2 из $\partial G_0'$. $\operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(\tau)$ в силу непрерывности $T_{\varepsilon,\zeta}$ на G_0' есть интервал на $\mathbb{R}^2$, параллельный вектору ζ. Пронумеруем концы Z^1, Z^2 интервала τ так, чтобы обход интервала τ от Z^1 к Z^2 осуществлялся в направлении вектора ζ. Предположим, что $\operatorname{pr} T_{\varepsilon,\zeta}(\tau) \subset l_1$, где $l_1 \in L$ и $l_1 \neq l$. Если теперь d – евклидово расстояние между l_1 и l на $\mathbb{R}^2$, то из (15) для $X \in \tau$ имеем

$$0 < d \leqslant |\operatorname{pr} Y - \operatorname{pr} X| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\, h(X, \partial G_0').$$

Переходя здесь к пределу при $X \to Z^1$ (или при $X \to Z^2$) и учитывая, что $h\big([X, Z^1]\big)$ не меньше $h(X, \partial G_0')$, придем к противоречию $d = 0$.

Следовательно, $l = l_1$ и $T_{\varepsilon,\zeta}(\tau) \subset l$. Покажем, что отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ взаимно однозначно на τ и $T_{\varepsilon,\zeta}(\tau) = \tau$.

Действительно, предположим, что найдутся две точки $X^1, X^2 \in \tau$, для которых $Y^1 = T_{\varepsilon,\zeta}(X^1)$ и $Y^2 = T_{\varepsilon,\zeta}(X^2)$ равны.

Зададим $T_{\varepsilon,\zeta}$ на τ в виде (15), где отождествим Y с точкой $y = \operatorname{pr} Y$ и пусть $x = x(s)$, $s \in [0, S]$, – натуральная параметризация отрезка $[x^1, x^2]$, где $x^1 = \operatorname{pr} X^1 = x(0)$, $x^2 = \operatorname{pr} X^2 = x(S)$, $S = |x^1 - x^2|$.

Положим $h(X(s), \partial G_0') = z(s)$, где $X(s)$ отождествляем с $x(s)$, $y(s) = x(s) + \frac{\varepsilon}{2\pi}\, z(s)\,\zeta$ для $s \in S$. В силу (13), функция $z(s)$ абсолютно непрерывна на $[0, S]$ и $\left|\frac{dz(s)}{ds}\right| \leqslant 1$ для $\mathcal{H}^1$-почти всех $s \in [0, S]$. Тогда $y(s)$

также абсолютно непрерывна на $[0, S]$ и $\int\limits_0^S \frac{dy}{ds}\, ds = y^2 - y^1 = 0$, где $y^1 = \operatorname{pr} Y^1$, $y^2 = \operatorname{pr} Y^2$. Это и (15) дают оценку

$$|x^2 - x^1| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} \Big| \int\limits_0^S \frac{dz(s)}{ds}\, ds \Big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} |x^2 - x^1|.$$

Полученное противоречие означает, что отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ взаимно однозначно на τ.

Продолжим непрерывное отображение $T_{\varepsilon,\zeta}(X)$ на τ до непрерывного взаимно однозначного отображения на отрезке $[Z^1, Z^2]$, положив $T_{\varepsilon,\zeta}(Z^1) = Z^1$, $T_{\varepsilon,\zeta}(Z^2) = Z^2$. Переходя затем к записи $T_{\varepsilon,\zeta}$ в терминах локального параметра на $[z^1, z^2]$, в силу известного утверждения из анализа (см. [16, утверждение 1, стр. 174]) получим, что $T_{\varepsilon,\zeta}\big([z^1, z^2]\big) = [z^1, z^2]$ и отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ сохраняет порядок обхода отрезка $[z^1, z^2]$. Другими словами, если при обходе $[Z^1, Z^2]$ от Z^1 к Z^2, X^2 следует за X^1 , то $Y^2 = T_{\varepsilon,\zeta}(X^2)$ следует за $Y^1 = T_{\varepsilon,\zeta}(X^1)$.

Здесь отметим, что если, например, $\operatorname{pr} Z_1 = \infty$, то $(z^1, z^2) = \big(l(-\infty), z^2\big)$ и $\operatorname{pr} Z^1$ отождествляем на l с точкой $l(-\infty)$.

Из доказанного сразу следует, что $T_{\varepsilon,\zeta}$ – биекция множества $l(G_0')$ на $l(G_0')$, где каждая компонента связности τ множества $l(G_0')$ при отображении $T_{\varepsilon,\zeta}$ имеет образом саму себя. Варьируя $l \in L$, заключаем, что $T_{\varepsilon,\zeta}$ – биекция множества G_0' на G_0'.

Покажем, что $T_{\varepsilon,\zeta}$ является локально билипшицевым отображением на G_0'. Пусть X^0 – некоторая точка из G_0'. Положим $R_0 = R(X^0, G_0')$, $B_0 = B(X^0, R_0)$, $B_1 = B(X^0, \frac{R_0}{6})$ и заметим, что $h(X, \partial G_0')$ удовлетворяет на B_0 условию Липшица (см. доказательство леммы 8) с постоянной, не превосходящей единицы.

Тогда нетрудно заметить, что для каждого $X \in B_1$:

$$\begin{aligned} &R(X, G_0') \leqslant \frac{7}{6} R_0,\ B(X, \frac{5}{6} R_0) \subset B_0, \\ &Y = T_{\varepsilon,\zeta}(X) \in B(X, \frac{1}{6} R(X, G_0')) \subset B(X, \frac{7}{36} R_0) \subset B(X^0, \frac{R_0}{2}). \end{aligned} \tag{17}$$

Тем самым, для каждого $X \in B_1$ выполняется $Y = T_{\varepsilon,\zeta}(X) \in B_0$. Отождествляя B_0 с $\operatorname{pr} B_0$, для любых $X^1, X^2 \in B_1$ из (15) получим соотношение

$$y^2 - y^1 = x^2 - x^1 + \frac{\varepsilon}{2\pi} \big(h(X^2, \partial G_0') - h(X^1, \partial G_0') \big)\, \zeta.$$

Отсюда и из липшицивости функции $h(X, \partial G_0')$ на B_0 следует билипшицевость отображения $T_{\varepsilon,\zeta}$ на B_1:

$$\Big(1-\frac{\varepsilon}{2\pi}\Big)|x^2-x^1| \leqslant |y^2-y^1| \leqslant \Big(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\Big)|x^2-x^1|.$$

В силу произвола в выборе $X^0 \in G_0'$, это завершает доказательство леммы 9. □

Продолжив $T_{\varepsilon,\zeta}(X)$ на $\partial G_0'$, положив там $T_{\varepsilon,\zeta}(X) = X$ для всех $X \in G_0'$. За продолженным отображением сохраним прежнее обозначение.

Следствие 4. *Отображение $T_{\varepsilon,\zeta}$ есть биекция $\bar G_0'$ на $\bar G_0'$ и непрерывно на $\bar G_0'$.*

Доказательство. В силу леммы 9, достаточно установить непрерывность отображения $T_{\varepsilon,\zeta}$ на $\partial G_0'$. Возьмем некоторую точку $X^0 \in \partial G_0'$ и построим окрестность $B(X^0, \delta) \subset \mathcal{R}$. Если $X \in \partial G_0'$, то

$$h\big(T_{\varepsilon,\zeta}(X^0), T_{\varepsilon,\zeta}(X)\big) = h(X^0, X). \tag{18}$$

Если $X \in G_0'$ и $X \in B(X^0, \delta)$, то $h(X, \partial G_0') \leqslant h(X, X^0)$. Отсюда в силу того условия, что X и $T_{\varepsilon,\zeta}(X) \in B\big(X, R(X, G_0')\big)$ получим соотношения

$$\begin{aligned} h\big(T_{\varepsilon,\zeta}(X^0), T_{\varepsilon,\zeta}(X)\big) &\leqslant h(X^0, X) + h\big(X, T_{\varepsilon,\zeta}(X)\big) \\ &\leqslant h(X^0, X) + s\big(X, T_{\varepsilon,\zeta}(X)\big) \leqslant h(X^0, X) + \frac{\varepsilon}{2\pi}\, h(X, \partial G_0')) \\ &\leqslant \Big(1+\frac{\varepsilon}{2\pi}\Big)\, h(X^0, X). \end{aligned} \tag{19}$$

Из (18), (19) следует, что при $X \to X^0$ на $\bar G_0'$ или, что одно и то же, при $h(X, X^0) \to 0$ выполняется условие $h\big(T_{\varepsilon,\zeta}(X^0), T_{\varepsilon,\zeta}(X)\big) \to 0$. Тем самым, следствие 4 доказано. □

Для доказательства следующей леммы введем несколько новых понятий и обозначений.

Если $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$ и $x \in \bar{\mathbb{R}}^2$, то обозначим через $N(x, \mathcal{D})$ число точек $X \in \mathcal{D}$, для которых $\operatorname{pr} X = x$ и назовем $N(x, \mathcal{D})$ кратностью проектирования $\mathcal{D}$ на x.

В силу компактности $\bar G$ на $\mathcal{R}$, можно указать натуральное число $k(G)$ такое, что $N(x, G) \leqslant k(G)$ для всех $x \in \bar{\mathbb{R}}^2$.

Далее полагаем, что функция ρ из класса $\operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) \cap L_+^{p,\omega}(G_0)$ (см. следствие 1), равна нулю на $\mathcal{R} \setminus G_0$ и для триангуляции $\Delta = \{\Delta_j\}$

поверхности $\mathcal{R}$ из (1) только $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ имеют непустое пересечение с G_0. Положим

$$\beta_i(X) = \begin{cases} \rho(X), & X \in \Delta_i \cap G_0; \\ 0, & X \in \mathcal{R} \setminus (\Delta_i \cap G_0), \end{cases}$$

где $i = 1, \ldots, n$. По построению, $\rho(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i(X)$ σ-почти везде на $\mathcal{R}$ и

$$\int\limits_{G_0} \rho^p \, \omega \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i \cap G_0} \rho^p \, \omega \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i \cap G_0} \beta_i^p \, \omega \, d\sigma = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{G_0} \beta_i^p \, \omega \, d\sigma.$$

Пусть

$$\beta(x) = \begin{cases} \max\limits_i \beta_i(X), & x = \operatorname{pr} X \text{ и } X \in G_0'; \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{pr} G_0'. \end{cases}$$

Тогда, по построению,

$$\int\limits_{\operatorname{pr} G_0'} \beta^p \, w \, dx \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Delta_i \cap G_0'} \beta_i^p \, \omega \, d\sigma,$$

где w – вес Макенхаупта на $\mathbb{R}^2$, который порождает вес ω на $\mathcal{R}$. Если $M\beta(x)$ – максимальная функция для $\beta(x)$, то определим аналог функции $M\beta(x)$ на G_0' по правилу $M(X) = M\beta(x)$, где $X \in G_0'$ и $\operatorname{pr} X = x$. В силу выбора $M(X)$ и свойств максимальной функции, имеем

$$\int\limits_{G_0'} M^p(X) \, \omega \, d\sigma \leqslant k(G) \int\limits_{\mathbb{R}^2} \bigl(M\beta(x)\bigr)^p \, w \, dx$$
$$\leqslant k(G) \cdot \mathrm{const} \int\limits_{\operatorname{pr} G_0} \beta^p(x) \, w \, dx \leqslant k(G) \cdot \mathrm{const} \int\limits_{G_0} \rho^p \, \omega \, d\sigma.$$

Следовательно, $M(X) \in L^{p,\omega}(G_0')$.

Заметим теперь, что в определении $T_{\varepsilon,\zeta}$ точка $Y = X + \frac{\varepsilon}{2\pi} h(X, \partial G_0') \, \mathcal{Z}$ вместе с точкой $X \in G_0'$ принадлежит при всех $|\zeta| < 1$ однолистному кругу $B\bigl(X, R(X, G_0')\bigr)$. Это позволяет на $B\bigl(X, R(X, G_0')\bigr)$ определить в терминах локального параметра x для $\rho(X) = \rho(x)$ следующее интегральное усреднение:

$$\begin{aligned}\rho_k(x) &= \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho\bigl(x + \frac{\alpha(x)}{2\pi k}\zeta\bigr)\, d\zeta \\ &= \frac{4\,\pi^2 k^2}{\alpha^2(x)\,|B(0,1)|} \int\limits_{B(x,\frac{\alpha(x)}{2\pi k})} \rho(y)\, dy,\end{aligned} \tag{20}$$

где $B(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$, $|B(0,1)| = \mathcal{L}^2\bigl(B(0,1)\bigr)$, $\alpha(x) = h(X, \partial G_0')$, $x = \operatorname{pr} X$, $k \geqslant 1$.

Лемма 10. *Вещественная функция $\rho_k(X)$ непрерывна на G_0' для всех $k \geqslant 1$ и $\rho_k(X)$ сходится при $k \to \infty$ σ-почти везде на G_0' к функции $\rho(X)$.*

Доказательство. Из условия $\rho \in L^{p,\omega}(G_0')$ следует, что ρ локально интегрируема на G_0'. Учитывая, что наши рассуждения носят локальный характер (в однолистной окрестности некоторой точки из G_0'), то отождествим точку X из G_0' с ее локальным параметром x. Тогда по теореме Лебега–Безиновича о дифференцировании (см. [13, теорема 1.7.1])

$$\lim_{r \to \infty} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} \rho(y)\, dy = \rho(x)$$

σ-почти везде на G_0'.

Отсюда и из (20) сразу следует, что $\rho_k(X)$ сходится σ-почти везде на G_0' к $\rho(X)$. Покажем, что $\rho_k(X)$ непрерывна в точке X^0, где X^0 – произвольная наперед заданная точка в G_0', $k \geqslant 1$. В силу (17), для $X \in B\bigl(X^0, \frac{R(X^0, G_0')}{6}\bigr)$ точка $Y = T_{\frac{1}{k},\zeta}(X)$ для всех $|\zeta| < 1$ принадлежит однолистному кругу $B\bigl(X^0, \frac{R(X^0, G_0')}{2}\bigr)$. Поэтому при $X \to X^0$ точку Y можем отождествить с локальным параметром y.

Это позволяет в силу непрерывности положительной функции $\alpha(x) = h(X, \partial G_0')$ на G_0' и абсолютной непрерывности интеграла Лебега записать $\rho_k(X)$ в виде

$$\rho_k(X) = \rho_k(x) = \frac{4\pi^2 k^2}{\alpha^2(x^0)|B(0,1)|} \int\limits_{B(x^0,\frac{\alpha(x^0)}{2\pi k})} \rho(y)\, dy \, + o(1),$$

где $o(1) \to 0$ при $X \to X^0$. Тем самым, непрерывность $\rho_k(X)$ на G_0' установлена. $\square$

Лемма 11. *Для последовательности* $\{\rho_k(X)\}$ *из леммы* 10 *имеет место равенство*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{G_0'} |\rho_k(X) - \rho(X)|^p \, \omega \, d\sigma = 0.$$

Доказательство. Из (20) и определения функции $M(X)$ следует, что

$$\rho_k(X) = \frac{4\pi^2 k^2}{\alpha^2(x)|B(0,1)|} \int\limits_{B(x,\frac{\alpha(x)}{2\pi k})} \rho(y)\, dy \leqslant M(x), \quad \text{где } x = \operatorname{pr} X.$$

Поскольку $M(X) \in L^{p,\omega}(G_0')$, то по теореме Лебега о мажорирующей сходимости и лемме 10 заключаем, что $\rho_k(X) \to \rho(X)$ в $L^{p,\omega}(G_0')$. $\square$

Лемма 12. *Инфимум в определении модуля* $m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(G)\big)$ *можно брать по допустимым функциям, непрерывным в* G_0'.

Доказательство. Сначала заметим, что для любой локально спрямляемой в G_0 кривой $\gamma \in H_{ij}(G)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$ и функции $\rho \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha\, H(G)\big) \cap L_+^{p,\omega}(G)$, по определению, $\int\limits_{\gamma} \rho\, ds = \int\limits_{\gamma\setminus\mathcal{R}_\infty} \rho\, ds$. Кроме того, если $X^0 \in G_0 \cap (\mathcal{R}_b \setminus \mathcal{R}_\infty)$, $X^0 \in \gamma$, и окрестность $B(X^0,\delta)$ точки X^0 такая, что $\bar{B}(X^0,\delta) \subset (G_0' \cup \{X^0\})$, то в силу локальной спрямляемости кривой γ в G_0 найдется только конечное число спрямляемых подкривых $\lambda_{\widetilde{j}} \subset \gamma$, с концами на $\partial B(X^0,\delta)$, $\lambda_{\widetilde{j}} \setminus \partial B(X^0,\delta) \subset B(X^0,\delta)$, $X^0 \in \lambda_{\widetilde{j}}$, $\widetilde{j} = 1,\dots,n$. Здесь параметризация подкривой $\lambda_{\widetilde{j}}$ есть результат сужения параметризации $X(t)$, $a < t < b$, кривой γ на некоторый отрезок, причем разным $\widetilde{j}$ соответствуют разные непересекающиеся отрезки. Отсюда и из того факта, что точке X^0 при натуральной параметризации кривой γ соответствует множество нулевой линейной меры значений натурального параметра s (см. [10, теорема 3.2.6]), получим

$$\sum_{\widetilde{j}=1}^{n} \int\limits_{\lambda_{\widetilde{j}}} \rho\, ds = \sum_{\widetilde{j}=1}^{n} \int\limits_{\lambda_{\widetilde{j}}\setminus\{X^0\}} \rho\, ds.$$

Поэтому заключаем, что

$$\sum_{\widetilde{j}=1}^{n}\int\limits_{\gamma}\rho\,ds=\sum_{\widetilde{j}=1}^{n}\int\limits_{\gamma\setminus(\mathcal{R}_b\cup\mathcal{R}_\infty)}\rho\,ds. \tag{21}$$

В силу леммы 6, для $\eta\in(0,1)$ найдется функция

$$\rho\in\operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha\,H(G)\big)\cap L_{+}^{p,\omega}(G)$$

такая, что

$$\int\limits_{G_0}\rho^p\,d\sigma<m_{p,\omega}\big(\alpha\,H(G)\big)+\eta.$$

Рассмотрим функцию $\rho_k(X)$, которая при $X\in G_0\setminus G_0'$ равна $\rho(X)$. Для $X\in G_0'$ функция $\rho_k(X)$ в терминах локального параметра имеет вид

$$\rho_k(x)=\frac{1}{|B(0,1)|}\int\limits_{B(0,1)}\rho\Big(x+\frac{h(x,\partial G_0')}{2\pi k}\,\zeta\Big)\,d\zeta.$$

Ввиду лемм 10 и 11, $\rho_k(X)$ непрерывна в G_0' и $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k(X)=\rho(X)$ в $L^{p,\omega}(G_0)$.

Пусть кривая $\gamma\in H_{ij}(G)$, $1\leqslant i<j\leqslant m$. По теореме Фубини (см. [10, теорема 2.6.2]),

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma}\rho_k(x)\,ds&=\int\limits_{\gamma\cap G_0'}\rho_k(x)\,ds\\&=\frac{1}{|B(0,1)|}\int\limits_{B(0,1)}dy\int\limits_{\gamma\cap G_0'}\rho\Big(x+\frac{h(x,\partial G_0')}{2\pi k}\,\zeta\Big)\,ds(x).\end{aligned}$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $y(x)=x+\frac{h(x,\partial G_0')}{2\pi k}\zeta$. Тогда в силу следствия 3

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma\cap G_0'}\rho\big(x+\frac{h(x,\partial G_0')}{2\pi k}\,\zeta\big)\,ds(x)&=\int\limits_{y^{-1}(\gamma)\cap G_0'}\rho(y)\frac{ds(x)}{ds(y)}\,ds(y)\\ \geqslant\int\limits_{y^{-1}(\gamma)\cap G_0'}\frac{\rho(y)}{1+\frac{1}{2\pi k}}\,ds(y)&=\int\limits_{y^{-1}(\gamma)}\frac{\rho(y)}{1+\frac{1}{2\pi k}}\,ds(y)\geqslant\frac{\alpha_{ij}}{1+\frac{1}{2\pi k}},\end{aligned} \tag{22}$$

поскольку

$$\frac{ds(x)}{ds(y)} = \Big|\frac{dx}{ds} + \frac{1}{2\pi k}\frac{dh(x,\partial G_0')}{ds}\Big| \leqslant 1 + \frac{1}{2\pi k}$$

для $\mathcal{H}^1$-почти всех s из области определения натуральной параметризации кривой γ и кривая $y^{-1}(\gamma) \in H_{ij}(G)$ (см. следствие 4). Отсюда следует, что функция $(1+\frac{1}{2\pi k})\rho_k \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha\, H(G)\big)$ непрерывна на G_0' и справедливы неравенства

$$m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(G)\big) \leqslant \int\limits_{G_0'} \Big(1+\frac{1}{2\pi k}\Big)^p \rho_k^p \omega\, d\sigma \leqslant \Big(1+\frac{1}{2\pi k}\Big)^p \Big(\int\limits_{G_0'} \rho^p \omega d\sigma\Big) + o(1)$$
$$< m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(G)\big) + o(1) + \eta,$$

где $o(1) \to 0$ при $k \to \infty$. Тем самым, лемма доказана. □

Установим теперь аналог леммы 11 для модуля $m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(\mathcal{R})\big)$. Для этого, помимо последовательности полиэдрических областей $\{\Omega_k\}$ из (3), введем аналогичную последовательность $\{Q_k\}$ полиэдрических областей, где

$$Q_k \subset \bar{Q}_k \subset \Omega_k \subset \bar{\Omega}_k \subset Q_{k+1}$$

для всех $k \geqslant 1$.

Напомним, что $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} Q_k = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \Omega_k = \mathcal{R}$, $\partial\Omega_k \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) = \partial Q_k \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) = \varnothing$ для всех $k \geqslant 1$, $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$. Кроме того, потребуем, чтобы компакты $E_2,\dots,E_m$ в определении конденсатора

$$\big(\delta_1\partial\mathcal{R}, \delta_2 E_2, \dots, \delta_m E_m, \mathcal{R}\big)$$

содержались в Q_1. Положим $\mathcal{B}_1 = Q_1$, $\mathcal{B}_k = Q_k \setminus \bar{Q}_{k-1}$, $\mathcal{D}_1 = \Omega_1$, $\mathcal{D}_k = \Omega_k \setminus \bar{\Omega}_{k-1}$ для $k \geqslant 2$; $\mathcal{B}_{0k} = \mathcal{B}_k \setminus (E_2 \cup \ldots \cup E_m)$, $\mathcal{D}_{0k} = \mathcal{D}_k \setminus (E_2 \cup \ldots \cup E_m)$, $\mathcal{B}_{0k}' = \mathcal{B}_{0k} \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$, $\mathcal{D}_{0k}' = \mathcal{D}_{0k} \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$ для $k \geqslant 1$.

Заменим теперь в определении $T_{\varepsilon,\zeta}$ открытое множество G_0' на $\mathcal{B}_{0k}'$, $\mathcal{D}_{0k}'$; ε на $\varepsilon_k \in (0,1]$, $k \geqslant 1$. Здесь мы учитываем, что $\bar{\mathcal{B}}_{0k}'$, $\bar{\mathcal{D}}_{0k}'$ – компакты в $\mathcal{R}$. Новые отображения $Y = X + \frac{\varepsilon_k}{2\pi} h(X, \partial\mathcal{B}_{0k}')\mathcal{Z}$, $Y = X + \frac{\varepsilon_k}{2\pi} h(X, \partial\mathcal{D}_{0k}')\mathcal{Z}$ обозначим соответственно через $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}$, $T^{2k}_{\varepsilon_k,\zeta}$. Тогда в силу леммы 9 отображение $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ локально билипшицево на $\mathcal{B}_{0k}'$ и гомеоморфно отображает $\mathcal{B}_{0k}'$ на $\mathcal{B}_{0k}'$; $T^{2k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ локально билипшицево на $\mathcal{D}_{0k}'$ и гомеоморфно отображает $\mathcal{D}_{0k}'$ на $\mathcal{D}_{0k}'$, $k \geqslant 1$.

Доопределим $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ на $\partial\mathcal{B}'_{0k}$, положив там $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}(X) = X$ для всех $X \in \partial\mathcal{B}'_{0k}$. Аналогично доопределим $T^{2k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ на $\partial\mathcal{D}'_{0k}$. За продолженными отображениями сохраним их прежние обозначения. Тогда в силу следствия 4 отображение $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ есть биекция $\bar{\mathcal{B}}'_{0k}$ на $\bar{\mathcal{B}}'_{0k}$ и непрерывно на $\bar{\mathcal{B}}'_{0k}$; соответственно отображение $T^{2k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ есть биекция $\bar{\mathcal{D}}'_{0k}$ на $\bar{\mathcal{D}}'_{0k}$ и непрерывно на $\bar{\mathcal{D}}'_{0k}$ для всех $k \geqslant 1$.

Положим $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$. Введем отображение $T^1_{\vec{\varepsilon},\zeta} : \bar{\mathcal{R}}'_0 \to \bar{\mathcal{R}}'_0$, полагая его равным $T^{1k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ на $\bar{\mathcal{B}}'_{0k}$ для всех $k \geqslant 1$. Аналогично, введем отображение $T^2_{\vec{\varepsilon},\zeta} : \bar{\mathcal{R}}'_0 \to \bar{\mathcal{R}}'_0$, полагая его равным $T^{2k}_{\varepsilon_k,\zeta}$ на $\bar{\mathcal{D}}'_{0k}$ для всех $k \geqslant 1$. Тогда $T^i_{\vec{\varepsilon},\zeta}$ есть непрерывная биекция $\bar{\mathcal{R}}'_0$ на $\bar{\mathcal{R}}'_0$, $i = 1, 2$. Кроме того, $T^1_{\vec{\varepsilon},\zeta}$ локально билипшицево на $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \mathcal{B}'_{0k}$, $T^2_{\vec{\varepsilon},\zeta}$ локально билипшицево на $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \mathcal{D}'_{0k}$.

Лемма 13. *Инфимум в определении модуля $m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(\mathcal{R})\big)$ можно брать по допустимым функциям, непрерывным в $\mathcal{R}'_0$.*

Доказательство. Зададим $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ и выберем функцию $\rho \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha\, H(\mathcal{R})\big)$ (см. лемму 6) такой, что

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho^p\, \omega\, d\sigma < m_{p,\omega}\big(\alpha\, H(\mathcal{R})\big) + \eta_1. \tag{23}$$

Для $m_k \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию $\rho_{k,m_k}(X)$ на $\mathcal{B}_{0k} \cup \partial\mathcal{B}_k$, которая равна $\rho(X)$ на $\partial\mathcal{B}_k \cup (\mathcal{B}_{0k} \setminus \mathcal{B}'_{0k})$, для $X \in \mathcal{B}'_{0k}$ функцию ρ_{k,m_k} в терминах локального параметра $x = \operatorname{pr} X$ определим равенством

$$\rho_{k,m_k}(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho\Big(x + \frac{h(x, \partial\mathcal{B}'_{0k})}{2\pi m_k}\, \zeta\Big)\, d\zeta.$$

Выбор m_k подчиним условию $m_k \geqslant m_1$ для всех $k \geqslant 1$. Ввиду лемм 10 и 11, функция $\rho_{k,m_k}(X)$ непрерывна на $\mathcal{B}'_{0k}$ и m_k можно выбрать таким, что

$$\int\limits_{\mathcal{B}_{0k}} |\rho(X) - \rho_{k,m_k}(X)|^p\, \omega\, d\sigma < \frac{\eta_2}{2^{p+k}}.$$

Поскольку $\mathcal{R}_0 = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} (\mathcal{B}_{0k} \cup \partial\mathcal{B}_k)$, то, положив $\rho_1(X) = \rho_{k,m_k}(X)$ на $\mathcal{B}_{0k} \cup \partial\mathcal{B}_k$, $k \geqslant 1$, определим $\rho_1(X)$ для всех $X \in \mathcal{R}_0$. По построению, функция $\rho_1(X)$ непрерывна на $\mathcal{R}_0' \setminus \big(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial\mathcal{B}_k\big) = \mathcal{R}_0' \setminus \big(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial Q_k\big)$,

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} |\rho - \rho_1|^p \,\omega\, d\sigma = \sum_{k\geqslant 1} \int\limits_{\mathcal{B}_{0k}} |\rho - \rho_{k,m_k}|^p \,\omega\, d\sigma < \frac{\eta_2}{2^p}.$$

В приведенных выше рассуждениях заменим $\rho(X)$ на $\rho_1(X)$ и рассмотрим функцию $\widetilde{\rho}_{k,n_k}(X)$ на $\mathcal{D}_{0k} \cup \partial\mathcal{D}_k$, которая равна $\rho_1(X)$ на $\partial\mathcal{D}_k \cup (\mathcal{D}_{0k} \setminus \mathcal{D}_{0k}')$. Для $X \in \mathcal{D}_{0k}'$ функцию $\widetilde{\rho}_{k,n_k}(X)$ в терминах локального параметра $x = \operatorname{pr} X$ определим равенством

$$\widetilde{\rho}_{k,n_k}(x) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho_1\Big(x + \frac{h(x, \partial\mathcal{D}_{0k}')}{2\pi n_k}\,\zeta\Big)\, d\zeta.$$

Выбор n_k подчиним условию $n_k \geqslant n_1$ для всех $k \geqslant 1$.

По построению, $\widetilde{\rho}_{k,n_k}(X)$ непрерывна на $\mathcal{B}_{0k}'$ и n_k можно выбрать таким, что

$$\int\limits_{\mathcal{B}_{0k}} |\rho_1(X) - \widetilde{\rho}_{k,n_k}(X)|^p \,\omega\, d\sigma < \frac{\eta_2}{2^{p+k}},\ k \geqslant 1.$$

Аналогично ρ_1 определим функцию $\rho_2(X)$ на $\mathcal{R}_0$ как $\widetilde{\rho}_{k,n_k}(X)$ для $X \in \mathcal{D}_{0k} \cup \partial\mathcal{D}_k$, $k \geqslant 1$, и отметим, что $\rho_2(X)$ непрерывна на $\mathcal{R}_0' \setminus \big(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial\Omega_k\big)$.

Из неравенства Минковского (см лемму 2) и приведенных выше оценок имеем неравенство

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} |\rho - \rho_2|^p \,\omega\, d\sigma < \eta_2. \tag{24}$$

Покажем, что ρ_2 непрерывна на $\mathcal{R}_0'$. Другими словами, покажем, что ρ_2 – непрерывная функция в каждой точке $X^0 \in \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial\Omega_k = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial\mathcal{D}_k$, где, по построению, $\big(\bigcup\limits_{k\geqslant 1} \partial\Omega_k\big) \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) = \varnothing$.

Пусть, например, $X^0 \in \partial\Omega_{k'}$. В силу своего выбора, X^0 – граничная точка для $\mathcal{D}_{0k'}'$, $\mathcal{D}_{0,k'+1}'$ и можно указать однолистную окрестность $B(X^0, \delta)$ точки X^0, для которой $\bar{B}(X^0, \delta) \subset B_{0,k'+1}'$ и для наперед заданного $\eta > 0$ выполняется оценка $|\rho_1(X^0) - \rho_1(X)| < \eta$ для всех $X \in B(X^0, \delta)$. Отсюда для $X \in B(X^0, \frac{\delta}{6}) \cap \mathcal{D}_{0k'}'$ (соответственно, для

$X \in B(X^0, \frac{\delta}{6}) \cap \mathcal{D}'_{0,k'+1}\big)$ в силу соотношений (17) имеем

$$s(X^0, Y) \leqslant s(X^0, X) + s(X, Y) < \frac{\delta}{2},$$

где $Y = X + \frac{1}{2\pi\, n_{k'}}\, h(X, \partial\mathcal{D}'_{0k'})\, \mathcal{Z}$, соответственно,

$$Y = X + \frac{1}{2\pi n_{k'+1}}\, h(X, \partial\mathcal{D}'_{0k'})\, \mathcal{Z}.$$

Здесь мы учитываем, что $h(X, \partial\mathcal{D}'_{0k'}) \leqslant s(X, X^0)$, $h(X, \partial\mathcal{D}'_{0,k'+1}) \leqslant s(X, X^0)$. Это дает неравенство $|\rho_1(X^0) - \rho_1(Y)| < \eta$ для указанных выше y и $|\zeta| < 1$.

Учитывая равенство $\rho_1(X^0) = \rho_2(X^0)|$ и переходя для $X \in B(X^0, \frac{\delta}{6}) \cap \mathcal{D}'_{0k'}$ к записи в терминах локального параметра, получим оценку

$$|\rho_2(x^0) - \rho_2(x)| = \Big|\rho_1(x^0) - \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho_1\Big(x + \frac{h(x, \partial\mathcal{D}'_{0k'})}{2\pi n_{k'}}\zeta\Big)\, d\zeta\Big|$$

$$\leqslant \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \Big|\rho_1(x^0) - \rho_1\Big(x + \frac{h(x, \partial\mathcal{D}'_{0k'})}{2\pi n_{k'}}\zeta\Big)\Big|\, d\zeta < \eta.$$

Аналогичную оценку установим для $X \in B(X, \frac{\delta}{6}) \cap \mathcal{D}'_{0,k'+1}$, что в силу произвола в выборе $X^0 \in \bigcup\limits_{k \geqslant 1} \partial\Omega_k$ влечет непрерывность функции ρ_2 на $\bigcup\limits_{k \geqslant 1} \partial\Omega_k$, значит, в $\mathcal{R}'_0$.

Далее считаем, что $\rho_2(X)$ – непрерывная функция в $\mathcal{R}'_0$. Тогда (см. доказательство равенства (21)) для любой локально спрямляемой кривой $\gamma \in H_{ij}(\mathcal{R})$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, получим

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1\, ds = \int\limits_{\gamma \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)} \rho_1\, ds, \quad \int\limits_{\gamma} \rho_2\, ds = \int\limits_{\gamma \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)} \rho_2\, ds.$$

Кроме того, если

$$\int\limits_{\gamma \cap (\bigcup\limits_{k \geqslant 1} \partial\Omega_k)} ds = \int\limits_{\gamma \cap (\bigcup\limits_{k \geqslant 1} \partial Q_k)} ds = 0,$$

то, проводя те же действия, как в (22), заключаем, что

$$\int\limits_{\gamma}\Big(1+\frac{1}{m_1}\Big)\rho_1\,ds=\int\limits_{\gamma'}\Big(1+\frac{1}{m_1}\Big)\rho_1\,ds\geqslant\alpha_{ij},$$

$$\int\limits_{\gamma}\Big(1+\frac{1}{m_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{n_1}\Big)\rho_2\,ds=\int\limits_{\gamma'}\Big(1+\frac{1}{m_1}\Big)\Big(1+\frac{1}{n_1}\Big)\rho_2\,ds\geqslant\alpha_{ij}, \tag{25}$$

где $\gamma'=\gamma\setminus\Big(\big(\mathcal{R}_\infty\cup\mathcal{R}_b\big)\cup\big(\bigcup\limits_{k\geqslant1}(\partial\Omega_k\cup\partial Q_k)\big)\Big)$.

Здесь мы учитываем, что для $\vec{\varepsilon}=\big(\frac{1}{m_1},\frac{1}{m_2},\dots\big)$ кривая $T^1_{\vec{\varepsilon},\zeta}(\gamma)\in H_{ij}(\mathcal{R})$ и $s(T^1_{\vec{\varepsilon},\zeta}(\gamma)\cap\partial Q_k)=0$ $\Big($соответственно, для $\vec{\varepsilon}=\big(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2},\dots\big)$ кривая $T^2_{\vec{\varepsilon},\zeta}(\gamma)\in H_{ij}(\mathcal{R})$ и $s(T^2_{\vec{\varepsilon},\zeta}(\gamma)\cap\partial\Omega_k)=0\Big)$ для всех $|\zeta|<1$, $k\geqslant1$.

Покажем, что неравенства (25) будут справедливы и для кривой γ, удовлетворяющей условию

$$\int\limits_{\gamma''}ds>0,\quad \text{где } \gamma''=\gamma\cap\Big(\bigcup_{k\geqslant1}(\partial\Omega_k\cup\partial Q_k)\Big).$$

Для этого построим в $\mathcal{R}_0$ окрестности $O(\partial\Omega_k,\beta_k)$, $O(\partial Q_k,\widetilde{\beta}_k)$ компактов $\partial\Omega_k$, ∂Q_k, $k\geqslant1$, такие, что их замыкания попарно не пересекаются и расположены в $\mathcal{R}_0'$.

В силу локальной спрямляемости кривой γ в $\mathcal{R}_0$ найдется только конечное число спрямляемых подкривых $\lambda_{jk}\subset\gamma\cap\bar{O}(\partial\Omega_k,\frac{\beta_k}{2})$ с концами на $\partial\bar{O}(\partial\Omega_k,\frac{\beta_k}{2})$, $j=1,\dots,p_k$ $\big($спрямляемых подкривых $\widetilde{\lambda}_{ik}\subset\gamma\cap\bar{O}(\partial Q_k,\frac{\widetilde{\beta}_k}{2})$ с концами на $\bar{O}(\partial Q_k,\frac{\widetilde{\beta}_k}{2}),i=1,\dots,\widetilde{p}_k\big)$ и пересекающихся с $\partial\Omega_k$ $\big($пересекающихся с $\partial Q_k\big)$ по множеству положительной длины. Здесь параметризация каждой подкривой λ_{jk} $\big($подкривой $\widetilde{\lambda}_{ik}\big)$ есть результат сужения параметризации $X(t)$, $a<t<b$, кривой γ на некоторый отрезок, причем разным значениям j (разным значениям i) соответствуют разные непересекающиеся отрезки из (a,b).

Не теряя общности, будем считать, что для всех $k\geqslant1$ такие подкривые λ_{jk} $\big($подкривые $\widetilde{\lambda}_{ik}\big)$ существуют.

Применяя известные рассуждения (см. [17, доказательство теоремы 5.2]), для заданного $\eta_3\in(0,1)$ в силу непрерывности функции

$\widetilde{\rho}_2 = \bigl(1+\frac{1}{m_1}\bigr)\bigl(1+\frac{1}{n_1}\bigr)\rho_2$ на $\mathcal{R}_0'$ в подкривую λ_{jk} можно вписать ломаную $L_{jk} \subset O(\partial\Omega_k, \beta_k)$, а в подкривую в $\widetilde{\lambda}_{ik}$ можно вписать ломаную $\widetilde{L}_{ik} \subset O(\partial Q_k, \beta_k)$ так, чтобы выполнялась оценка

$$\sum_{j=1}^{p_k} \Bigl| \int\limits_{\lambda_{jk}} \widetilde{\rho}_2\, ds - \int\limits_{L_{jk}} \widetilde{\rho}_2\, ds \Bigr| + \sum_{i=1}^{\widetilde{p}_k} \Bigl| \int\limits_{\widetilde{\lambda}_{ik}} \widetilde{\rho}_2\, ds - \int\limits_{\widetilde{L}_{ik}} \widetilde{\rho}_2\, ds \Bigr| < \frac{\eta_3}{2^k}. \tag{26}$$

Пусть в (26) какое-нибудь звено L ломаной L_{jk}, $\widetilde{L}_{ik}$ параллельно одному из отрезков, которые образуют множество $\partial\Omega_k \cup \partial Q_k$. Тогда его можно заменить на два звена, исходящих из концов отрезка L, имеющих общую вершину и не параллельных отрезкам, образующим множество $\partial\Omega_k \cup \partial Q_k$. Эту замену можно осуществить так, чтобы данное неравенство (26) осталось справедливым. Поэтому далее считаем, что в (26) ломаные L_{jk}, $\widetilde{L}_{ik}$ не содержат звеньев, параллельных отрезкам, из которых состоит множество $\partial\Omega_k \cup \partial Q_k$ для $1 \leqslant j \leqslant p_k$, $1 \leqslant i \leqslant \widetilde{p}_k$, $k \geqslant 1$.

Заменив в кривой γ все подкривые λ_{jk}, $\widetilde{\lambda}_{ik}$ на соответствующие ломаные L_{jk}, $\widetilde{L}_{ik}$, получим новую кривую $\widetilde{\gamma} \in H_{ij}(\mathcal{R})$, для которой в силу (25) и выбора $\widetilde{\gamma}$ выполняются оценки

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\rho}_2\, ds \geqslant \alpha_{ij} \quad \text{и} \quad \Bigl| \int\limits_{\widetilde{\gamma}} \widetilde{\rho}_2\, ds - \int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}_2\, ds \Bigr| < \eta_3.$$

Отсюда и из произвола в выборе $\eta_3 \in (0,1)$ следует, что

$$\int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}_2\, ds \geqslant \alpha_{ij} \quad \text{для всех} \quad \gamma \in H_{ij}(\mathcal{R}),\ 1 \leqslant i < j \leqslant m.$$

Тем самым, $\widetilde{\rho}_2 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(\mathcal{R})\bigr)$. С другой стороны, в силу (23) и (24) имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{R}_0} \widetilde{\rho}_2\, \omega\, d\sigma &\leqslant \bigl(1+\frac{1}{m_1}\bigr)^p \bigl(1+\frac{1}{n_1}\bigr)^p \Bigl(\int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho^p\, \omega\, d\sigma + o(1) \Bigr) \\ &\leqslant m_{p,\omega}\bigl(\alpha H(\mathcal{R})\bigr) + \eta_2 + o(1),\end{aligned}$$

где $o(1) \to 0$ при $m_1, n_1 \to \infty$, $\eta_2 \to 0$, что доказывает лемму 13. $\square$

Запишем точки из $G_0 \cap \bigl(\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b\bigr)$ в виде конечной последовательности $Z^1, \dots, Z^{n_0}$.

Пусть $k_0 \in \mathbb{N}$ таково, что окрестности $O(E_i, \frac{1}{k_0}), \bar{O}(E_i, \frac{1}{k_0}) \subset \mathcal{R}$, компактов E_i в определении конденсатора $\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ и окрестности $B(Z^j, \frac{1}{k_0})$, $\bar{B}(Z^j, \frac{1}{k_0}) \subset G_0$ точек Z^j попарно не пересекаются вместе с их замыканиями, где $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n_0$.

Положим для $k \geqslant k_0$

$$E_{0k} = \bigcup_{i=1}^{m} \bar{O}\Big(E_i, \frac{1}{k}\Big), \quad G_{0k} = G \setminus E_{0k}$$

и пусть $H_{ij}(k)$ – семейство всех локально спрямляемых кривых в G_{0k}, соединяющих $E_{ik} = \bar{O}(E_i, \frac{1}{k}) \cap \bar{G}$ и $E_{jk} = \bar{O}(E_j, \frac{1}{k}) \cap \bar{G}$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Здесь будем считать, что параметризация $X_\gamma = X_\gamma(t)$, $a < t < b$, каждой кривой $\gamma \in H_{ij}(k)$ выбрана так, что обход кривой γ совершается от E_{jk} к E_{ik}.

Из кривых $\gamma \in H_{ij}(k)$, рассматривая окрестность $B(Z^1, \frac{1}{k(1)})$, где $k(1) \in \mathbb{N}$ и $k(1) \geqslant k_0$, образуем семейство $H_{ij}\big(k, k(1)\big)$ составных кривых γ_1 в G_{0k} следующим образом.

Если $\gamma \cap B(Z^1, \frac{1}{k(1)}) = \varnothing$, то положим $\gamma_1 = \gamma$, где $X_{\gamma_1}(t) = X_\gamma(t)$, $t \in T_1 = (a, b)$.

Если $\gamma \cap B(Z^1, \frac{1}{k(1)}) \neq \varnothing$, и

$$a_1 = \inf\Big\{t \in (a,b) : X_\gamma(t) \in \bar{B}\Big(Z^1, \frac{1}{k(1)}\Big)\Big\},$$

$$b_1 = \sup\Big\{t \in (a,b) : X_\gamma(t) \in \bar{B}\Big(Z^1, \frac{1}{k(1)}\Big)\Big\},$$

то положим $\gamma_1 = X_\gamma\big((a,b) \setminus (a_1, b_1)\big)$ тогда сужение $X_\gamma(t)$ на $T_1 = (a,b) \setminus (a_1, b_1)$ есть параметризация составной кривой γ_1.

Натуральную параметризацию составной кривой γ_1 образуем как сужение натуральной параметризации кривой γ на $S \setminus S_1$, где S – область определения этой параметризации, а S_1 – множество значений натурального параметра, соответствующих точкам дуги $X_\gamma\big((a_1, b_1)\big)$ в этой параметризации.

Ясно, что в определении $H_{ij}\big(k, k(1)\big)$ точку Z^1 можно заменить на любую точку Z^l из набора $Z^1, Z^2, \dots, Z^{n_0}$. Соответствующее семейство составных кривых обозначим через $H_{ij}\big(k, k(1), Z^l\big)$, где, по определению,
$H_{ij}\big(k, k(1), Z^1\big) = H_{ij}\big(k, k(1)\big)$.

Из кривых $\gamma_1 \in H_{ij}\big(k, k(1)\big)$, используя окрестность $B(Z^2, \frac{1}{k(2)})$, где $k(2) \in \mathbb{N}$ и $k(2) \geqslant k_0$, образуем семейство $H_{ij}\big(k, k(1), k(2)\big)$ составных кривых γ_2 в G_{0k} по следующему правилу.

Если $\gamma_1 \cap B(Z^2, \frac{1}{k(2)}) = \varnothing$, то положим $\gamma_2 = \gamma_1$, где $X_{\gamma_2}(t) = X_{\gamma_1}(t)$, $t \in T_1$.

Если

$$\gamma_1 \cap B\Big(Z^2, \frac{1}{k(2)}\Big) \neq \varnothing, \quad a_2 = \inf\Big\{t \in T_1 : X_{\gamma_1}(t) \in \bar{B}\Big(Z^2, \frac{1}{k(2)}\Big)\Big\},$$

и

$$b_2 = \sup\Big\{t \in T_1 : X_{\gamma_1}(t) \in \bar{B}\Big(Z^2, \frac{1}{k(2)}\Big)\Big\},$$

то мы положим

$$\gamma_2 = X_{\gamma_1}\Big(T_1 \setminus (a_2, b_2)\Big)$$

и сужение $X_{\gamma_1}(t)$ на $T_2 = T_1 \setminus (a_2, b_2)$ задает параметризацию составной кривой γ_2.

Натуральную параметризацию кривой γ_2 осуществим аналогично тому, как это было сделано для γ_1.

Заменяя в определении $H_{ij}\big(k, k(1), k(2)\big)$ пару Z^1, Z^2 на любую другую пару Z^{l_1}, Z^{l_2} различных точек из набора $\{Z^1, \dots, Z^{n_0}\}$, получим семейство кривых, которое обозначим через $H_{ij}\big(k, k(1), k(2), Z^{l_1}, Z^{l_2}\big)$. Здесь, по определению, $H_{ij}\big(k, k(1), k(2), Z^1, Z^2\big) = H_{ij}\big(k, k(1), k(2)\big)$.

Продолжая эти действия, определим последовательность семейств

$$H_{ij}\big(k, k(1), k(2), k(3)\big), H_{ij}\big(k, k(1), k(2), k(3), k(4)\big), \\ \dots, H_{ij}\big(k, k(1), \dots, k(n_0)\big)$$

составных кривых в G_{0k}, привлекая для этого окрестности

$$B\Big(Z^3, \frac{1}{k(3)}\Big), \dots, B\Big(Z^{n_0}, \frac{1}{k(n_0)}\Big),$$

где $k(3), \dots, k(n_0) \geqslant k_0$. Если в этой последовательности взять, например, семейство

$$H_{ij}(k, k(1), k(2), \dots, k(p_1))$$

и заменить точки $Z^1, \dots, Z^{p_1}$ на набор $Z^{l_1}, Z^{l_2}, \dots, Z^{l_{p_1}}$ различных p_1 точек из $\{Z^1, \dots, Z^{n_0}\}$, $3 \leqslant p_1 \leqslant n_0$, то соответствующее семейство обозначим через $H_{ij}(k, k(1), \dots, k(p_1), Z^{l_1}, \dots, Z^{l_{p_1}})$. Здесь, как и выше,

$$H_{ij}\big(k, k(1), \dots, k(p_1), Z^1, \dots, Z^{p_1}\big) = H_{ij}\big(k, k(1), \dots, k(p_1)\big).$$

Определим теперь аналогичные семейства для $\alpha H(\mathcal{R})$, $\partial\mathcal{R} \neq \varnothing$, используя приведенные выше построения для $\alpha H(G)$.

Пусть $\{\Omega_n\}$ – последовательность полиэдрических областей из разбиения (3), для которой $E_2, \ldots, E_n \subset \Omega_1$. Пусть $\widetilde{k}_0 \in \mathbb{N}$ выбрано таким, что для компактов $E_2, \ldots, E_m$ окрестности $O(E_2, \frac{1}{\widetilde{k}_0}), \ldots, O(E_m, \frac{1}{\widetilde{k}_0})$ вместе с их замыканиями попарно не пересекаются, расположены в Ω_1 и $\big(\bigcup\limits_{i=2}^{m} \bar{O}(E_i, \frac{1}{\widetilde{k}_0})\big) \cap \big((\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i\big) = \varnothing$.

Положим $\Omega_{0n} = \Omega_n \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i$, $\mathcal{G}_0 = \widetilde{\Omega}_{0n} = \Omega_n \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} \bar{O}(E_i, \frac{1}{n})$, $\mathcal{G}_0' = \mathcal{G}_0 \setminus (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b)$, $\mathcal{E}_1 = E_1(n) = \partial\Omega_n$, $\mathcal{E}_i = E_i(n) = \bar{O}(E_i, \frac{1}{n})$, $i = 2, \ldots, m$, для $n \geqslant \widetilde{k}_0$.

Обозначим через $\widetilde{H}_{ij}(n)$ семейство всех локально спрямляемых кривых в $\mathcal{G}_0 = \widetilde{\Omega}_{0n}$, соединяющих $\mathcal{E}_i$ и $\mathcal{E}_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Замечание 2. При фиксированном $n \geqslant k_0$ заменим в определении семейств

$$H_{ij}(G), H_{ij}(k), \ldots, H_{ij}\big(k, k(1), \ldots, k(n_0)\big)$$

множество G на $\mathcal{G}_0$, E_i на $\mathcal{E}_i$, $i = 1, \ldots, m$. Полученные при этой замене семейства обозначим соответственно через

$$\mathcal{H}_{ij}(\mathcal{G}_0), \mathcal{H}_{ij}(k), \ldots, \mathcal{H}_{ij}\big(k, k(1), \ldots, k(n_0)\big).$$

Новые семейства используем в лемме 15.

Как известно (см. [9, лемма 2.3.4]), для заданного $\varepsilon \in (0,1)$ существует положительная непрерывная функция g в $\mathbb{R}^2$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} g^p\, w\, dx < \varepsilon,$$

где w – вес Макенхаупта на $\mathbb{R}^2$, который порождает вес ω на $\mathcal{R}$.

Положим $N \geqslant \max\limits_{\bar{\mathbb{R}}^2} N(x, G)$ (см. определение, введенное перед леммой 10)

$$\widetilde{g}(X) = \begin{cases} \frac{g(x)}{N}, & X \in G_0'' \text{ и } \operatorname{pr} X = x;\\ 0, & X \in \mathcal{R} \setminus G_0''. \end{cases}$$

Пусть $\rho \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) \cap L_+^{p,\omega}(G)$ и ρ непрерывна на G_0' (см. лемму 12). Тогда $\rho_1(X) = \max\limits_{G_0}\big(\rho(X), \widetilde{g}(X)\big)$ – непрерывная на G_0' и положительная функция на G_0'', $\rho_1 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big)$ и

$$\int\limits_{G_0} \rho_1^p\,\omega\,d\sigma < \int\limits_{G_0} \rho^p\,\omega\,d\sigma + \varepsilon.$$

Пусть теперь $\widetilde{\rho} \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big) \cap L_+^{p,\omega}(\mathcal{R})$ и $\widetilde{\rho}$ непрерывна на $\mathcal{R}_0'$ (см. лемму 13).

Далее, пусть Q_k, Ω_k, $\mathcal{B}_{0k}$, $\mathcal{D}_{0k}$ – множества, которые определены перед леммой 13 для $k \geqslant 1$. Построим окрестности

$$O(\partial Q_k, \beta_{1k}), \quad O(\partial\Omega_k, \beta_{2k})$$

компактов ∂Q_k, $\partial\Omega_k$, $k \geqslant 1$, замыкания которых попарно не пересекаются и не содержат точек из $\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b$.

Как и в доказательстве леммы 6, для $i = 1, 2$, $k \geqslant 1$, зададим на $\mathcal{R}$ непрерывные функции $q_{ik}(X) : \mathcal{R} \to [0,1]$, удовлетворяющие следующим требованиям: при $k = 1$

$$q_{11}(X) = \begin{cases} 0 & \text{на } \bar{O}(\partial Q_1, \frac{\beta_{11}}{4}); \\ 1 & \text{на } \mathcal{R} \setminus O(\partial Q_1, \frac{\beta_{11}}{2}); \end{cases}$$

$$q_{21}(X) = \begin{cases} 0 & \text{на } \bar{O}(\partial \Omega_1, \frac{\beta_{21}}{4}); \\ 1 & \text{на } \mathcal{R} \setminus O(\partial \Omega_1, \frac{\beta_{21}}{2}); \end{cases}$$

при $k \geqslant 2$

$$q_{1k}(X) = \begin{cases} 0 & \text{на } \bar{O}(\partial Q_{k-1}, \frac{\beta_{1,k-1}}{4}) \cup \bar{O}(\partial Q_k, \frac{\beta_{1k}}{4}); \\ 1 & \text{на } \mathcal{R} \setminus \Big(O(\partial Q_{k-1}, \frac{\beta_{1,k-1}}{2}) \cup O(\partial Q_k, \frac{\beta_{1k}}{2})\Big); \end{cases}$$

$$q_{2k}(X) = \begin{cases} 0 & \text{на } \bar{O}(\partial \Omega_{k-1}, \frac{\beta_{2,k-1}}{4}) \cup \bar{O}(\partial \Omega_k, \frac{\beta_{2k}}{4}); \\ 1 & \text{на } \mathcal{R} \setminus \Big(O(\partial \Omega_{k-1}, \frac{\beta_{1,k-1}}{2}) \cup O(\partial \Omega_k, \frac{\beta_{1k}}{2})\Big). \end{cases}$$

Если g_k – положительная непрерывная функция в $\mathbb{R}^2$, для которой $\int\limits_{\mathbb{R}^2} g_k^p\,w\,dx < \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$ и $N_k \geqslant \max\limits_{\bar{\mathbb{R}}^2} N(x, Q_k \cup \Omega_k)$, то положим для $k \geqslant 1$

$$g_{1k}(X) = \begin{cases} \frac{g_k(x)\cdot q_{1k}(X)}{N_k}, & X \in \mathcal{B}_{0k}'' \text{ и } \operatorname{pr} X = x; \\ 0, & X \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{B}_{0k}''. \end{cases}$$

$$g_{2k}(X) = \begin{cases} \frac{g_k(x)\cdot q_{2k}(X)}{N_k}, & X \in \mathcal{D}_{0k}'' \text{ и } \operatorname{pr} X = x; \\ 0, & X \in \mathcal{R} \setminus \mathcal{D}_{0k}''. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{B}''_{0k} = \mathcal{B}_{0k} \setminus \mathcal{R}_\infty$, $\mathcal{D}''_{0k} = \mathcal{D}_{0k} \setminus \mathcal{R}_\infty$, где $k \geqslant 1$.

Положим для $X \in \mathcal{R}$ $\widetilde{\rho}_1(X) = \max\limits_k \bigl\{\widetilde{\rho}(X), g_{1k}(X), g_{2k}(X)\bigr\}$. Тогда $\widetilde{\rho}_1(X)$ – непрерывная на $\mathcal{R}'_0$, положительная функция на $\mathcal{R}''_0$, $\widetilde{\rho}_1 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(\mathcal{R})\bigr) \cap L^{p,\omega}_+(\mathcal{R})$ и

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} \widetilde{\rho}_1^{\,p}\, \omega\, d\sigma < \int\limits_{\mathcal{R}_0} \widetilde{\rho}^{\,p}\, \omega\, d\sigma + \varepsilon.$$

Замечание 3. Из сказанного выше следует, что инфимум в определении модуля $m_{p,\omega}\bigl(\alpha H(G)\bigr)$ $\Bigl($в определении $m_{p,\omega}\bigl(\alpha H(\mathcal{R})\bigr)\Bigr)$ можно брать по допустимым функциям ρ, непрерывным в G'_0 (соответственно, в $\mathcal{R}'_0$) и положительным в G''_0 (соответственно, в $\mathcal{R}''_0$). Кроме того, в силу выбора функций $g(x)$, $g_k(x)$, $k \geqslant 1$, для любого компакта $K \subset \mathcal{R}''$ имеет место оценка $\inf\limits_{K\cap G_0} \rho > 0$ (соответственно, $\inf\limits_{K\cap \mathcal{R}_0} \rho > 0$). Здесь, по определению, если, например, $K \cap G_0 = \varnothing$, то $\inf\limits_{K\cap G_0} \rho = +\infty$.

Лемма 14. *Пусть функция ρ, $\rho \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(G)\bigr) \cap L^{p,\omega}_+(G_0)$, удовлетворяет условиям замечания 3. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ существуют число N и функция $\widetilde{\rho} \in L^{p,\omega}_+(G_0)$, $\widetilde{\rho} \geqslant \rho$ в G_0, такие, что для любой составной кривой $\gamma \in H_{ij}(k, k(1), \dots, k(n_0))$, где*

$$k,\, k(1), \dots, k(n_0) \geqslant N,$$

выполняются условия

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_{ij}(1 - 2\varepsilon),\ 1 \leqslant i < j \leqslant m.$$

Функция $\widetilde{\rho}$ непрерывна в G'_0, исключая замкнутое множество нулевой σ-меры, локально ограничена в G'_0 и $\widetilde{\rho} = \rho$ на $G'_0 \setminus \widetilde{B}$, где $\int\limits_{\widetilde{B}} \widetilde{\rho}^{\,p}\, \omega\, d\sigma < \varepsilon$, следовательно,

$$\int\limits_{G_0} \widetilde{\rho}\, \omega\, d\sigma \leqslant \int\limits_{G_0} \rho\, \omega\, d\sigma + \varepsilon.$$

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

1. Установим аналог леммы 14 в случае, когда в ней вместо семейств $H_{ij}(k, k(1), \dots, k(n_0))$ рассматриваются семейства $H_{ij}(k)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Возьмем семейство $H_{12}(G)$ и рассмотрим пару (E_1, E_2). Пусть $F_i^k =$

$O(E_i, \frac{1}{k})$, $k \geqslant k_0$ (см. определение $H_{ij}(k)$) – окрестности, монотонно исчерпывающие снаружи компакт E_i, $i = 1, 2$; $\mathcal{U}_k$, $k \geqslant k_0$ – монотонное исчерпание G_0 изнутри открытыми множествами с кусочно-гладкой границей и $G_0 \cap (\mathcal{R}_\infty \cup \mathcal{R}_b) \subset \mathcal{U}_k$, $k \geqslant k_0$.

Положим $W_{ik} = \bar{F}_i^k \setminus F_i^{k+1}$, $i = 1, 2$, $W_k = W_{1k} \cup W_{2k}$, $O_k = F_1^k \cup F_2^k$, $d_k = s\big(\partial O_k \cap G_0, \partial O_{k+1} \cap G_0\big)$, $k \geqslant k_0$.

Возьмем монотонно убывающую последовательность $\varepsilon_j \to 0$ при $j \to \infty$ такую, что $\varepsilon_{k_0} < 1$ и для $j \geqslant k_0$ (см. замечание 3)

$$2^{p+1} \sum_{j=k_0}^{\infty} \varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{m(m-1)}, \quad \varepsilon_j < \frac{d_j}{\alpha_{12}} \inf_{W_j \cap G_0} \rho, \quad j = k_0, k_0+1, \dots . \tag{27}$$

Пусть k_l, $l = k_0, k_0+1, \dots$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что

$$\int\limits_{B_l} \rho^p \, \omega \, d\sigma < \varepsilon_l^{p+1}, \tag{28}$$

где $B_l = (G_0 \setminus \mathcal{U}_{k_l}) \cap W_l$.

Положим $B_{12} = \bigcup\limits_{l=k_0}^{\infty} B_l$ и введем в рассмотрение функцию

$$\rho_{12} = \begin{cases} (1 + \frac{1}{\varepsilon_j})\rho, & X \in B_j, \quad j = k_0, k_{0+1}, \dots; \\ \rho, & X \in G_0 \setminus B_{12}. \end{cases}$$

Ясно, что функция ρ_{12} непрерывна в G_0', исключая замкнутое множество нулевой σ-меры, и локально ограничена в G_0'. Для этой функции выполняется неравенства $\rho_{12} \geqslant \rho$ в G_0'

$$\int\limits_{B_{12}} \rho_{12}^p \, \omega \, d\sigma = \sum_{j=k_0}^{\infty} \int\limits_{B_j} \rho_{12}^p \, \omega \, d\sigma \leqslant \sum_{j=k_0}^{\infty} \Big(1 + \frac{1}{\varepsilon_j}\Big)^p \int\limits_{B_j} \rho^p \, \omega \, d\sigma$$
$$< 2^p \sum_{j=k_0}^{\infty} \varepsilon_j < \frac{\varepsilon}{m(m-1)},$$

как следует из (27), (28). Отсюда

$$\int\limits_{G_0} \rho_{12}^p \, \omega \, d\sigma = \int\limits_{G_0 \setminus B_{12}} \rho_{12}^p \, \omega \, d\sigma + \int\limits_{B_{12}} \rho_{12}^p \, \omega \, d\sigma \leqslant \int\limits_{G_0} \rho^p \, \omega \, d\sigma + \frac{k\varepsilon}{m(m-1)}. \tag{29}$$

Докажем, что существует число $k \in \mathbb{N}$, для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{12}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon),$$

где γ – произвольная кривая из $H_{12}(k)$, соединяющая ∂F_1^k и ∂F_2^k в G_{0k}.

Если это не выполняется, то для любого $k \geqslant k_0$ существует кривая $\gamma_k \in H_{12}(k)$, соединяющая ∂F_1^k и ∂F_2^k в G_{0k}, такая, что $\int\limits_{\gamma_k} \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)$. С другой стороны, если для $k > j \geqslant k_0$ существует кривая $\gamma_k' \subset \gamma_k$, соединяющая ∂O_j и ∂O_{j+1} в $W_j \cap B_{12}$, то

$$d_j \cdot \inf_{W_j \cap G_0} \rho \leqslant \int\limits_{\gamma_k'} \rho\, ds = \Bigl(1 + \frac{1}{\varepsilon_j}\Bigr)^{-1} \int\limits_{\gamma_k'} \rho_{12}\, ds \leqslant \varepsilon_j \cdot \alpha_{12}(1-\varepsilon), \tag{30}$$

что противоречит (27). Следовательно, кривая γ_k' имеет общие точки с множеством $(G_0 \cap W_j) \setminus B_{12} = (G_0' \cap W_j) \setminus B_{12}$.

Пусть $X_1(j,k)$ $\bigl($соответственно, $X_2(j,k)\bigr)$ – точка некоторой связной части γ_k в $(G_0 \cap W_1 j) \setminus B_{12}$ $\bigl($соответственно, в $(G_0 \cap W_2 j) \setminus B_{12}\bigr)$. Выберем возрастающую последовательность $k_n \in \mathbb{N}$ такой, чтобы $X_i(k_0, k_n)$ сходились к некоторой точке $X_i(k_0) \in \overline{(G_0 \cap W_{k_0}) \setminus B_{12}}$, $i = 1, 2$. Обозначим последовательность γ_{k_n} через $\gamma_k(k_0)$, $k \geqslant 1$.

Так как ρ непрерывна в G_0', то можно найти однолистный открытый круг $V_i(k_0)$, $\bar{V}_i(k_0) \subset G_0'$, с центром в точке $X_i(k_0)$ такой, что для любого отрезка C в этом круге выполняется условие $\int\limits_C \rho\, ds < \alpha_{12} \frac{\varepsilon}{2^6}$. Можно считать, что кривая $\gamma_k(k_0)$ пересекает круг $V_i(k_0)$ для всех $k \geqslant 1$, $i = 1, 2$.

Аналогично, найдем подпоследовательность $\gamma_k(k_0+1)$ последовательности $\gamma_k(k_0)$ и открытые однолистные круги $V_i(k_0+1)$, $\bar{V}_i(k_0+1) \subset G_0'$, с центрами в точках $X_i(k_0+1) \in \overline{(G_0 \cap W_{i,k_0+1}) \setminus B_{12}}$, такие, что для любого отрезка C в этих кругах выполняется условие $\int\limits_C \rho\, ds < \alpha_{12} \frac{\varepsilon}{2^7}$ и каждая кривая $\gamma_k(k_0+1)$ пересекает эти круги, $k \geqslant 1$, $i = 1, 2$.

Продолжим этот процесс до бесконечности и рассмотрим диагональную последовательность $\gamma_{kk} = \gamma_k(k)$, где $k = k_0, k_0+1, \ldots$.

Заменим какую-либо связную часть γ_{kk}, содержащуюся в круге $V_i(j)$, двумя радиусами круга $V_i(j)$, идущими в некоторые две точки множества $\gamma_{kk} \cap \partial V_i(j)$. Проводим эти действия для $i = 1, 2$ и любых

$j = k_0, k_0+1, \ldots$. Обозначим полученную кривую через τ_k. Для этой кривой имеет место неравенство

$$\int\limits_{\tau_k} \rho\, ds < \alpha_{12}\Big(1 - \frac{3\varepsilon}{4}\Big) \text{ для всех } k > k_0.$$

Пусть Γ_{k_0} – семейство локально спрямляемых кривых в G_0, соединяющих точки $X_1(k_0)$ и $X_2(k_0)$, Γ_{ij} – семейство локально спрямляемых кривых в G_0, соединяющих точки $X_i(j)$ и $X_i(j+1)$, $i = 1, 2$, $j \geqslant k_0$.

Тогда

$$\inf_{C\in\Gamma_{k_0}} \int\limits_C \rho\, ds + \sum_{j=k_0}^{k-1} \inf_{C\in\Gamma_{1j}} \int\limits_C \rho\, ds + \sum_{j=k_0}^{k-1} \inf_{C\in\Gamma_{2j}} \int\limits_C \rho\, ds$$
$$< \int\limits_{\tau_k} \rho\, ds < \alpha_{12}\Big(1 - \frac{3\varepsilon}{4}\Big) \text{ для любого } k \geqslant k_0 + 1.$$

Значит,

$$\inf_{C\in\Gamma_{k_0}} \int\limits_C \rho\, ds + \sum_{j=k_0}^{\infty} \inf_{C\in\Gamma_{1j}} \int\limits_C \rho\, ds + \sum_{j=k_0}^{\infty} \inf_{C\in\Gamma_{2j}} \int\limits_C \rho\, ds$$
$$\leqslant \alpha_{12}\Big(1 - \frac{3\varepsilon}{4}\Big) \text{ для любого } k \geqslant k_0 + 1.$$

Выберем дуги $C_{k_0} \in \Gamma_{k_0}$, $C_{ij} \in \Gamma_{ij}$ так, чтобы

$$\int\limits_{C_{k_0}} \rho\, ds < \inf_{C\in\Gamma_{k_0}} \int\limits_C \rho\, ds + \alpha_{12}\frac{\varepsilon}{8}, \quad \int\limits_{C_{ij}} \rho\, ds < \inf_{C\in\Gamma_{ij}} \int\limits_C \rho\, ds + \alpha_{12}\frac{\varepsilon}{2^{j-k_0+4}},$$
$$i = 1, 2, \ j = k_0, k_0+1, \ldots .$$

Рассмотрим кривую $\gamma = \ldots + C_{1,k_0+1} + C_{1,k_0} + C_{k_0} + C_{2,k_0} + C_{2,k_0+1} + \ldots$. Она соединяет компакты E_1 и E_2 в G_0, локально спрямляема в G_0 в силу положительности ρ на любом компакте из G_0'', и удовлетворяет условию

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds = \int\limits_{C_{k_0}} \rho\, ds + \sum_{j=k_0}^{\infty} \int\limits_{C_{1j}\cup C_{2j}} \rho\, ds < \alpha_{12}\Big(1 - \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4}\Big) < \alpha_{12},$$

что противоречит требованию $\rho \in \mathrm{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big)$.

Следовательно, существует k_{12} такое, что для любой кривой $\gamma \in H_{12}(k)$, $k \geqslant k_{12}$, имеем неравенство $\int\limits_{\gamma} \rho_{12}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)$. Здесь мы учитываем, что семейство $H_{12}(k_{12})$ короче семейства $H_{12}(k)$.

Проводя такие же рассуждения для остальных семейств $H_{ij}(k)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, получим натуральные числа k_{ij}, множества B_{ij} и соответствующие им функции ρ_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant m$ с такими же свойствами, как у функции ρ_{12}. Положим $N_0 = \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} k_{ij}$, $\widetilde{\rho} = \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} \rho_{ij}$ в G_0, $\widetilde{B} = \bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} B_{ij}$.

Ввиду неравенства (29) и его аналогов для остальных функций ρ_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, нетрудно заметить, что функция $\widetilde{\rho}$ и множество $\widetilde{B}$ удовлетворяют условию леммы 14, если в ее формулировке заменить семейство $H_{ij}\big(k, k(1), \dots, k(n_0)\big)$ на $H_{ij}(k)$ и ε на $\frac{\varepsilon}{2}$.

2. Используя построения и рассуждения этапа 1, установим теперь аналог леммы 14 для семейства $H_{ij}\big(k, k(1)\big)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Положим $k_1 = N_0 + 2$ и рассмотрим семейство $H_{12}(k_1, n)$, где $n = k(1) \geqslant k_0$. Пусть $\varepsilon_1 \in (0,1)$. Покажем, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{12}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1),$$

где γ – произвольная кривая из семейства $H_{12}(k_1, n)$

Если это не выполняется, то для любого $n \geqslant k_0$ существует кривая $\gamma_n \in H_{12}(k_1, n)$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_n} \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1). \tag{31}$$

Отсюда, заменив в (30) γ_k на γ_n, получим, что кривая γ_n имеет общие точки с множеством $(G_0 \cap W_{N_0+1}) \setminus B_{12} = (G_0' \cap W_{N_0+1}) \setminus B_{12}$.

Пусть X_{1n} $\big($соответственно, $X_{2n}\big)$ – точка некоторой связной части кривой γ_n в $(G_0 \cap W_{1,N_0+1}) \setminus B_{12}$ $\big($соответственно, $(G_0 \cap W_{2,N_0+1}) \setminus B_{12}\big)$. Извлекая, если надо, подпоследовательность, будем считать, что X_{in} сходится при $n \to \infty$ к некоторой точке $X_i \in \overline{(G_0 \cap W_{N_0+1}) \setminus B_{12}}$, $i = 1, 2$. По построению, $X_i \in G_{0,k_1}$, $X_i \notin G_{0,N_0}$, $i = 1, 2$.

Более того, поскольку функция ρ_{12} локально ограничена в G_0', то можно найти открытый однолистный круг V_i, $\bar{V}_i \subset G_{0,k_1}$, $\bar{V}_i \cap G_{0,N_0} =$

$\varnothing$, с центром в точке X_i такой, что для любого отрезка C в этом круге имеет место равенство $\int\limits_C \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2^4}$.

Можно считать, что кривая γ_n пересекает круг V_i для всех $n \geqslant k_0$, $i = 1, 2$.

Заменим какую-либо связную часть кривой γ_n, содержащуюся в круге V_i, двумя радиусами круга V_i, идущими в некоторые две точки множества $\gamma_n \cap \partial V_i$, $i = 1, 2$, $n \geqslant k_0$.

За новыми кривыми сохраним прежние обозначения γ_n, $n \geqslant k_0$. По построению, $\gamma_n \in H_{12}(k_1, n)$, $X_1, X_2 \in \gamma_n$, и вместо (31) они удовлетворяют неравенству

$$\int\limits_{\gamma_n} \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\Big(1 - \frac{3}{4}\varepsilon_1\Big). \tag{32}$$

В силу выбора k_1 кривая $\gamma_n \notin H_{12}(k_1)$, следовательно, γ_n состоит из двух подкривых γ_n^+, γ_n^-, где γ_n^+ соединяет $\bar{F}_1^{k_1}$ с точкой $X_+(n) \in \partial B\big(Z^1, \frac{1}{n}\big)$, γ_n^- соединяет $\bar{F}_2^{k_1}$ с точкой $X_-(n) \in \partial B\big(Z^1, \frac{1}{n}\big)$, $\gamma_n \setminus \{X_+(n), X_-(n)\} \subset G_{0,k_1} \setminus \bar{B}(Z^1, \frac{1}{n})$.

Для $n > j \geqslant k_0$ пусть $X_+(j,n)$ – некоторая точка пересечения кривой γ_n^+ с $\partial B\big(Z^1, \frac{1}{j}\big)$, $X_-(j,n)$ – некоторая точка пересечения γ_n^- с $\partial B\big(Z^1, \frac{1}{j}\big)$.

Выберем возрастающую последовательность n_j такой, чтобы последовательность $X_+(k_0, n_j)$ сходилась к точке $X_{k_0}^+$ на $\partial B\big(Z^1, \frac{1}{k_0}\big)$, $X_-(k_0, n_j)$ сходилась к точке $X_{k_0}^-$ на $\partial B\big(Z^1, \frac{1}{k_0}\big)$.

Обозначим последовательность γ_{n_j} через $\gamma_n(k_0)$, $n \geqslant 1$. Так как функция ρ_{12} локально ограничена в G_0', то можно найти открытый однолистный круг $V_{k_0}^+$ (соответственно, круг $V_{k_0}^-$) с центром в точке $X_{k_0}^+$ (в точке $X_{k_0}^-$), $\bar{V}_{k_0}^+ \subset G'_{0,k_1}$ ($\bar{V}_{k_0}^- \subset G'_{0,k_1}$) такой, что для любого отрезка C в этом круге $\int\limits_C \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{2^6}$. Можно считать, что кривая $\gamma_n(k_0)$ пересекает круги $V_{k_0}^+$, $V_{k_0}^-$ для всех $n \geqslant 1$.

Аналогично, построим подпоследовательность $\gamma_n(k_0+1)$ последовательности $\gamma_n(k_0)$ и открытые однолистные круги $V_{k_0+1}^+$, $V_{k_0+1}^-$, $\overline{V_{k_0+1}^+ \cup V_{k_0+1}^-} \subset G'_{0,k_1}$ с центрами соответственно в точках $X_{k_0+1}^+$, $X_{k_0+1}^- \subset \partial B\big(Z^l, \frac{1}{k_0+1}\big)$ такие, что для любого отрезка C в этих кругах выполняется неравенство $\int\limits_C \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{2^7}$ и каждая кривая $\gamma_n(k_0+1)$ пересекает эти круги для всех $n \geqslant 1$.

Продолжим этот процесс до бесконечности и рассмотрим диагональную последовательность $\gamma_{nn} = \gamma_n(n)$, $n \geqslant k_0$. Заменим какую-либо связную часть γ_{nn}, содержащуюся в круге V_j^+ $\big($соответственно, в круге $V_j^-\big)$, где $n \geqslant j \geqslant k_0$, двумя радиусами круга V_j^+ (круга V_j^-), идущими в некоторые две точки последовательности $\gamma_{nn} \cap \partial V_j^+$ (соответственно, $\gamma_{nn} \cap \partial V_j^-$). Обозначим полученную кривую через χ_n. Для этой кривой имеем неравенство

$$\int\limits_{\chi_n} \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\Big(1 - \frac{3}{4}\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_1}{8}\Big), \quad \text{где } n \geqslant k_0.$$

Пусть $\Gamma_{k_0-1}^+$ – семейство локально спрямляемых кривых в G_{0,k_1}, соединяющих X_1 и $X_{k_0}^+$; Γ_j^+ – семейство локально спрямляемых кривых в G_{0,N_0}, соединяющих X_j^+ и X_{j+1}^+; $\Gamma_{k_0-1}^-$ – семейство локально спрямляемых кривых в G_{0,k_1}, соединяющих X_2 и $X_{k_0}^-$; Γ_j^- – семейство локально спрямляемых кривых в G_{0,N_0}, соединяющих X_j^- и X_{j+1}^-, $j \geqslant k_0$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=k_0-1}^{n-1} \inf_{C \in \Gamma_j^+} \int\limits_C \rho_{12}\, ds + \sum_{j=k_0-1}^{n-1} \inf_{C \in \Gamma_j^-} \int\limits_C \rho_{12}\, ds \\
&\leqslant \int\limits_{\chi_n} \rho_{12}\, ds < \alpha_{12}(1-\varepsilon)\Big(1 - \frac{5}{8}\varepsilon_1\Big), \quad \text{где } n \geqslant k_0.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\sum_{j=k_0-1}^{\infty} \inf_{C \in \Gamma_j^+} \int\limits_C \rho_{12}\, ds + \sum_{j=k_0-1}^{\infty} \inf_{C \in \Gamma_j^-} \int\limits_C \rho_{12}\, ds \leqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)\Big(1 - \frac{5}{8}\varepsilon_1\Big). \tag{33}$$

Выберем $C_j^+ \in \Gamma_j^+$, $C_j^- \in \Gamma_j^-$ так, чтобы

$$\int\limits_{C_j^+} \rho_{12}\, ds < \inf_{C \in \Gamma_j^+} \int\limits_C \rho_{12}\, ds + \alpha_{12}(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{2^{j+6}},$$

$$\int\limits_{C_j^-} \rho_{12}\, ds < \inf_{C \in \Gamma_j^-} \int\limits_C \rho_{12}\, ds + \alpha_{12}(1-\varepsilon)\frac{\varepsilon_1}{2^{j+6}},$$

для $j \geqslant k_0 - 1$.

Рассмотрим кривую $\chi = C^+_{k_0-1}+C^+_{k_0}+C^+_{k_0+1}+\ldots+\{Z^1\}+\ldots+C^-_{k_0+1}+C^-_{k_0}+C^-_{k_0-1}$. Она соединяет точки X_1, X_2 в G_{0,k_1} и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\chi} \rho_{12}\, ds \leqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)\Big(1-\frac{\varepsilon_1}{2}\Big) < \alpha_{12}(1-\varepsilon).$$

Это противоречит тому, что кривая χ содержит кривую $\widetilde{\chi} \in H_{12}(N_0)$, для которой в силу выбора N_0 имеет место оценка

$$\int\limits_{\widetilde{\chi}} \rho_{12}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon).$$

Следовательно, существует $\widetilde{n}_{12}$ такое, что для любой составной кривой $\gamma \in H_{12}(k_1, \widetilde{n}_{12})$ имеет место неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho_{12}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1).$$

Отсюда $\int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)$, где $\widetilde{\rho} = \max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} \rho_{ij}$ из этапа 1.

Проводя такие же построения для остальных семейств $H_{ij}(k_1, n)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, найдем натуральное число N_1 такое, что для всех $k \geqslant N_1$ и любой составной кривой $\gamma \in H_{ij}(k, N_1)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, справедлива оценка

$$\int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_{ij}(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1). \tag{34}$$

Более того, увеличивая, если надо, число N_1, оценку (34) можно распространить на семейства $H_{ij}(k_1, N_1, Z^l)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, $l = 2, 3, \ldots, n_0$. Это позволяет завершить доказательство леммы следующим образом.

3. Рассмотрим семейство $H_{ij}\big(k_2, N_2, k(2)\big)$ и $\varepsilon_2 \in (0,1)$, где $k_2 = N_1 + 2$, $k(2) \geqslant k_0$. Применяя рассуждения этапа 1, найдем натуральное число $N_2 \geqslant N_1$ такое, что

$$\int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho}\, ds \geqslant (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2)$$

для всех $\gamma \in H_{ij}(k, N_1, N_2), H_{ij}(k, N_1, N_2, Z^{l_1}, Z^{l_2})$, $k \geqslant N_2$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, $Z^{l_1} \neq Z^{l_2}$ и $Z^{l_1}, Z^{l_2} \in \{Z^1, \ldots, Z^{n_0}\}$.

Продолжая эти действия дальше, получим для $\varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{n_0} \in (0,1)$ натуральные числа $N_2 \leqslant N_3 \leqslant N_4 \leqslant \ldots \leqslant N_{n_0}$ такие, что

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant (1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\ldots(1-\varepsilon_{n_0}) \tag{35}$$

для всех $\gamma \in H_{ij}(k, N_1, N_2, \ldots, N_{n_0})$, где $k \geqslant N_{n_0}$ и $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Выберем числа $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n_0} \in (0,1)$ так, чтобы $(1-\varepsilon)(1-\varepsilon_1)\ldots(1-\varepsilon_{n_0}) \geqslant (1-2\varepsilon)$ и положим $N = \max(N_1, \ldots, N_{n_0})$. Тогда из (35) следует, что

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant (1-2\varepsilon)$$

для всех $\gamma \in H_{ij}\bigl(k, k(1), \ldots, k(n_0)\bigr)$, где $k, k(1), \ldots, k(n_0) \geqslant N$ и $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Тем самым, лемма доказана. □

Установим теперь аналог леммы 14 для конфигурации $\alpha H(\mathcal{R})$. Для его формулировки используем обозначения, приведенные непосредственно перед замечанием 2 и в нем самом.

Лемма 15. *Пусть функция ρ_1, $\rho_1 \in \mathrm{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(\mathcal{R})\bigr) \cap L_+^{p,\omega}(\mathcal{R}_0)$, удовлетворяет условиям замечания 3. Тогда для любого $\varepsilon_0 \in (0,1)$ существует натуральное число $N_0 \geqslant \widetilde{k}_0$ такое, что для всех $n \geqslant N_0$ и любой кривой $\gamma \in \widetilde{H}_{ij}(n)$ выполняются условия*

$$\begin{gathered} \int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho_1^p\, \omega\, d\sigma < \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{0n}} \rho_1^p\, \omega\, d\sigma + \varepsilon_0, \\ \int\limits_\gamma \rho_1\, ds \geqslant \alpha_{ij}(1-\varepsilon_0), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m. \end{gathered} \tag{36}$$

Для функции $\rho = \frac{\rho_1}{1-\varepsilon_0}$ на $\mathcal{R}_0$, фиксированного $n \geqslant N_0$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ существуют $N \in \mathbb{N}$, функция $\widetilde{\rho} \in L_+^{p,\omega}(\mathcal{G}_0)$, $\widetilde{\rho} \geqslant \rho$ на $\mathcal{G}_0$, такие, что для любой составной кривой $\gamma \in \mathcal{H}_{ij}\bigl(k, k(1), \ldots, k(n_0)\bigr)$ (см. замечание 2), где $k, k(1), \ldots, k(n_0) \geqslant N$, справедливы неравенства

$$\int\limits_\gamma \widetilde{\rho}\, ds \geqslant \alpha_{ij}(1-2\varepsilon), \quad 1 \leqslant i < j \leqslant m.$$

Функция $\widetilde{\rho}$ непрерывна на $\mathcal{G}_0'$, исключая замкнутое множество нулевой σ-меры, локально ограничена на $\mathcal{G}_0'$ и $\widetilde{\rho} = \rho$ на $\mathcal{G}_0' \setminus \widetilde{B}$, где

$\int\limits_{\widetilde{B}} \widetilde{\rho}^p \,\omega\, d\sigma < \varepsilon$, *следовательно,*

$$\int\limits_{\mathcal{G}_0} \widetilde{\rho}^p \,\omega\, d\sigma < \int\limits_{\mathcal{G}_0} \rho^p \,\omega\, d\sigma + \varepsilon.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на два этапа.

1. В силу выбора $\widetilde{k}_0$ и последовательности $\{\Omega_n\}$ для $n \geqslant \widetilde{k}_0$ имеем:

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n\setminus\Omega_1} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma + \int\limits_{\Omega_{01}} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma;$$

$$\bigcup_{i=2}^{m} \bar{O}\Big(E_i, \frac{1}{n}\Big) \subset \Omega_{01} = \Omega_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{m} E_i;$$

$$\widetilde{\Omega}_{0n} = \Omega_n \setminus \bigcup_{i=2}^{m} \bar{O}\Big(E_i, \frac{1}{n}\Big) = (\Omega_n \setminus \Omega_1) \cup \Big(\Omega_1 \setminus \bigcup_{i=2}^{m} \bar{O}\Big(E_i, \frac{1}{n}\Big)\Big).$$

Поскольку множества $\bigcup\limits_{i=2}^{m} O(E_i, \frac{1}{n})$ исчерпывают снаружи при $n \to \infty$ компакт $\bigcup\limits_{i=2}^{m} E_i$, то

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n\setminus\Omega_1} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma + \int\limits_{\Omega_{01}} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_n\setminus\Omega_1} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_1\setminus\bigcup_{i=2}^{m} \bar{O}(E_i, \frac{1}{n})} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{0n}} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma.\end{aligned}$$

Поэтому для $\varepsilon_0 \in (0,1)$ можно указать $N(\varepsilon_0) \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\int\limits_{\mathcal{R}_0} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma < \int\limits_{\widetilde{\Omega}_{0n}} \rho_1^p \,\omega\, d\sigma + \varepsilon_0$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon_0)$, что доказывает первое неравенство в (36).

Установим второе неравенство в (36) для $\widetilde{H}_{12}(n)$. Докажем, что существует $n \in \mathbb{N}$, для которого справедливо неравенство

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1 \, ds \geqslant \alpha_{12}(1 - \varepsilon_0),$$

где γ – произвольная кривая из $\widetilde{H}_{12}(n)$. Напомним, что семейство $\widetilde{H}_{12}(n)$ состоит из локально спрямляемых кривых в $\widetilde{\Omega}_{0n}$, соединяющих $E_1(n)$ и $E_2(n)$, где $E_i(n) = \bar{O}(E_i, \frac{1}{n})$ (см. определения перед замечанием 2). Если это не выполняется, то для любого $n \geqslant \widetilde{k}_0$ существует кривая $\gamma_n \in \widetilde{H}_{12}(n)$ такая, что

$$\int\limits_{\gamma_n} \rho_1 \, ds < \alpha_{12}(1 - \varepsilon_0).$$

Пусть теперь $n > j \geqslant \widetilde{k}_0$ и $X_1(j, n)$ – первая точка пересечения кривой γ_n с компактом $\partial E_1(j)$, $X_2(j, n)$ – последняя точка пересечения кривой γ_n с компактом $\partial E_2(j)$, если совершить обход γ_n в направлении от $E_2(n)$ к $E_1(n)$.

Выберем возрастающую последовательность n_k такой, что $X_i(\widetilde{k}_0, n_k)$ сходится к некоторой точке $X_i(\widetilde{k}_0) \in \partial E_i(\widetilde{k}_0) \cap \mathcal{R}_0'$, $i = 1, 2$. Обозначим последовательность γ_{n_k} через $\gamma_n(\widetilde{k}_0)$, $n \geqslant 1$. Так как функция ρ_1 непрерывна в $\mathcal{R}_0'$, то можно найти открытый однолистный круг $V_i(\widetilde{k}_0) \subset \mathcal{R}_0'$ с центром в точке $X_i(\widetilde{k}_0)$ такой, что для любого отрезка C в этом круге выполнено условие

$$\int\limits_{C} \rho_1 \, ds < \alpha_{12} \frac{\varepsilon}{2^6}.$$

Можно считать, что кривая $\gamma_n(\widetilde{k}_0)$ пересекает $V_i(\widetilde{k}_0)$ для всех $n \geqslant 1$, $i = 1, 2$. Аналогично, найдем подпоследовательность $\gamma_n(\widetilde{k}_0 + 1)$ последовательности $\gamma_n(\widetilde{k}_0)$ и открытый однолистный круг $V_i(\widetilde{k}_0 + 1) \subset \mathcal{R}_0'$ с центром в точке $X_i(\widetilde{k}_0 + 1) \in \partial E_i(\widetilde{k}_0 + 1) \cap \mathcal{R}_0'$ такой, что для любого отрезка C в этом круге выполнено условие

$$\int\limits_{C} \rho_1 \, ds < \alpha_{12} \frac{\varepsilon}{2^7}$$

и кривая $\gamma_n(\widetilde{k}_0 + 1)$ пересекает этот круг, $n \geqslant 1$, $i = 1, 2$.

Продолжая этот процесс до бесконечности и рассуждая дальше так же как при доказательстве леммы 14 (см. этап 1), построим кривую $\gamma \in H_{12}(\mathcal{R})$ такую, что

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1 \, ds < \alpha_{12}.$$

Это противоречит условию $\rho_1 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big)$. Следовательно, существует $n_{12} \in \mathbb{N}$ такое, что при $n \geqslant n_{12}$

$$\int\limits_{\gamma} \rho_1 \, ds \geqslant \alpha_{12}(1-\varepsilon_0) \quad \text{для всех } \gamma \in \widetilde{H}_{12}(n).$$

Проведя аналогичные рассуждения для остальных семейств $\widetilde{H}_{ij}(n)$, $n \geqslant \widetilde{k}_0$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, получим натуральные числа n_{ij} с требуемыми свойствами. Положим $N_0 = \max\big\{\max\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m} n_{ij}, N(\varepsilon_0)\big\}$. Тогда для $n \geqslant N_0$ и любой кривой $\gamma \in \widetilde{H}_{ij}(n)$, $1 \leqslant i < j \leqslant m$, будут выполнены неравенства (36).

2. Фиксируем $n \geqslant N_0$ и положим $\rho = \frac{\rho_1}{1-\varepsilon_0}$. Тогда

$$\rho \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)\big),$$

где $\alpha\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ определено в замечании 2. Применяя лемму 14 к конфигурации $\alpha\mathcal{H}(\mathcal{G}_0)$ вместо $\alpha H(G)$ с функцией $\rho = \frac{\rho_1}{1-\varepsilon_0}$, получим утверждение леммы 15. $\square$

§3. Равенство емкости конденсатора и модуля конфигурации

Установим основной результат работы.

Теорема 2. *Имеют место равенства*

$$m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) = C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big),$$

$$m_{p,\omega}\big(\alpha H(\mathcal{R})\big) = C_{p,\omega}\big(\partial\mathcal{R}, E_2, \dots, E_m, \mathcal{R}\big), \quad \text{где} \ \ \partial\mathcal{R} \neq \varnothing.$$

Доказательство. Проведем доказательство только для конфигурации $\alpha H(G)$, для $\alpha H(\mathcal{R})$ доказательство проводится аналогично с применением лемм 13 и 15.

Ввиду следствия 1, достаточно установить, что

$$m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) \geqslant C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big).$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$. Применяя леммы 12 и 14, найдем функцию $\widetilde{\rho} \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big)$ и натуральное число N такие, что выполняются условия

$$\int\limits_{G_{0N}} \widetilde{\rho}^{p} \, \omega \, d\sigma < m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) + \varepsilon, \ \int\limits_{\gamma} \widetilde{\rho} \, ds \geqslant \alpha_{ij}(1-2\varepsilon)$$

для всех $\gamma \in H_{ij}\bigl(k, k(1), \ldots, k(n_0)\bigr)$, где $k, k(1), \ldots, k(n_0) \geqslant N$. Здесь функция $\widetilde{\rho}$ локально ограничена на G_0', непрерывна на $G_0' \setminus K$, где K – замкнутое множество в G_0 и $\sigma(K) = 0$.

Положим

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{\widetilde{\rho}}{1-2\varepsilon}, & X \in G_{0N} \setminus \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} B\Bigl(Z^i, \frac{1}{N}\Bigr)\Bigr); \\ 0, & X \in \mathcal{R} \text{ и } X \notin G_{0N} \setminus \Bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{n_0} B\Bigl(Z^i, \frac{1}{N}\Bigr)\Bigr). \end{cases}$$

Семейство $H_{ij}\bigl(k, k(1), \ldots, k(n_0)\bigr)$, в котором $k(1), \ldots, k(n_0)$ заменим на $k \geqslant N$, обозначим через H_{ijk}, где $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Конфигурацию $\bigl(\alpha_{12}H_{12k}, \alpha_{13}H_{13k}, \ldots, \alpha_{m,m-1}H_{m,m-1,k}\bigr)$ обозначим через $\alpha H(k)$. Определим $\operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(k)\bigr)$ аналогично $\operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(G)\bigr)$. По построению, $\rho_0 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(k)\bigr) \cap \operatorname{adm}_{p,\omega}\bigl(\alpha H(G)\bigr)$ для всех $k \geqslant N$ и

$$\int\limits_{G_{0N}} \rho_0^p \,\omega\, d\sigma = m_{p,\omega}\bigl(\alpha H(G)\bigr) + o(1),\ \varepsilon \to 0. \tag{37}$$

Положим $\widetilde{G}_{0,N+1} = G_{0,N+2} \cup \bigl(\bigcup\limits_{i=1}^{N} O(E_i, \frac{1}{N+1})\bigr)$. Введем функцию u_i, равную δ_i на $\bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$ и $\delta_i + \inf\limits_{\gamma_X} \int\limits_{\gamma_X} \rho_0\, ds$ при $x \in \widetilde{G}_{0,N+1} \setminus \bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$, где инфимум берется по всем локально спрямляемым кривым γ_X в $\widetilde{G}_{0,N+1} \setminus \bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$, соединяющим точку X с окрестностью $\bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$. Если точку $X \in \widetilde{G}_{0,N+1} \setminus \bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$ нельзя соединить в $\widetilde{G}_{0,N+1}$ локально спрямляемой кривой с $\bar{O}(E_i, \frac{1}{N+2})$, то положим $u_i(X) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \delta_i$.

Отметим, что свойства функции вида $\inf\limits_{\gamma_X} \int\limits_{\gamma_X} \rho_0\, ds$ хорошо известны [17, с. 45]. В частности, эта функция локально липшицева в $\widetilde{G}_{0,N+1}$ в силу локальной ограниченности функции ρ_0. Модуль градиента $u_i(X)$ не превосходит функции ρ_0 в точках, являющихся одновременно точками дифференцируемости $u_i(X)$ и точками непрерывности ρ_0.

В силу выбора функции ρ_0, функция $u_i(X) = \delta_i$ в окрестности E_i и $u_i(X) \geqslant \delta_i + \alpha_{ij} = \delta_i + |\delta_j - \delta_i| \geqslant \delta_j$ при $X \in O(E_j, \frac{1}{N})$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $j \neq i$, u_i локально липшицева и $|\nabla u_i| \leqslant \rho_0$ σ-почти везде на $\widetilde{G}_{0,N+1}$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Кроме того, $u_i(X)$ равна постоянной C_l для $X \in B(Z^l, \frac{1}{N+2})$. Положим $u(X) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} u_i(X)$ на $\widetilde{G}_{0,N+1}$.

Тогда $u(X) \in \mathrm{Adm}_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big)$ и из (37) получаем

$$C_{p,\omega}\big(\{\delta_i E_i\}, G\big) \leqslant \int\limits_G |\nabla u|^p\,\omega\,d\sigma = \int\limits_{G_0} |\nabla u|^p\,\omega\,d\sigma$$
$$\leqslant \int\limits_{G_{0N}} \rho_0^p\,\omega\,d\sigma \leqslant m_{p,\omega}\big(\alpha H(G)\big) + o(1),$$

так как легко видеть, что $|\nabla u| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} |\nabla u_i|$.

Переходя к пределу в этом неравенстве при $\varepsilon \to 0$, установим требуемое утверждение. □

Следствие 5. *Полагая в теореме* 2 $\mathcal{R} = \mathbb{R}^2$, $G \subset \mathbb{R}^2$, $\omega = 1$ *на* $\mathbb{R}^2$, $p = 2$, *получим решение задачи В. Н. Дубинина* [5].

Литература

1. В. В. Асеев, Б. Ю. Султанов, *Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных фунций класса* W_n^1, препринт АН СССР, Сиб. отд., Ин-т математики, Новосибирск, 1989.
2. Г. В. Кузьмина, *Общая теорема коэффициентов Дженкинса и метод модулей семейств кривых.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **429** (2014), 140–156.
3. В. Н. Дубинин, *Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов.* — УМН, **67**, No. 4 (2012), 3–88.
4. В. Н. Дубинин, *Производная Шварца и покрытие дуг пучка окружностей голоморфными функциями.* — Мат. заметки **98**, No. 6 (2015), 865–871.
5. V. Dubinin, *Some unsolved problems about condenser capacities on the plane.* — New Trends and Open Problems in Complex Analysis and Dynamical Systems (2017). Ser.V:Trends in Mathematics.
6. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, М., 1968.
7. С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функции*, Наука, 1964.
8. P. Pugach, V. Shlyk, *Moduli, capacity, BV-functions on the Riemann surfaces.* — Lobachevskii J. Math. **38**, No. 2 (2017), 338–351.
9. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.
10. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, М., 1987.
11. С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, М., 1977.
12. B. Fuglede, *Extremal length and functional completion*, Acta Math. **98** (1957), 171–219.
13. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Новосибирск, 2002.
14. О. Форстер, *Римановы поверхности*, М., 1980.

15. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity.* — Trans. Amer. Math. Soc. **126**, No. 3 (1967), 460–473.
16. В. А. Зорич, *Математический анализ. Часть I*, М., 1981.
17. М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, М., 1968.
18. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения*, Новосибирск, 1983.

Pugach P. A., Shlyk V. A. Weighted modules and capacities on a Riemann surface.

On a Riemann surface (in the wide sense of the word in the terminology of Hurwitz–Courant) the weighted capacity and module (with a weight of Muokenhoupt) of a condenser with a finite number plates are defined. The equality of the capacity and module of a condenser is proved. This has solved one Dubinin's problem.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии
ул. Стрелковая, 16в
Владивосток, Россия, 690034
E-mail: 679097@mail.ru

Поступило 11 июля 2017 г.

Владивостокский филиал
Российской таможенной академии
ул. Стрелковая, 16в
Владивосток, Россия, 690034
E-mail: shlykva@yandex.ru