Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

**В. Г. Журавлев**

# ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МАТРИЦЫ ПИЗО И СОВМЕСТНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

## Введение

**0.1. Симплекс-модулярный алгоритм.** В [1] построен симплекс-модулярный алгоритм ($\mathcal{SM}$-алгоритм) разложения алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ в многомерные цепные дроби

$$\mathcal{SM}: \quad \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \quad \longrightarrow \quad \alpha \quad \text{при} \quad a \to +\infty, \tag{0.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Основу указанного алгоритма составляют:

1) $d$-мерные минимальные рациональные симплексы $\mathbf{s}$, содержащие точку $\alpha$;

и

2) матрицы Пизо $P_\alpha$, обладающие свойством

$$\mathrm{P}_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

где $\lambda > 1$ – некоторая единица Пизо поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. Это означает, что все ее сопряженные $\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(d+1)}$, кроме $\lambda^{(1)} = \lambda$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda^{(2)}| < 1, \ldots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$.

Каждый такой симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \ldots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i}\Big),$$

где $i = 0, 1, \ldots, d$, со знаменателями $\mathbf{Q}_i > 0$, удовлетворяющими условиям

$$\text{НОД}\,(\mathbf{P}_{i1}, \ldots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1,$$

---

*Ключевые слова*: многомерные цепные дроби, симплекс-модульный алгоритм, наилучшие приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

и обладает свойством минимальности: симплекс $\mathbf{s}$ не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \tag{0.3}$$

никакой точки $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \left(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \ldots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}}\right)$, координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где $\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_d$. Минимальные симплексы $\mathbf{s}$ являются многомерным обобщением отрезков Фарея. Двумерный случай исследован в [2–8] и [9] – для произвольной размерности. Используя свойство минимальности (0.3) было доказано, что подходящие дроби $\frac{P_a}{Q_a}$ в (0.1) являются многомерными дробями Фарея, дающими наилучшие приближения для точки $\alpha$.

Что касается второй составляющей $\mathcal{SM}$-алгоритма – матриц Пизо $P_\alpha$ из (0.2), то для их нахождения была указана общая схема, использующая системы основных единиц соответствующего поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. При этом предполагалось, что точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор алгебраических действительных чисел чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ являются полными. Последнее означает выполнение условия $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$. Здесь $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, ..., \alpha_d]$ обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – поле, полученное расширением поля $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Из определения, в частности, следует иррациональность точки $\alpha$, т.е. линейная независимость $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

**0.2. Подходящие дроби и рекуррентные соотношения.** Пусть матрица Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ из (0.2) имеет характеристический многочлен

$$\mathrm{ch}_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0.$$

Зададим бесконечную последовательность из рациональных точек

$$\frac{P_a}{Q_a} = \Big(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\Big) \tag{0.4}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, координаты каждой из которых имеют один и тот же знаменатель $Q_a$, с помощью рекуррентного соотношения

$$\begin{aligned} P_{a+d+1,i} &= b_d P_{a+d,i} + \ldots + b_1 P_{a+1,i} + b_0 P_{a,i}, \\ Q_{a+d+1} &= b_d Q_{a+d} + \ldots + b_1 Q_{a+1} + b_0 Q_a \end{aligned} \tag{0.5}$$

для $i = 1, \ldots, d$ и $a = 0, 1, 2, \ldots$

**0.3. Основной результат.** В теореме 9.1 доказано, что можно так выбрать матрицу Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ в равенстве (0.2) и начальные условия в отвечающем данной матрице рекуррентном соотношении (0.5), при которых будет выполняться следующее утверждение.

*Если $\alpha$ – полная точка степени $d+1$, то для любого фиксированного $\theta>0$ существует матрица Пизо $\mathrm{P}_\alpha$, производящая последовательность подходящих дробей* (0.4) *с приближением*

$$\left|\alpha_1-\frac{P_{a,1}}{Q_a}\right|+\ldots+\left|\alpha_d-\frac{P_{a,d}}{Q_a}\right|\leqslant\frac{c_{\alpha,\theta}}{Q_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{0.6}$$

*для всех $a\geqslant a_{\alpha,\theta}$. Здесь константы $a_{\alpha,\theta}>0$ и $c_{\alpha,\theta}>0$ не зависят от $a$.*

Алгебраические числа $\alpha_1,\ldots,\alpha_d$, участвующие в приведенном выше неравенстве (0.6), относятся к классу плохо приближающихся чисел. Относительно них известен следующий результат (см., например, [10, гл. V-3]).

*Существует такая постоянная $c^*=c^*_\alpha>0$, зависящая только от точки $\alpha$, что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha_1-\frac{P_1}{Q}\right|+\ldots+\left|\alpha_d-\frac{P_d}{Q}\right|\geqslant\frac{c^*}{Q^{1+\frac{1}{d}}} \tag{0.7}$$

*для любых целых чисел $P_1,\ldots,P_d$ и $Q>0$.*

Сравнение двух приведенных выше результатов показывет, что приближения (0.6) можно за счет выбора матриц Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ в (0.2) получать сколь угодно близкими к оптимальному (0.7). Однако, в этом месте требуется дополнительное уточнение. Основываясь на свойстве минимальности (0.3) симплексов $\mathbf{s}$, в теореме 8.1 доказано, что при любом выборе матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ получаются наилучшие приближения относительно полиэдральных норм, задаваемых симплексами $\mathbf{s}$. В приведенном контексте приближениям вида (0.6) отвечают симплексы $\mathbf{s}$, имеющие форму близкую к шару.

**0.4. История вопроса.** В [1] было доказано существование матриц Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ из (0.2), позволяющих получать приближения вида (0.6) с показателем $\theta<1/d$. После того, как был разработан общий симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных чисел в многомерные цепные дроби [9], появилась возможность строить матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha$

с любым наперед заданным параметром $\eta$. Это позволило для алгебраических иррациональностей $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ произвольной степени $d+1$ получать приближения (0.6) с любым фиксированным $\theta > 0$. В неравенствах (0.7) данный показатель $\theta = 0$. Симплекс-модулярным алгоритмом такое значение возможно только для полей вещественных квадратичных и кубических комплексных.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка [11]. Для вычисления подходящих дробей в неравенствах (0.6) также применяются рекуррентные соотношения (0.5), но уже произвольного порядка $d+1$. В многомерном случае такая связь приближений с рекуррентными последовательностями была обнаружена в [12] (см. также обзоры [13, 14]).

## §1. Приведение векторов к каноническому виду

**1.1. Унимодулярные матрицы.** Обозначим через $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$ *группу унимодулярных матриц*, состоящую из целочисленных квадратных матриц $U$ размерности $t$ с определителем $\det U = \pm 1$.

**Лемма 1.1.** *Пусть дана произвольная строка $u = (*_1 \ldots *_t)$ длины $t$ с целыми рациональными коэффициентами. Если*

$$\text{НОД} \quad (*_1, \ldots, *_t) = 1, \tag{1.1}$$

*то строку $u$ можно дополнить до унимодулярной матрицы*

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_t \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_t(\mathbb{Z}), \tag{1.2}$$

*где $u_1 = u$.*

**Доказательство.** Существует *полная решетка*

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}[u_1, u_2, \ldots, u_t] \quad \subseteq \quad \mathbb{Z}^t, \tag{1.3}$$

для которой целочисленные векторы $u_1, u_2, \ldots, u_t$ линейно независимы над $\mathbb{R}$. В качестве фундаментальной области $\mathcal{F} \simeq \mathbb{R}^t/\mathcal{U}$ решетки $\mathcal{U}$ выберем множество

$$\mathcal{F} \quad = \{x_1u_1 + x_2u_2 + \ldots + x_tu_t; \quad 0 \leqslant x_i < 1\}. \tag{1.4}$$

Оно является параллелоэдром.

Пусть $f = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}]$ – индекс подрешетки $\mathcal{U}$ в $\mathbb{Z}^t$. Как обычно, полагаем $\operatorname{vol} \mathbb{R}^t/\mathbb{Z}^t = 1$. При таком нормировании индекс $f$, объем фундаментальной области (1.4) и определитель матрицы (1.2) связаны соотношениями

$$f = \operatorname{vol} \mathcal{F} = |\det U|. \tag{1.5}$$

Поэтому выполняется равенство

$$\mathcal{U} = \mathbb{Z}^t, \quad \text{если} \quad f = 1, \tag{1.6}$$

и тогда в этом случае, согласно соотношениям (1.5), матрица $U$ из (1.2) будет унимодулярной. Предположим, что индекс $f > 1$. Далее мы покажем, как можно перестраивать базис $u_1, u_2, \dots, u_t$ решетки (1.3) так, чтобы это приводило к уменьшению индекса $f$.

Если $f > 1$, то существует ненулевой вектор

$$v \in \mathcal{F} \cap \mathbb{Z}^t. \tag{1.7}$$

Целочисленный вектор $v$ не может принадлежать ребру $\mathbf{u}_1$ параллелоэдра $\mathcal{F}$, направленному вдоль вектора $u_1$, т.к. по условию (1.1) вектор $u_1$ является примитивным. Вектор $v \neq 0$ также не может принадлежать сразу всем ребрам $\mathbf{u}_i$, $i \neq 1$, параллелоэдра $\mathcal{F}$. Пусть $v$ не принадлежит, например, ребру $\mathbf{u}_i$. Тогда от решетки $\mathcal{U}$ перейдем к новой решетке

$$\mathcal{U}' = \mathbb{Z}[u'_1, u'_2, \dots, u'_t], \tag{1.8}$$

где $u'_i = v$ и $u'_j = u_j$ для остальных $j \neq i$. В силу (1.7) и (1.8) объемы $\operatorname{vol} \mathcal{F}' < \operatorname{vol} \mathcal{F}$, а тогда согласно (1.5) и индексы будут удовлетворять неравенству

$$f' = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}'] \quad < f. \tag{1.9}$$

По указанному выше алгоритму продолжаем процесс

$$\mathcal{U} \to \mathcal{U}' \to \dots \to \mathcal{U}^{(k)},$$

заканчивающийся ввиду неравенства (1.9) на некотором шаге $k$, когда соответствующий индекс

$$f^{(k)} = [\mathbb{Z}^t : \mathcal{U}^{(k)}] = 1. \tag{1.10}$$

Сопоставляя (1.10) с (1.6) и (1.5), приходим к равенствам $\mathcal{U}^{(k)} = \mathbb{Z}^t$ и $|\det U| = 1$, из которых седует, что отвечающая решетке $\mathcal{U}^{(k)}$ матрица

$$U^{(k)} = \begin{pmatrix} u_1^{(k)} \\ u_2^{(k)} \\ \vdots \\ u_t^{(k)} \end{pmatrix}$$

будет унимодулярной. По построению у ней первая строка $u_1^{(k)} = u$, что доказывает лемму 1.1. □

**1.2. Ранг вектора и его каноническое представление.** Попробуем в смежном классе $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})\beta$ произвольного вектора $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ с вещественными координатами $\beta_i$ найти канонического представителя.

Предположим, что координаты вектора $\beta$ линейно зависимы

$$u_1'\beta_1' + \ldots + u_t'\beta_t' \equiv 0 \mod \mathbb{Z} \tag{1.11}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$, где $\beta_i' = \beta_i$ и коэффициенты $u_1', \ldots, u_t'$ – целые взаимно простые числа, не все равные нулю. По лемме 1.1 найдется унимодулярная матрица $U' = \begin{pmatrix} u' \\ \vdots \end{pmatrix}$ из $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$ с первой строкой $u' = (u_1' \ldots u_t')$. Из сравнения (1.11) следует

$$U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2'' \\ \vdots \\ \beta_t'' \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}. \tag{1.12}$$

Здесь вектор $\beta'$ записан в виде столбца. Если координаты вектора $\beta'' = (\beta_2'', \ldots, \beta_t'')$ снова окажутся линейно зависимы

$$u_2''\beta_2'' + \ldots + u_t''\beta_t'' \equiv 0 \mod \mathbb{Z},$$

то выбираем матрицу вида $U'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u'' \\ 0 & \vdots \end{pmatrix}$ с блоком $\begin{pmatrix} u'' \\ \vdots \end{pmatrix}$ из группы $\mathrm{GL}_{t-1}(\mathbb{Z})$. После умножения получаем сравнение

$$U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \beta_3''' \\ \vdots \\ \beta_t''' \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}.$$

Продолжая рассуждение, приходим к следующему сравнению

$$U^{(t')} \cdots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \beta_{t'+1}^{(t'+1)} \\ \vdots \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}, \tag{1.13}$$

в котором координаты вектора $\beta^{(t'+1)} = (\beta_{t'+1}^{(t'+1)}, \ldots, \beta_t^{(t'+1)})$ будут линейно независимы над $\mathbb{Z}$ по $\mathrm{mod}\ \mathbb{Z}$, или – к сравнению

$$U^{(t')} \cdots U''U'\beta' \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_t^{(t'+1)} \end{pmatrix} \mod \mathbb{Z}, \tag{1.14}$$

где элемент $\beta_t^{(t'+1)}$ – некоторое рациональное число.

Определим *ранг* $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\,\beta$ вектора или точки $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ как ранг модуля

$$\mathbb{Z}_\beta = \mathbb{Z}[\beta_1, \ldots, \beta_t, 1] \tag{1.15}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$. Вектор или точку $\alpha$ назовем *иррациональными*, если выполняется условие:

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\,\alpha = t + 1 \tag{1.16}$$

или, что равносильно –

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{1.17}$$

Для вектора $\beta = \beta'$ из сравнений (1.13) и (1.14) следует

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta^{(t'+1)} = t - t' + 1 \tag{1.18}$$

в иррациональном случае (1.13) и соответственно –

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta^{(t'+1)} = 1 \tag{1.19}$$

в рациональном случае (1.14)

**Предложение 1.1.** *Пусть ранг* (1.15) *вещественного вектора* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ *равен*

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta = t' + 1, \tag{1.20}$$

*где* $0 \leqslant t' \leqslant t$. *Тогда найдется такая матрица* $U$ *из унимодулярной группы* $\mathrm{GL}_t(\mathbb{Z})$, *что выполняется сравнение*

$$\beta \equiv U\gamma \mod \mathbb{Z}. \tag{1.21}$$

*Здесь* $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$ *– столбец высоты* $t$ *с блоком* $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$, *элементы которого линейно независимы над* $\mathbb{Z}$ *по* mod $\mathbb{Z}$ *в случае* $t' \geqslant 1$; *и* $\gamma' = (\gamma_1)$, *где* $\gamma_1$ *– рациональное число, если* $t' = 0$.

**Доказательство** вытекает из сравнений (1.13), (1.14) и равенств (1.18), (1.19). □

**Следствие 1.1.** *Пусть* $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_t)$ *– любой вещественный вектор и* $\eta > 0$ *– произвольное наперед заданное сколь угодно малое число. Тогда найдется такое натуральное число* $q$, *что будет выполняться неравенство*

$$||q\beta||_s = ||q\beta_1|| + \ldots + ||q\beta_t|| \leqslant \eta, \tag{1.22}$$

*где* $||x||$ *обозначает расстояние от* $x$ *до ближайшего целого числа.*

**Доказательство.** Пусть $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\, \beta \geqslant 2$ и $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma' \end{pmatrix}$ – столбец из (1.21). Так как элементы блока $\gamma' = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{t'} \end{pmatrix}$ линейно независимы над кольцом $\mathbb{Z}$ по mod $\mathbb{Z}$, то последовательсть $\{q\gamma'\}$ для $q = 1, 2, 3, \ldots$ всюду плотно распределена на торе $\mathbb{T}^{t'}$. Поэтому для любого $\eta' > 0$ найдется $q$ с условием

$$||q\gamma||_s = ||q\gamma'||_s = ||q\gamma_1|| + \ldots + ||q\gamma_{t'}|| \leqslant \eta'. \tag{1.23}$$

Тогда найдется такая зависящая лишь от матрицы $U$ граница $\eta'_U > 0$, что при выполнении условия $0 < \eta' < \eta'_U$ из (1.23) и сравнения (1.21) для $\beta$ будет следовать оценка

$$||q\beta||_s = ||U(q\gamma)||_s \leqslant c_U \; ||q\gamma||_s \leqslant c_U \, \eta' \tag{1.24}$$

с некоторой константой $c_U > 0$, зависящей только от $U$. Выбирая $\eta' = \min\{\eta/c_U, \eta'_U\}$, получаем неравенство (1.22).

Если $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ \beta = 1$, то согласно предложению 1.1 блок $\gamma' = (\gamma_1)$ является рациональным числом $a/b$. Можем считать $b \geqslant 1$. В данном случае выбираем $q = b$. В силу сравнения (1.21) имеем

$$||q\beta||_s = ||U(q\gamma)||_s = 0$$

и сразу приходим к неравенству (1.22). □

**Замечание 1.1.** В [9] был построен симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби, применимый к векторам $\gamma'$ с условием $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}}\ \gamma' = t' + 1$. Если воспользоваться неравенствами (1.23) и (1.24), то данный алгоритм можно использовать и для нахождения приближений в случае произвольных векторов $\beta$.

## §2. Единицы алгебраических полей

**2.1. Основные единицы.** Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \tag{2.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [15]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *полную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, где $t = r + c - 1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$, имеющей максимально возможный *ранг* $t$. Зададим отображение

$$\varepsilon \mapsto x(\varepsilon) = \left(\ln|\varepsilon^{(1)}|, \ldots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|\right) \tag{2.2}$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для $\varepsilon$ и $\varepsilon^{(r+1)}, \ldots, \varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon$. Отображение (2.2) будет вложением

$x : \mathcal{E} \hookrightarrow \mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций
$$x(\varepsilon \cdot \varepsilon') = x(\varepsilon) + x(\varepsilon'). \tag{2.3}$$

**2.2. Единицы Пизо.** Единицу $\zeta \in \mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:
$$\zeta = \zeta^{(1)} > 1 \text{ и } |\zeta^{(i)}| < 1 \text{ для остальных сопряжений } i > 1. \tag{2.4}$$
Обозначим через $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо $\zeta$ из группы $\mathcal{E}$. Из определения (2.4) следует замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно умножения $\zeta \cdot \zeta' \in \mathcal{P}$ для любых $\zeta, \zeta' \in \mathcal{P}$. Поэтому множество $\mathcal{P}$ образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (2.4).

**Предложение 2.1.** 1. *Если ранг $t \geqslant 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ содержит единицу Пизо* (2.4) *и, значит, $\mathcal{P} \neq \varnothing$.*

2. *Любая единица Пизо $\zeta \in \mathcal{P}$ имеет степень*
$$\deg(\zeta) = d + 1. \tag{2.5}$$
*Здесь степень $\deg(\zeta)$ числа $\zeta$ определяется равенством $\deg(\zeta) = \deg \mathbb{Q}(\zeta)$, где справа указана степень $\deg \mathbb{Q}(\zeta) = [\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$.*

**Доказательство** см. [1]. □

**2.3. Локализованные единицы Пизо.** Из определения отображения (2.2) следует, что образ $\mathcal{L} = x(\mathcal{E})$ группы единиц $\mathcal{E}$ содержится в гиперплоскости
$$P \quad = \{x \in \mathbb{R}^{t+1}; \quad \mathbf{n} \cdot x = 0\}, \tag{2.6}$$
где $\mathbf{n} \cdot x$ – скалярное произведение $x$ с вектором $\mathbf{n} = (1, \ldots, 1)$ размерности $t+1$. Подмножество $\mathcal{L} \subset P$ предствляет собою *полную решетку* в пространстве (2.6) с $\mathbb{Z}$*-базисом* $x(\varepsilon_1), \ldots, x(\varepsilon_t)$. Данное множество также образует базис в $P$, но уже относительно $\mathbb{R}$.

Вектор
$$\mathbf{d} = (d, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{r-1}, \underbrace{-2, \ldots, -2}_{c}) \tag{2.7}$$
принадлежит гиперплоскости $P$. Поэтому он разложим
$$\mathbf{d} = \beta_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + \beta_t x(\varepsilon_t) \tag{2.8}$$

по базису решетки $\mathcal{L}$ с некоторыми вещественными коэффициентами $\beta_1, \ldots, \beta_t$. По следствию 1.1 для любого произвольного наперед заданного сколь угодно малого числа $\eta > 0$ найдутся такие целые числа $q \geqslant 1$ и $p_1, \ldots, p_t$, что будет выполняться неравенство

$$|q\beta - p|_s = |q\beta_1 - p_1| + \ldots + |q\beta_t - p_t| \leqslant \eta \tag{2.9}$$

в метрике $|x|_s = |x_1| + \ldots + |x_t|$ для $x = (x_1, \ldots, x_t)$ из $\mathbb{R}^t$.

Выберем единицу

$$\zeta = \varepsilon_1^{p_1} \cdots \varepsilon_t^{p_t}. \tag{2.10}$$

Для нее, согласно свойству (2.3), имеем

$$x(\zeta) = p_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + p_t x(\varepsilon_t). \tag{2.11}$$

Из (2.7) и (2.8) следует равенство

$$q\mathbf{d} \quad = q\beta_1 x(\varepsilon_1) + \ldots + q\beta_t x(\varepsilon_t),$$

из которого и (2.11) находим разность

$$q\mathbf{d} - x(\zeta) = (q\beta_1 - p_1)x(\varepsilon_1) + \ldots + (q\beta_t - p_t)x(\varepsilon_t).$$

Запишем векторы

$$x(\varepsilon_i) = (x_1(\varepsilon_i), \ldots, x_{t+1}(\varepsilon_i)) \tag{2.12}$$

в координатах пространства $\mathbb{R}^{t+1}$. Тогда разность векторов $q\mathbf{d} - x(\zeta)$ в силу (2.9) оценивается как

$$|q\mathbf{d} - x(\zeta)|_s \leqslant \eta', \tag{2.13}$$

где справа обозначили $\eta' = \eta\ (t+1)\mathrm{max}_\varepsilon$ и

$$\mathrm{max}_\varepsilon = \max_{\substack{1 \leqslant i \leqslant t \\ 1 \leqslant j \leqslant t+1}} |x_j(\varepsilon_i)|. \tag{2.14}$$

Если ввести обозначение

$$\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_{t+1}) = x(\zeta) - q\mathbf{d},$$

то для вектора $x(\zeta)$ получим представление

$$x(\zeta) = q\mathbf{d} + \varrho, \tag{2.15}$$

при этом координаты вектора $\varrho$ по (2.13) удовлетворяют неравенствам

$$|\varrho_1| \leqslant \eta', \quad \ldots, \quad |\varrho_t| \leqslant \eta'. \tag{2.16}$$

По определению (2.2) записываем

$$x(\zeta) = (\ln|\zeta^{(1)}|, \ln|\zeta^{(2)}|, \ldots, \ln|\zeta^{(r)}|, 2\ln|\zeta^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\zeta^{(r+c)}|), \tag{2.17}$$

а по (2.7) имеем

$$q\mathbf{d} = (qd, -q, \ldots, -q, -2q, \ldots, -2q). \tag{2.18}$$

Поэтому сравнивая координаты данных векторов и используя (2.15) и (2.17), (2.18), приходим к следующим формулам

$$\ln \zeta = \ln|\zeta^{(1)}| = qd + \varrho_1 \tag{2.19}$$

и

$$\ln|\zeta^{(i)}| = -q + \varrho_i \quad \text{для остальных} \quad i \geqslant 2. \tag{2.20}$$

Из приведенных формул, в частности, следует

$$\ln \zeta^{1/d} + \ln|\zeta^{(i)}| = \varrho_i', \tag{2.21}$$

где

$$\varrho_i' = \varrho_1/d + \varrho_i. \tag{2.22}$$

Из (2.21) выводим связь между $\zeta$ и ее сопряженными $\zeta^{(i)}$:

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d} \, \exp(\varrho_i') \tag{2.23}$$

для всех $i \geqslant 2$. Здесь для показателя $\varrho_i'$, согласно (2.22) и (2.16), выполнятся оценка

$$|\varrho_i'| \leqslant 2\eta'. \tag{2.24}$$

Перепишем равенство (2.23) в более удобной форме

$$|\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta_i}, \tag{2.25}$$

где $i \geqslant 2$ и $\theta_i = \varrho_i'/\ln \zeta$.

**Предложение 2.2.** *Пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t\}$ – некоторая полная система основных единиц вещественного алгебраического поля $\mathbb{F}$ из* (2.1) *степени $d+1$, $\zeta$ – единица* (2.10)*, зависящая от $\eta > 0$, и $\zeta^{(i)}$ – ее сопряженные. Тогда существует такая константа $\eta_\varepsilon > 0$, зависящая от выбора системы единиц $\varepsilon$, что выполняются следующие свойства*:

1) *если параметр $\eta$ принадлежит интервалу*

$$0 < \eta < \eta_\varepsilon, \tag{2.26}$$

*то $\zeta$ является единицей Пизо* (2.4);

2) *сопряженные $\zeta^{(i)}$, где $\zeta = \zeta^{(1)}$, связаны соотношением*

$$\max_{2 \leqslant i \leqslant t} |\zeta^{(i)}| = \zeta^{-1/d+\theta} \tag{2.27}$$

*с показателем*

$$0 < \theta \leqslant c_\varepsilon \eta, \tag{2.28}$$

*где константа* $c_\varepsilon > 0$ *не зависит от выбора параметра* $\eta$ *из* (2.26).

**Доказательство.** Удобно начать с доказательства второго утверждения. Принимая во внимание (2.24) и (2.25), в качестве показателя $\theta$ в равенстве (2.27) выберем

$$\theta = \max_{2\leqslant i\leqslant t+1} \theta_i = \frac{1}{\ln\zeta} \max_{2\leqslant i\leqslant t+1} \varrho_i'. \tag{2.29}$$

Из (2.13) и (2.14) получаем неравенства

$$\max_{2\leqslant i\leqslant t+1} \varrho_i' \leqslant 2\eta' \leqslant 2\eta\,(t+1)\max{}_\varepsilon.$$

Поэтому $\theta \leqslant c_\varepsilon\eta$, где

$$c_\varepsilon = \frac{2}{\ln\zeta}\,(t+1)\max{}_\varepsilon, \tag{2.30}$$

что доказывает правое неравенство в (2.28).

Для доказательства левого неравенства воспользуемся нормой

$$\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta) = \zeta^{(1)}\cdots\zeta^{(r)}\cdot|\zeta^{(r+1)}|^2\cdots|\zeta^{(r+c)}|^2 = \pm 1. \tag{2.31}$$

Оценивая величину $|\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)|$ с помощью формулы (2.27), получаем

$$1 = |\mathrm{Norm}_{\mathbb{F}/\mathbb{Q}}(\zeta)| \leqslant \zeta\,(\zeta^{-1/d+\theta})^{r-1+2c} = \zeta\,(\zeta^{-1/d+\theta})^d = \zeta^{d\theta},$$

откуда следует неравенство $\theta > 0$.

Осталось проверить, что $\zeta$ является единицей Пизо. Если параметр $\eta > 0$ выбирать меньше некоторой границы $\eta_\varepsilon > 0$, то из формул (2.19) и (2.20) будут вытекать неравенства $\ln\,\zeta = \ln|\zeta^{(1)}| > 0$ и $\ln|\zeta^{(i)}| < 0$ для $2 \leqslant i \leqslant t+1$, из которых, в свою очередь, будет следовать, что $\zeta$ удовлетворяет всем условиям в определении (2.4) единиц Пизо. □

Числа $\zeta = \zeta_\eta > 1$, отвечающие параметру $\eta$ из интервала (2.26) будем называть *локализованными единицами Пизо*. Их основное свойство состоит в том, что модули всех сопряженных $\zeta^{(i)}$ содержатся в некоторой окрестности

$$\zeta^{-1/d} - \delta_\eta \leqslant |\zeta^{(i)}| \leqslant \zeta^{-1/d} + \delta_\eta \tag{2.32}$$

для $2 \leqslant i \leqslant t+1$, где величена отклонения $\delta_\eta \downarrow 0$, если $\eta \to 0$. Свойство локализации (2.32) единиц Пизо $\zeta$ вытекает из представления (2.15) и неравенств (2.16).

## §3. Модульные матрицы Пизо

**3.1. Модули.** Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ – единица Пизо (2.4). По предложению 2.1 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{3.1}$$

с полем (2.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{3.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : \quad x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{3.3}$$

Из определения (3.2) вытекает, что отображение (3.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется унимодулярная целочисленная матрица $U_\zeta$ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{3.4}$$

где слева записано произведение матрицы $U_\zeta$ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.5}$$

высоты $d+1$. Матрица $U_\zeta$ называется *матрицей предствления* элемента $\zeta$ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

**3.2. Матрица перехода $T$.** Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d] \tag{3.6}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (3.6), будем называть *полными*. Для полной точки $\alpha$ характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{3.7}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (3.6) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Из (3.1) и (3.6), в частности, следует иррациональность (1.17) точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, а из (3.7) – равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки $\alpha$ ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \tag{3.8}$$

над полем $\mathbb{Q}$. Если $\alpha$ – полная точка, то из (3.6) и (3.7) следует $\deg \alpha = d + 1$.

Далее, пусть $T$ – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{3.9}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Матрица перехода $T$ имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица $T$ обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

**3.3. Модульные матрицы.** Воспользуемся (3.9) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (3.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{3.11}$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = T U_\zeta T^{-1}, \tag{3.12}$$

сопряженной унимодулярной матрице $U_\zeta$. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (3.6) матрицу, обладающую свойством (3.11), назовем *модульной матрицей.*

**3.4. Унимодулярные модульные матрицы.** *Уровень*

$$l(T) = t \tag{3.13}$$

невырожденной рациональной матрицы $T$ определяется как наименьшее натуральное число $t$ с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы $U_\zeta$ по модулю $t$ – это такое наименьшее натуральное число $\nu$, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{3.14}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число $\nu$ существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

В [1] доказано следующее утверждение.

**Предложение 3.1.** 1. *Пусть $t$ – уровень* (3.13) *матрицы $T$ и $\nu$ – показатель унимодулярной матрицы $U_\zeta$ по модулю $t$. Тогда матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{3.15}$$

*является унимодулярной.*

2. *Пусть $\mathcal{M}_\alpha$ – произвольный полный модуль* (3.6) *из поля $\mathbb{F}$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{3.16}$$

*где $\widehat{\alpha}$ – столбец* (3.10) *и*

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \tag{3.17}$$

— *единица Пизо* (2.4).

Матрицу $\mathrm{P}_\alpha$ из (3.15) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо.* Если $\zeta$ является локализованной единицей Пизо (2.32), то $\mathrm{P}_\alpha$ будем также называть *локализованной матрицей Пизо.*

## §4. Аппроксимация

**4.1. Разложение модульной матрицы Пизо.** Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (3.10) и $\widehat{\zeta}$ из (3.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \ldots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \ldots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{4.1}$$

– порядка $d+1$. Матрица $Z$ невырождена и в силу равенства (3.9) можем записать

$$A = TZ. \tag{4.2}$$

Поэтому матрица $A$ также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис ($A$-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть $\mathrm{P}_\alpha$ – модульная матрица Пизо. Из (3.15) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A \quad = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \ldots \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) \quad = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \ldots & 0 \\ & \ldots & \\ 0 & \ldots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Отсюда для матрицы $\mathrm{P}_\alpha$ выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{4.4}$$

**4.2. Линейные отображения модульной матрицей Пизо.** Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^d$ соответствующий ему столбец $\widehat{x}$ разложим

$$\widehat{x} = Ax' \tag{4.5}$$

по $A$-базису, где $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{d+1} \end{pmatrix}$. Используя разложения (4.4) и (4.5), имеем

$$\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{x} \quad = A\Lambda^a A^{-1}\widehat{x} \quad = A\Lambda^a x' \quad = A \begin{pmatrix} \lambda_1^a x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где обозначили $\lambda_j = \lambda^{(j)}$. Теперь умножая на матрицу $A$, окончательно получаем формулу

$$P_\alpha^a \widehat{x} \quad = \begin{pmatrix} \Lambda_1^a \\ \vdots \\ \Lambda_d^a \\ \Lambda_{d+1}^a \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda_1^a x'_1 + \ldots + \alpha_{1,d+1}\lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \ldots \\ \alpha_{d1}\lambda_1^a x'_1 + \ldots + \alpha_{d,d+1}\lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \\ \lambda_1^a x'_1 + \ldots + \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

где $\Lambda_i^a$ – линейные формы от $\lambda_1^a, \ldots, \lambda_{d+1}^a$ и $\alpha_{ij}$ – коэффициенты матрицы $A = (\alpha_{ij})$. Из определения (4.1) следует

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{d1} = \alpha_d \tag{4.7}$$

равны коэффициентам столбца $\widehat{\alpha}$ из (3.10); и у матрицы $A$ коэффициенты последней строки $\alpha_{d+1,j} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, d+1$. Из последних равенств вытекает вид формы $\Lambda_{d+1}^a$.

**4.3. Дробно-линейные преобразования.** Определим дробно-линейные преобразования в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $M = (a_{ij})$ – вещественная квадратная матрица порядка $d+1$ и $x \in \mathbb{R}^d$, то полагаем

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\Lambda_1(M,x)}{\Lambda_{d+1}(M,x)}, \ldots, \frac{\Lambda_d(M,x)}{\Lambda_{d+1}(M,x)}\right), \tag{4.8}$$

где

$$\Lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$$

– линейные неоднородные формы для $i = 1, \ldots, d+1$. Преобразования (4.8) обладают свойством ассоциативности

$$M_1\langle M_2\langle x\rangle\rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x\rangle, \tag{4.9}$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначено произведение матриц $M_1$ и $M_2$. Поскольку $E_{d+1}\langle x\rangle = x$ для единичной матрицы $E_{d+1}$ порядка $d+1$, то из свойства (4.9) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x\rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x'\rangle. \tag{4.10}$$

Используя формулу (4.6) и определение (4.8), приходим к формуле

$$\mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle = \left(\frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a}, \ldots, \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a}\right). \tag{4.11}$$

**4.4. Оценка расстояния.** Нас будет интересовать расстояние

$$|\alpha - \mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle|_s \quad = \left|\alpha_1 - \tfrac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a}\right| + \ldots + \left|\alpha_d - \tfrac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a}\right| \tag{4.12}$$

между точкой

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \tag{4.13}$$

и точкой $\mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle$ из (4.11).

Чтобы привести явную формулу для расстояния, нам потребуются следующие обозначения

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\lambda_j| = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\lambda^{(j)}|, \tag{4.14}$$

где $\lambda$ определено в (3.17), и

$$l_\alpha(x) = \ln \frac{2|x'|_s}{|x'_1|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}} \tag{4.15}$$

для вектора $x'$ из (4.5), (4.6).

**Предложение 4.1.** *Пусть точка $x \in \mathbb{R}^d$ имеет первую координату $x'_1 \neq 0$ в $A$-базисе* (4.5) *и степень $a$ удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(x). \tag{4.16}$$

*Тогда расстояние между точкой $\alpha$ из* (4.13) *и образом $\mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle$ точки $x$ из* (4.11) *относительно дробно-линейного преобразования с модульной матрицей Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ из* (3.15) *оценивается как*

$$|\alpha - \mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle|_s \leqslant c_{\alpha,x}\Big(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\Big)^a. \tag{4.17}$$

*Здесь константа*

$$c_{\alpha,x} = 4d\,|A|_{\max}\frac{|x'|_s}{|x'_1|} \tag{4.18}$$

*не зависит от степени $a$,*

$$|A|_{\max} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant d+1} |\alpha_{ij}| \tag{4.19}$$

– max-норма *матрицы $A$ и $\lambda_{2,\max}$ определено в* (4.14).

**Доказательство** приведено в [1]. □

## §5. Минимальные симплексы

**5.1. Минимальные рациональные симплексы.** Пусть открытый $d$-мерный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i}\Big) \tag{5.1}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ с условием

$$\mathbf{Q}_i > 0, \quad \text{НОД}\,(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1. \tag{5.2}$$

Назовем $\mathbf{s}$ *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \tag{5.3}$$

никакой точки

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \Big(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}}\Big), \tag{5.4}$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где использовали обозначение

$$\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_d. \tag{5.5}$$

В [1] доказаны следующие свойства минимальных симплексов.

**Предложение 5.1.** *Следующие утверждения равносильны*:

1) *симплекс* $\mathbf{s}$ *минимальный*;

2) *матрица*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{d1} \\ & & \dots & \\ \mathbf{P}_{0d} & \mathbf{P}_{1d} & \dots & \mathbf{P}_{dd} \\ \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_d \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

*унимодулярна*;

3) *симплекс* $\mathbf{s}$ *имеет объем*

$$\operatorname{vol}\mathbf{s} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant d} \mathbf{Q}_i\Big)^{-1}. \tag{5.7}$$

**5.2. Точка Фарея.** Рассматриваемый здесь минимальный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины (5.1). Следуя аналогии с отрезками Фарея [16], симметризуем данные вершины, используя операцию сложения Фарея для дробей. В результате получим точку Фарея, содержащуюся в симплексе $\mathbf{s}$.

Пусть симплекс $\mathbf{s}$ имеет вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$, где $i = 0, 1, \dots, d$, вида (5.1), (5.2). Определим сумму вершин

$$\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d} \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \ldots + \mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_d}, \tag{5.8}$$

используя операцию *сложения Фарея* дробей

$$\frac{a}{b} \widehat{+} \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}. \tag{5.9}$$

Используя операцию (5.8), определим *точку Фарея*

$$\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}} = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d}. \tag{5.10}$$

**Предложение 5.2.** *Минимальный симплекс* $\mathbf{s}$ *содержит*

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \tag{5.11}$$

*единственную точку* $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ *со знаменателем* $1 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{\max}$ *и, значит, – единственную точку со знаменателем* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\max}$, *где значение* $\mathbf{Q}_{\max}$ *было определено в* (5.5).

**Доказательство** см. в [1]. □

## §6. Унимодулярный базисный симплекс

**6.1. Линейные унимодулярные преобразования.** Основной областью для нас будет замкнутый $d$-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \ldots, 0), \quad e_1 = (1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_d = (0, \ldots, 1)$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем $\pm 1$ *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец.

Группа $G_0$ действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$U\alpha = V\alpha + L, \tag{6.2}$$

где $\alpha$ рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа $G_0$ соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

**6.2. Унимодулярные симплексы.** В следующем предложении, доказанном в [1], содержатся важные для дальнейшего базисные симплексы.

**Предложение 6.1.** *Если* $\alpha$ *– иррациональная точка* (1.17)*, то существует такая матрица* $U \in G_0$*, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{6.3}$$

*где* $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Симплекс $\triangle_U^d$ из (6.3) назовем *базисным.* Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

## §7. Симплексы Пизо

**7.1. Базисный симплекс.** Выберем в качестве s *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle_U^d \tag{7.1}$$

из предложения 6.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{7.2}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \ldots, d$. Векторы

$$v_i' = v_i - v_0 = Ve_i \tag{7.3}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (7.1) имеет объем

$$\mathrm{vol}\,\triangle = \frac{1}{d!}.$$

Из этого равенства и предложения 5.1 следует, что симплекс $\triangle$ будет минимальным.

**7.2. Симплексы Пизо.** Подействуем на симплекс $\triangle$ дробно-линейным преобразованием $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$, где $a = 1, 2, 3, \ldots$, с матрицей Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ из (3.15). Чтобы исследовать новый симплекс, воспользуемся формулой связи

$$\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle = \mathrm{pr}\ \mathrm{P}_\alpha^a\,\triangle, \tag{7.4}$$

где

$$\mathrm{pr}: \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

– проекция множества векторов $\mathbb{R}^{d+1}_* \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с координатой $x_{d+1} \neq 0$ на пространство $\mathbb{R}^d$. Здесь $V = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \dots, \widehat{v}_d\}$ обозначает целочисленный базис из векторов (3.5), соответствующих вершинам (7.2).

Согласно (7.2) координаты векторов данного базиса образуют унимодулярную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Поскольку матрица Пизо $P_\alpha$ унимодулярная, то матрица

$$\mathrm{P}_\alpha^a S = \begin{pmatrix} P_{a,01} & P_{a,11} & \dots & P_{a,d1} \\ & & \dots & \\ P_{a,0d} & P_{a,1d} & \dots & P_{a,dd} \\ Q_{a,0} & Q_{a,1} & \dots & Q_{a,d} \end{pmatrix} \tag{7.7}$$

также унимодулярная. Принимая во внимание формулу (4.6) и условие $Q_i = 1$, можем записать значения элементов нижней строки $Q_{a,i}$ матрицы $\mathrm{P}_\alpha^a S$ в явном виде

$$Q_{a,i} = \lambda_1^a v'_{i1} + \ldots + \lambda_{d+1}^a v'_{i,d+1}, \tag{7.8}$$

где $v'_{ij}$ – координаты вектора $\widehat{v}'_i$ из разложения

$$\widehat{v}_i = A\widehat{v}'_i \tag{7.9}$$

вектора $\widehat{v}_i$ по $A$-базису из (4.1).

Введем обозначения

$$l_\alpha(\triangle) = \max_{0\leqslant i\leqslant d} l_\alpha(v_i), \tag{7.10}$$

где

$$l_\alpha(v_i) = \ln \frac{2|v'_i|_s}{|v'_{i1}|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}.$$

**Предложение 7.1.** *Для степеней $a$, удовлетворяющих неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(\triangle) \tag{7.11}$$

*симплексы* $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ *являются минимальными* (5.3)–(5.5).

**Доказательство** см. в [1]. □

Назовем степени $a$, для которых выполняется условие (7.11), *допустимыми*, а отвечающие им $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ *симплексами Пизо.*

**7.3. Рекуррентные последовательности.** Пусть

$$v_a = \frac{P_a}{Q_a} = \Big(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\Big) \tag{7.12}$$

– одна из вершин $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \ldots, d$ симплекса $P_\alpha^a\langle\triangle\rangle$. Вершине (7.12) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Из формулы связи (7.4) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}_\alpha^a \mathbf{v}_0 \tag{7.14}$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$, где $v_0$ – вершина базисного симплекса $\triangle$, определенного в (7.1). В [1] доказано, что столбцы $\mathbf{v}_a$ удовлетворяют рекуррентному соотношению.

**Предложение 7.2.** *Пусть матрица Пизо* $\mathrm{P}_\alpha$ *имеет характеристический многочлен*

$$\mathrm{ch}_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \tag{7.15}$$

*Тогда столбцы* $\mathbf{v}_a$ *из* (7.14) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \ldots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \tag{7.16}$$

*для* $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Начальные условия*

$$\mathbf{v}_d = \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \ldots, \quad \mathbf{v}_1 = \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 \tag{7.17}$$

*задаются матрицей Пизо* $\mathrm{P}_\alpha$ *из* (3.15) *и столбцом* $\mathbf{v}_0$ *из* (7.13).

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (5.9), то рекуррентное соотношение (7.16) можно применить

$$\frac{P_{a+d+1}}{Q_{a+d+1}} = \frac{b_d P_{a+d}}{b_d Q_{a+d}} \,\widehat{+}\, \ldots \,\widehat{+}\, \frac{b_1 P_{a+1}}{b_1 Q_{a+1}} \,\widehat{+}\, \frac{b_0 P_a}{b_0 Q_a} \tag{7.18}$$

непосредственно к рациональным вершинам $v_a = \frac{P_a}{Q_a}$ из (7.12). В этих терминах начальные условия (7.17) примут вид

$$v_d = \operatorname{pr} \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \quad \ldots, \quad v_1 = \operatorname{pr} \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad v_0 = \operatorname{pr} \mathbf{v}_0, \tag{7.19}$$

где pr обозначает проекцию (7.5).

## §8. Теоремы о совместных приближениях

Собранные вместе конструкции §§ 1-7 позволяют сформировать некоторый общий *алгоритм*

$$\mathcal{SM}: \quad \alpha \approx \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \tag{8.1}$$

разложения в *многомерные цепные дроби* $\frac{P_a}{Q_a}$ из (7.12) полных точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ степени $\deg\, \alpha = d+1$, определенных в (3.6)–(3.8). Основными составляющими конструкции алгоритма (8.1) являются базовый симплекс $\triangle$ и модульные матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu$ из (3.15), в совокупности задающие геометрию приближений. По этой причине (8.1) в [1] был назван *симплекс-модульным алгоритмом* или кратко – *$\mathcal{SM}$-алгоритмом.*

В этом разделе мы покажем, как применяя $\mathcal{SM}$-алгоритм можно получать приближения алгебраических иррациональностей $\alpha$ произвольной степени. Первый результат – чисто геометрический, касающийся наилучших приближений, второй – аналитический, содержащий метрическую оценку указанных приближений.

**8.1. Геометрическая теорема.** Симплекс Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ имеет рациональные вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \ldots, d$. Согласно (5.10) данный симплекс содержит *точку Фарея*

$$\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}} = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \widehat{+} \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}. \tag{8.2}$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \dots$ также, как и вершины $\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ симплекса Пизо $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$, удовлетворяют

$$\frac{P_{a+d+1,\max}}{Q_{a+d+1,\max}} = \frac{b_d P_{a+d,\max}}{b_d Q_{a+d,\max}} \mathbin{\widehat{+}} \dots \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_1 P_{a+1,\max}}{b_1 Q_{a+1,\max}} \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_0 P_{a,\max}}{b_0 Q_{a,\max}} \tag{8.3}$$

– рекуррентному соотношению (7.18) с новыми *начальными условиями*

$$v_{d,\max} = \mathrm{pr}\ \mathrm{P}^d_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \ \dots, \ v_{1,\max} = \mathrm{pr}\ \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \ v_{0,\max} = \mathrm{pr}\ \mathbf{v}_{\max}, \tag{8.4}$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством

$$\mathbf{v}_{\max} = \widehat{v}_0 + \widehat{v}_1 + \dots + \widehat{v}_d. \tag{8.5}$$

Здесь $v_i$ обозначают вершины (7.2) базисного симплекса $\triangle = \triangle^d_U$ из (7.1), а $\widehat{v}_i$ – соответствующие им векторы (3.10). В координатах вектор (8.5) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{\max} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

**Теорема 8.1.** *Пусть* $\alpha$ *– полная точка степени* $\deg(\alpha) = d+1$. *Если* $a$ *– допустимая степень или, в частности, если* $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$, *где* $l_\alpha(\triangle)$ *определено в* (7.10), *и* $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ *– отвечающий ей симплекс Пизо, то имеют место следующие утверждения.*

1. *Симплекс Пизо* $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ *обладает свойством минимальности* (*см. определение* (5.3)-(5.5)):

$$\frac{P}{Q} \notin \mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle, \tag{8.7}$$

*если* $1 \leqslant Q < Q_{a,\max}$; *единственная точка*

$$\frac{P}{Q} \in \mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle \tag{8.8}$$

*со знаменателем* $Q = Q_{a,\max}$ *есть точка Фарея* $\frac{P}{Q} = \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$, *определенная в* (8.2).

2. *Выполняется неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s \leqslant \max_{0 \leqslant i \leqslant d} \left|\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}} - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s. \tag{8.9}$$

**Доказательство** см. в [1]. □

**8.2. Аналическая теорема.** Теперь покажем, как используя результаты предложения 4.1 можно получать количественные оценки приближений $\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s$ из (8.9).

**Теорема 8.2.** *Пусть* $\alpha$ *– полная точка степени* $\deg(\alpha) = d + 1$ *и* $a$ *удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_{\alpha,\max}(\triangle). \tag{8.10}$$

*Здесь*

$$l_{\alpha,\max}(\triangle) = \max\{l_\alpha(v_{\max}), l_\alpha(\triangle)\}$$

*в обозначениях из* (7.10); *и*

$$v'_{\max} = \begin{pmatrix} v'_{\max,1} \\ \vdots \\ v'_{\max,d+1} \end{pmatrix} \tag{8.11}$$

*определяется из разложения* $\widehat{v}_{\max} = Av'_{\max}$ *по* $A$*-базису* (4.1), *где* $v_{\max} = \mathrm{pr}\ \mathbf{v}_{\max}$ *– проекция вектора* (8.6); *кроме того,* $\lambda = \zeta^\nu > 1$, $\zeta$ *– единица Пизо* (2.4) *и* $0 < \lambda_{2,\max} < 1$ *определено в* (4.14). *Тогда при этом условии:*

1) *существует симплекс Пизо* $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$; *и*
2) *имеет место неравенство*

$$\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s \leqslant c_{\alpha,\max}\ \varrho^a, \tag{8.12}$$

*где*

$$\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda} < 1 \tag{8.13}$$

*и константа*

$$c_{\alpha,\max} = 4d\,|A|_{\max}\ \frac{|v'_{\max}|_s}{|v'_{\max,1}|} \tag{8.14}$$

*не зависит от степени* $a$. *Здесь* $|A|_{\max}$ *–* $\max$*-норма* (4.19) *матрицы* $A$.

**Доказательство** см. в [1]. □

## §9. Диофантова экспонента

**9.1. Асимптотические разложения для знаменателей.** В данном параграфе будет показано, как можно переписать неравенства (8.12) непосредственно в терминах знаменателей подходящих дробей $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$. Для этого нам потребуется один асимптотический результат о $Q_{a,\max}$.

**Лемма 9.1.** *Пусть* $Q_{a,\max}$ *– знаменатели точек Фарея* $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$ *из* (8.2). *Для них выполняется асимптотическое разложение*

$$Q_{a,\max} = \kappa\lambda^a + \mathcal{O}(\lambda^a_{2,\max}) \tag{9.1}$$

*при* $a \to +\infty$. *Здесь* $\lambda > 1$ *– единица Пизо* (3.17), *значение* $\lambda_{2,\max}$, *удовлетворяющее неравенству* $|\lambda_{2,\max}| < 1$, *определено в* (4.14) *и коэффициент* $\kappa > 0$ *не зависит от* $a$.

**Доказательство.** Из формулы (7.8) следуют асимптотические равенства

$$Q_{a,i} = \kappa_i\lambda^a + \mathcal{O}(\lambda^a_{2,\max}) \tag{9.2}$$

для всех $i = 0, 1, \ldots, d$, где $|\lambda_{2,\max}| < 1$ согласно (4.14) и предложению 3.1. По определению точек Фарея (8.2) имеем

$$Q_{a,\max} = Q_{a,1} + \ldots + Q_{a,d}. \tag{9.3}$$

Поэтому складывая все равенства (9.2), получаем асимптотическое разложение (9.1) с коэффициентом $\kappa = \kappa_0 + \kappa_1 + \ldots + \kappa_d$.

Покажем, что $\kappa > 0$. Данное неравенство будет вытекать из уже доказанного разложения (9.1), если будет известно, что

$$Q_{a,\max} \to +\infty \quad \text{при} \quad a \to +\infty. \tag{9.4}$$

По (3.16) столбец $\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным $\mathrm{P}_\alpha\widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}$ для матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha$ из (3.15) с собственным значением $\lambda > 1$. С другой стороны, ввиду (7.13) существует связь

$$\mathbf{v}_{a,i} = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_{a,i} \end{pmatrix} = \mathrm{P}^a_\alpha \mathbf{v}_{0,i}$$

чисел $Q_{a,i}$ с матрицей $\mathrm{P}_\alpha$. Отсюда заключаем, что $Q_{a,i} \to +\infty$ при $a \to +\infty$; и тогда из (9.3) будет следовать (9.4). $\square$

**9.2. Основная теорема.** Асимптотическое разложение (9.1) в совокупности с предложением 2.2, содержащим формулу о собственных значениях единиц Пизо, позволяют оценку (8.12) представить непосредственно в терминах знаменателей $Q_{a,\max}$ подходящих дробей $\frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}$.

**Теорема 9.1.** *В условиях теоремы* 8.2 *для любого фиксированного* $\theta > 0$ *существует такая локализованная матрица Пизо* $\mathrm{P}_\alpha$ *из предложения* 3.1, *что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{P_{a,\max}}{Q_{a,\max}}\right|_s \leqslant \frac{c}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{9.5}$$

*для всех* $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$. *Здесь константы* $a_{\alpha,\theta} > 0$ *и* $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ *не зависят от* $a$.

**Доказательство.** По определению (3.17) имеем $\lambda = \zeta^\nu$. Поэтому, используя (4.14) и предложение 2.2, находим значение

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2 \leqslant i \leqslant t} |\lambda^{(i)}| = \lambda^{-1/d+\theta} \tag{9.6}$$

с показателем $0 < \theta \leqslant c_\varepsilon \eta$. Применяя лемму 9.1 и (9.6), выводим неравенство

$$\varrho^a = \frac{\lambda_{2,\max}^a}{\lambda^a} \leqslant \frac{c'}{Q_{a,\max}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{9.7}$$

с некоторой константой $c' > 0$ для всех достаточно больших $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$, где $\varrho$ было определено в (8.13). Теперь оценка (9.5) вытекает из теоремы 8.2 и неравенства (9.7). $\square$

*Диофантову экспоненту* определим как супремум показателей $\Theta$, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p_a}{q_a}\right|_s \leqslant \frac{1}{q_a^{1+\Theta}} \tag{9.8}$$

имеет беконечно много целых решений $p_{a1}, \ldots, p_{ad}$ и $q_a > 0$.

**Следствие 9.1.** *Для полной точки* $\alpha$ *степени* $\deg(\alpha) = d+1$ *диофантова экспонента* $\Theta$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{1}{d} - \theta \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{d}, \tag{9.9}$$

*где $\theta > 0$ – любое фиксированное число.*

**Доказательство.** Из неравенства (0.7) для диофантовой экспоненты $\Theta$ следует верхняя оценка, а из теоремы 9.1 – нижняя оценка в (9.9). □

**Замечание 9.1.** Метод локализованных матриц Пизо позволяет получить для диофантовой экспоненты в (9.8) равенство

$$\Theta = \frac{1}{d}$$

только для полей ранга один: вещественных квадратичных и кубических с комплексным сопряжением. Это как раз те вещественные алгебраические поля, у которых группы единиц $\mathcal{E}$ порождаются одним элементом. Для данных полей показатель $\theta = 0$ в неравенствах (9.5).

## Литература

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
2. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres.* — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, tenu a Helsinki 18-23 aout (1957), 45–64. Mercators Tryckeri, Helsinki, 1958.
3. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions.* — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
4. A. Nogueira, *The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm.* — Israel J. Math. **90**, No. 1-3, (1995), 373–401.
5. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction.* — Oxford Univ. Press, New York, 2000.
6. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux-Rauzy-Poincare algorithm.* — Adv. in Appl. Math. **63** (2015), 90–130.
7. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms.* — `arXiv:1508.07814`, August 2015.
8. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire.* — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
9. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби.* — Современные проблемы математики, МИ РАН (2017), 1—25. (в печати)
10. Дж. В. С. Касселс, *Введение в теорию диофантовых приближений.* — М., 1961.
11. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-ое изд. — М., 1978.
12. J. Lagarias, *Best simultaneous Diophantine approximations. I. Groth rates of best approximation denomimators.* — Trans. Amer. Math. Soc. **272**, No. 2 (1982), 545–554.

13. N. G. Moshchevitin, *On some open problems in Diophantine approximation.* — `arXiv:1202.4539v5 [math.NT]`, 22 Dec 2012, 1–42.
14. N. Chevallier, *Best Simultaneous Diophantine Approximations and Multidimensional Continued Fraction Expansions.* Moscow J. Comb. Number Theory **3**, No. 3 (2013), 3–56.
15. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* 2-ое изд. М., 1972.
16. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел.* 8-ое изд. М., 1972.

Zhuravlev V. G. Local Pisot matricies and mutual approximations of algebraic numbers.

A further development of the simplex-modular algorithm for decomposition of algebraic numbers into multidimensional continued fractions is proposed. With this aim we construct localized Pisot matrices . They have moduli of all eigenvalues less than 1 fall into the interval of small length. Such Pisot matrices generate continued fractions with the best approximations.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей 11,
600024 Владимир, Россия
*E-mail*: `vzhuravlev@mail.ru`

Поступило 5 апреля 2017 г.