Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

В. Г. Журавлев

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СИМПЛЕКС-МОДУЛЬНОГО АЛГОРИТМА РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В МНОГОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

Доказывается инвариантность симплекс-модульного алгоритма разложения вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби относительно дробно-линейных преобразований $\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ с матрицами U, принадлежащими унимодулярной группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Показано, что для цепных дробей преобразованных наборов чисел α' сохраняется рекуррентное соотношение и порядок приближения к α'.

Введение

0.1. Симплекс-модулярный алгоритм. В [1] построен симплекс-модулярный алгоритм ($\mathcal{SM}$-алгоритм) разложения алгебраических чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ в многомерные цепные дроби

$$\mathcal{SM}: \quad \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \quad \longrightarrow \quad \alpha \quad \text{при} \quad a \to +\infty, \tag{0.1}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$. Основу указанного алгоритма составляют:

1) Матрицы Пизо P_α, обладающие свойством

$$\mathrm{P}_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{0.2}$$

где $\lambda > 1$ – некоторая единица Пизо поля $\mathbb{Q}(\alpha)$. Это означает, что все ее сопряженные $\lambda^{(2)}, \ldots, \lambda^{(d+1)}$, кроме $\lambda^{(1)} = \lambda$, удовлетворяют неравенствам $|\lambda^{(2)}| < 1, \ldots, |\lambda^{(d+1)}| < 1$.

2) Бесконечная монотонная последовательность

$$\mathbf{s}^0 \supset \mathbf{s}^1 \supset \ldots \supset \mathbf{s}^a \supset \ldots \ni \alpha, \tag{0.3}$$

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, суммы Фарея, локализованные матрицы Пизо.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

содержащая точку α и состоящая из d-мерных симплексов Пизо $\mathbf{s}^a = P_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ с рациональными вершинами, где $\triangle$ – некоторый базовый симплекс и $\langle\ \rangle$ – дробно-линейное преобразование размерности $d+1$.

Симплексы (0.3) обладают свойством минимальности: они не содержат

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}^a \tag{0.4}$$

никакой рациональной точки $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \ldots, \frac{P_d}{Q}\right)$ со знаменателем $1 \leqslant Q < \mathbf{Q}_a$, где $\mathbf{Q}_a$ равно сумме знаменателей всех рациональных вершин симплекса $\mathbf{s}^a$; единственная рациональная точка $\frac{P}{Q}$, принадлежащая симплексу

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}^a \tag{0.5}$$

и имеющая знаменатель $Q = \mathbf{Q}_a$, есть точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ – сумма Фарея всех вершин симплекса $\mathbf{s}^a$.

Пусть точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор алгебраических действительных чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ будут полными. Последнее означает выполнение условия $\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha)$. Здесь

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d]$$

обозначает модуль с базисом $\{1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – поле, полученное расширением поля $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$. Из определения, в частности, следует иррациональность точки α, т.е. линейная независимость $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$.

В [2] было доказано, что точки Фарея $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\frac{\mathbf{P}_{a+d+1}}{\mathbf{Q}_{a+d+1}} = \frac{b_d\mathbf{P}_{a+d}}{b_d\mathbf{Q}_{a+d}} \mathbin{\widehat{+}} \ldots \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_1\mathbf{P}_{a+1}}{b_1\mathbf{Q}_{a+1}} \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_0\mathbf{P}_a}{b_0\mathbf{Q}_a} \tag{0.6}$$

где $\widehat{+}$ обозначает сумму Фарея и b_i – коэффициенты характеристического многочлена

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0.$$

матрицы Пизо P_α из (0.2). Кроме того, было доказано следующее утверждение.

Для любого фиксированного $\theta > 0$ существует такая матрица P_α *– локализованная матрица Пизо, что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha_1 - \frac{\mathbf{P}_{a1}}{\mathbf{Q}_a}\right| + \ldots + \left|\alpha_d - \frac{\mathbf{P}_{ad}}{\mathbf{Q}_a}\right| \leqslant \frac{c}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{0.7}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$. Здесь

$$\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{a1}}{\mathbf{Q}_a}, \ldots, \frac{\mathbf{P}_{ad}}{\mathbf{Q}_a}\Big)$$

– подходящие цепные дроби к точке $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и константы $a_{\alpha,\theta} > 0$ и $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ не зависят от a.

Алгебраические числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$, участвующие в приведенном выше неравенстве (0.7), относятся к классу плохо приближающихся чисел. Из нижних оценки для диофантовой экспоненты $\geqslant 1 + \frac{1}{d}$ (см., например, [3], гл. V-3) следует, что приближения (0.7) можно за счет выбора локализованных матриц Пизо P_α получать сколь угодно близкими к оптимальным.

Однако, в этом месте требуется дополнительное уточнение. Отмеченное выше свойство минимальности (0.4), (0.5) симплексов $\mathbf{s}^a$ означает, что при любом выборе матрицы Пизо P_α в (0.2) всегда получаются наилучшие приближения относительно полиэдральных норм, задаваемых симплексами $\mathbf{s}^a$. В приведенном контексте приближениям вида (0.7) отвечают симплексы $\mathbf{s}^a$, имеющие близкую к шаровой форму.

0.2. Дробно-линейная инвариантность $\mathcal{SM}$-алгоритма. Цель настоящей статьи – доказать инвариантность $\mathcal{SM}$-алгоритма (0.1) относительно дробно-линейных преобразований

$$\alpha \mapsto U\langle\alpha\rangle \tag{0.8}$$

относительно унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В теореме 10.1 доказано:

при преобразовании

$$U\langle\ \rangle\,:\,\alpha \mapsto \alpha',\ \ \mathbf{s}^a \mapsto \mathbf{s}'^a,\ \ \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} \mapsto \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} \tag{0.9}$$

с любой матрицей $U \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ симплексы $\mathbf{s}'^a$ сохраняют свойство (0.3) *и свойство минимальности* (0.4), (0.5). *Точки Фарея $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ удовлетворяют рекуррентному соотношению* (0.6) *со своими начальными* *условиями; и при этом выполняются неравенства*

$$\left|\alpha'_1 - \frac{\mathbf{P}'_{a1}}{\mathbf{Q}'_a}\right| + \ldots + \left|\alpha'_d - \frac{\mathbf{P}'_{ad}}{\mathbf{Q}'_a}\right| \leqslant \frac{c'}{{\mathbf{Q}'_a}^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{0.10}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta,U}$. *Здесь знаменатели*

$$|\mathbf{Q}'_a| \to +\infty \quad \text{при} \quad a \to +\infty; \tag{0.11}$$

константы $a_{\alpha,\theta,U} > 0$ *и* $c' = c'_{\alpha,\theta,U} > 0$ *не зависят от* a.

0.3. История вопроса. Минимальные симплексы $\mathbf{s}^a$ являются многомерным обобщением отрезков Фарея. Двумерный случай был исследован в [4–11], а для произвольной размерности в [12–14].

В [1] было доказано существование матриц Пизо P_α из (0.2), позволяющих получать приближения вида (0.7) с показателем $\theta < 1/d$. После того, как был разработан общий симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных чисел в многомерные цепные дроби [15], появилась возможность строить матрицы Пизо P_α с любым наперед заданным параметром $\theta > 0$.

Хорошо известна связь между обычными цепными дробями и рекуррентными соотношениями второго порядка [16]. Аналогичная связь существует и для многомерных цепных дробей [7,17]. Для вычисления подходящих дробей в неравенствах (0.7), (0.10) также применяются рекуррентные соотношения (0.6), но теперь они получаются из локализованных матриц Пизо P_α.

§1. Единицы алгебраических полей

1.1. Основные единицы. Рассмотрим вещественное алгебраическое поле

$$\mathbb{F} = \mathbb{Q}(\theta) \subset \mathbb{R} \tag{1.1}$$

– алгебраическое расширение степени $d+1 = r+2c$ поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$, где $r \geqslant 1$ и $2c$ обозначают число вещественных и комплексных сопряжений соответственно (подробности см., например, [18]). Выберем в $\mathbb{F}$ некоторую *фундаментальную систему основных единиц* $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_t$, где $t = r+c-1$. Они являются свободными образующими порождаемой ими *группы единиц* $\mathcal{E}$, имеющей максимально возможный *ранг* t. Зададим отображение

$$\varepsilon \quad \mapsto \quad x(\varepsilon) = (\ln|\varepsilon^{(1)}|, \ldots, \ln|\varepsilon^{(r)}|, 2\ln|\varepsilon^{(r+1)}|), \ldots, 2\ln|\varepsilon^{(r+c)}|) \tag{1.2}$$

множества единиц $\mathcal{E}$ в пространство $\mathbb{R}^{t+1}$, где $\varepsilon^{(1)},\dots,\varepsilon^{(r)}$ – вещественные сопряженные значения для ε и $\varepsilon^{(r+1)},\dots,\varepsilon^{(r+c)}$ – комплексные, при этом полагаем $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon$. Отображение (1.2) будет вложением $x:\mathcal{E}\hookrightarrow\mathbb{R}^{t+1}$ группы $\mathcal{E}$ в векторное пространство $\mathbb{R}^{t+1}$ с сохранением в них операций

$$x(\varepsilon\cdot\varepsilon')=x(\varepsilon)+x(\varepsilon'). \tag{1.3}$$

1.2. Единицы Пизо. Единицу $\zeta\in\mathcal{E}$ назовем *единицей Пизо*, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$\zeta=\zeta^{(1)}>1 \quad \text{и} \quad |\zeta^{(i)}|<1 \quad \text{для остальных сопряжений} \quad i>1. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathcal{P}\subset\mathcal{E}$ подмножество всех единиц Пизо ζ из группы $\mathcal{E}$. Из определения (1.4) следует замкнутость множества $\mathcal{P}$ относительно умножения $\zeta\cdot\zeta'\in\mathcal{P}$ для любых $\zeta,\zeta'\in\mathcal{P}$. Поэтому множество $\mathcal{P}$ образует полугруппу без единицы, поскольку 1 не является единицей Пизо (1.4).

Предложение 1.1. 1. *Если ранг $t\geqslant 1$, то группа единиц $\mathcal{E}$ содержит единицу Пизо* (1.4) *и, значит, $\mathcal{P}\neq\varnothing$.*

2. *Любая единица Пизо $\zeta\in\mathcal{P}$ имеет степень*

$$\deg(\zeta)=d+1. \tag{1.5}$$

Здесь степень $\deg(\zeta)$ числа ζ определяется равенством

$$\deg(\zeta)=\deg\mathbb{Q}(\zeta),$$

где справа указана степень $\deg\mathbb{Q}(\zeta)=[\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}]$ расширения $\mathbb{Q}(\zeta)$ над полем $\mathbb{Q}$.

Доказательство. см. [1]. □

1.3. Локализованные единицы Пизо. Из [2], п. 2.3 можно вывести следующее

Следствие 1.1. *Пусть $\varepsilon=\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_t\}$ – некоторая фундаментальная система единиц вещественного алгебраического поля $\mathbb{F}$ из* (1.1) *степени $d+1$,*

$$\zeta=\varepsilon_1^{p_1}\cdots\varepsilon_t^{p_t} \tag{1.6}$$

– произвольная единица; и пусть $\zeta^{(i)}$ – сопряженные единицы ζ. Тогда для любого фиксированного $\theta>0$ найдутся такие ζ с целыми показателями $p_1,\dots,p_t$ в (1.6)*, что будут выполняться следующие свойства:*

1) *число* ζ *является единицей Пизо* (1.4)*;*

2) *модули всех ее сопряженных* $\zeta^{(i)}$ *содержатся в некоторой окрестности*

$$\zeta^{-1/d-\theta} \leqslant |\zeta^{(i)}| \leqslant \zeta^{-1/d+\theta} \tag{1.7}$$

для $2 \leqslant i \leqslant t+1$.

3) *если поле* $\mathbb{F}$ *является вещественным квадратичным или комплексным кубическим, т.е. имеющим комплексное сопряжение, то в неравнствах* (1.7) *можно положить* $\theta = 0$.

Единицы $\zeta > 1$, удовлетворяющие условию (1.7), будем называть *локализованными единицами Пизо.*

§2. Модульные матрицы Пизо

2.1. Модули. Пусть $\zeta \in \mathcal{P}$ – единица Пизо (1.4). По предложению 1.1 ее степени $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому алгебраическое поле $\mathbb{Q}(\zeta)$ совпадает

$$\mathbb{Q}(\zeta) = \mathbb{F} \tag{2.1}$$

с полем (1.1) и *модуль*

$$\mathcal{M}_\zeta = \mathbb{Z}[1, \zeta, \ldots, \zeta^d] \tag{2.2}$$

над кольцом $\mathbb{Z}$ будет *полным*, т.е. числа $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ образуют базис поля $\mathbb{F}$ над $\mathbb{Q}$.

Рассмотрим линейное отображение

$$\mathcal{M}_\zeta \xrightarrow{\zeta} \mathcal{M}_\zeta : \quad x \mapsto \zeta \cdot x. \tag{2.3}$$

Из определения (2.2) вытекает, что отображение (2.3) задает автоморфизм модуля $\mathcal{M}_\zeta$. Поскольку $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$ – базис модуля $\mathcal{M}_\zeta$, то найдется унимодулярная матрица U_ζ размера $d+1$, удовлетворяющая условию

$$U_\zeta \widehat{\zeta} = \zeta \cdot \widehat{\zeta}, \tag{2.4}$$

где слева записано произведение матрицы U_ζ и столбца

$$\widehat{\zeta} = \begin{pmatrix} \zeta^d \\ \vdots \\ \zeta \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

высоты $d+1$. Матрица U_ζ называется *матрицей предствления* элемента ζ в базисе $1, \zeta, \ldots, \zeta^d$.

2.2. Матрица перехода T. Пусть

$$\mathcal{M}_\alpha = \mathbb{Z}[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d] \tag{2.6}$$

– произвольный полный модуль над кольцом $\mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{F}$. Точку $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и соответствующий набор чисел $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$, обладающие свойством (2.6), будем называть *полными*. Для полной точки α характерно выполнение соотношения

$$\mathbb{Q}[\alpha] = \mathbb{Q}(\alpha) \tag{2.7}$$

между $\mathbb{Q}[\alpha]$ – модулем (2.6) и $\mathbb{Q}(\alpha)$ – расширением поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$.

Точку (вектор) α назовем *иррациональной* (*иррациональным*), если выполняется условие:

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.8}$$

Из (2.1) и (2.6), в частности, следует иррациональность (2.8) точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, а из (2.7) – равенство $\mathbb{Q}(\alpha) = \mathbb{F}$. Определим для точки α ее *степень*

$$\deg \alpha = \deg \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q} = [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \tag{2.9}$$

над полем $\mathbb{Q}$. Если α – полная точка, то из (2.1) и (2.6) следует $\deg \alpha = d+1$.

Далее, пусть T – *матрица перехода*

$$\widehat{\alpha} = T\widehat{\zeta} \tag{2.10}$$

от базиса полного модуля $\mathcal{M}_\zeta$ к базису модуля $\mathcal{M}_\alpha$. Здесь столбец $\widehat{\alpha}$ определяется по модулю $\mathcal{M}_\alpha$ добавлением единицы

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Матрица перехода T имеет рациональные коэффициенты. Кроме того, поскольку модуль $\mathcal{M}_\alpha$ также полный, то матрица T обратима и, значит, $T \in \mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Q})$.

2.3. Модульные матрицы. Воспользуемся (2.10) и подставим $\widehat{\zeta} = T^{-1}\widehat{\alpha}$ в равенство (2.4). Имеем

$$U_\zeta T^{-1}\widehat{\alpha} = \zeta \cdot T^{-1},$$

откуда для столбца $\widehat{\alpha}$ выводим равенство

$$M_\alpha \widehat{\alpha} = \zeta \cdot \widehat{\alpha} \tag{2.12}$$

с рациональной матрицей

$$M_\alpha = T U_\zeta T^{-1}, \tag{2.13}$$

сопряженной унимодулярной матрице U_ζ. Для модуля $\mathcal{M}_\alpha$ из (2.6) матрицу, обладающую свойством (2.12), назовем *модульной матрицей.*

2.4. Унимодулярные модульные матрицы. *Уровень*

$$l(T) = t \tag{2.14}$$

невырожденной рациональной матрицы T определяется как наименьшее натуральное число t с условием, что $T^* = t \cdot T^{-1}$ – целочисленная матрица.

Нам потребуется еще *показатель* $\nu_a(U_\zeta) = \nu$ унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t – это такое наименьшее натуральное число ν, для которого выполняется сравнение

$$U_\zeta^\nu \equiv E \bmod t, \tag{2.15}$$

где $E = E_{d+1}$ – единичная матрица размера $d+1$. Указанное число ν существует и не превышает порядка конечной группы $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z}/t\mathbb{Z})$ матриц над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/t\mathbb{Z}$ с определителем $\det \equiv \pm 1 \bmod t$.

В [1] доказано следующее утверждение.

Предложение 2.1. 1. *Пусть t – уровень* (2.14) *матрицы T и ν – показатель унимодулярной матрицы U_ζ по модулю t. Тогда матрица*

$$\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu \tag{2.16}$$

является унимодулярной.

2. *Пусть $\mathcal{M}_\alpha$ – произвольный полный модуль* (2.6) *из поля $\mathbb{F}$. Тогда имеет место равенство*

$$\mathrm{P}_\alpha \widehat{\alpha} = \lambda \cdot \widehat{\alpha}, \tag{2.17}$$

где $\widehat{\alpha}$ – столбец (2.11) *и*

$$\lambda = \zeta^\nu > 1 \tag{2.18}$$

– единица Пизо (1.4).

Матрицу P_α из (2.16) назовем *модульной матрицей Пизо* или кратко – *матрицей Пизо.* Если ζ является локализованной единицей Пизо (1.6), то P_α будем также называть *локализованной матрицей Пизо.*

§3. Аппроксимация

3.1. Разложение модульной матрицы Пизо. Для столбцов $\widehat{\alpha}$ из (2.11) и $\widehat{\zeta}$ из (2.5) определим квадратные матрицы

$$A = (\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \widehat{\alpha}^{(d+1)}), \quad Z = (\widehat{\zeta}^{(1)} \dots \widehat{\zeta}^{(d+1)}) \tag{3.1}$$

– порядка $d+1$. Матрица Z невырождена и в силу равенства (2.10) можем записать

$$A = TZ. \tag{3.2}$$

Поэтому матрица A также невырождена и, следовательно, ее столбцы образуют базис (A-базис) в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$.

Пусть P_α – модульная матрица Пизо. Из (2.17) получаем

$$\mathrm{P}_\alpha A \quad = (\lambda^{(1)}\widehat{\alpha}^{(1)} \dots \lambda^{(d+1)}\widehat{\alpha}^{(d+1)}) \quad = A\Lambda,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda^{(1)} & \dots & 0 \\ & \dots & \\ 0 & \dots & \lambda^{(d+1)} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Отсюда для матрицы P_α выводим разложение

$$\mathrm{P}_\alpha = A\Lambda A^{-1}. \tag{3.4}$$

3.2. Линейные отображения модульной матрицей Пизо. Для произвольного вектора $x \in \mathbb{R}^d$ соответствующий ему столбец $\widehat{x}$ разложим

$$\widehat{x} = Ax' \tag{3.5}$$

по A-базису, где $x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{d+1} \end{pmatrix}$. Используя разложения (3.4) и (3.5), имеем

$$\mathrm{P}_\alpha^a \widehat{x} \quad = A\Lambda^a A^{-1}\widehat{x} \quad = A\Lambda^a x' \quad = A \begin{pmatrix} \lambda_1^a x'_1 \\ \vdots \\ \lambda_{d+1}^a x'_{d+1} \end{pmatrix},$$

где обозначили $\lambda_j = \lambda^{(j)}$. Теперь умножая на матрицу A, окончательно получаем формулу

$$P^a_\alpha \widehat{x} \quad = \begin{pmatrix} \Lambda^a_1 \\ \vdots \\ \Lambda^a_d \\ \Lambda^a_{d+1} \end{pmatrix} \quad = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\lambda^a_1 x'_1 + \ldots + \alpha_{1,d+1}\lambda^a_{d+1}x'_{d+1} \\ \ldots \\ \alpha_{d1}\lambda^a_1 x'_1 + \ldots + \alpha_{d,d+1}\lambda^a_{d+1}x'_{d+1} \\ \lambda^a_1 x'_1 + \ldots + \lambda^a_{d+1}x'_{d+1} \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

где Λ^a_i – линейные формы от $\lambda^a_1, \ldots, \lambda^a_{d+1}$ и α_{ij} – коэффициенты матрицы $A = (\alpha_{ij})$. Из определения (3.1) следует

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \quad \ldots, \quad \alpha_{d1} = \alpha_d \tag{3.7}$$

равны коэффициентам столбца $\widehat{\alpha}$ из (2.11); и у матрицы A коэффициенты последней строки $\alpha_{d+1,j} = 1$ для всех $j = 1, \ldots, d+1$. Из последних равенств вытекает вид формы Λ^a_{d+1}.

3.3. Дробно-линейные преобразования. Определим дробно-линейные преобразования в пространстве $\mathbb{R}^d$. Если $M = (a_{ij})$ – вещественная квадратная матрица порядка $d+1$ и $x \in \mathbb{R}^d$, то полагаем

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\Lambda_1(M,x)}{\Lambda_{d+1}(M,x)}, \ldots, \frac{\Lambda_d(M,x)}{\Lambda_{d+1}(M,x)}\right), \tag{3.8}$$

где

$$\Lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{id}x_d + a_{i,d+1}$$

– линейные неоднородные формы для $i = 1, \ldots, d+1$. Преобразования (3.8) обладают свойством ассоциативности

$$M_1\langle M_2\langle x\rangle\rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x\rangle, \tag{3.9}$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначено произведение матриц M_1 и M_2. Поскольку $E_{d+1}\langle x\rangle = x$ для единичной матрицы E_{d+1} порядка $d+1$, то из свойства (3.9) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x\rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x'\rangle. \tag{3.10}$$

Используя формулу (3.6) и определение (3.8), приходим к формуле

$$\mathrm{P}^a_\alpha\langle x\rangle = \left(\frac{\Lambda^a_1}{\Lambda^a_{d+1}}, \ldots, \frac{\Lambda^a_d}{\Lambda^a_{d+1}}\right). \tag{3.11}$$

3.4. Оценка расстояния. Нас будет интересовать расстояние

$$|\alpha - \mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle|_s \quad = \left|\alpha_1 - \frac{\Lambda_1^a}{\Lambda_{d+1}^a}\right| + \ldots + \left|\alpha_d - \frac{\Lambda_d^a}{\Lambda_{d+1}^a}\right| \tag{3.12}$$

между точкой

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \tag{3.13}$$

и точкой $\mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle$ из (3.11).

Чтобы привести явную формулу для расстояния, нам потребуются следующие обозначения

$$\lambda_{2,\max} = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\lambda_j| = \max_{2\leqslant j\leqslant d+1} |\lambda^{(j)}|, \tag{3.14}$$

где λ определено в (2.18), и

$$l_\alpha(x) = \ln \frac{2|x'|_s}{|x'_1|} \Bigg/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}} \tag{3.15}$$

для вектора x' из (3.5), (3.6).

Предложение 3.1. *Пусть точка* $x \in \mathbb{R}^d$ *имеет первую координату* $x'_1 \neq 0$ *в* A*-базисе* (3.5) *и степень* a *удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(x). \tag{3.16}$$

Тогда расстояние (3.12) *между точкой* α *из* (3.13) *и образом* $\mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle$ *точки* x *из* (3.11) *относительно дробно-линейного преобразования с модульной матрицей Пизо* P_α *из* (2.16) *оценивается как*

$$|\alpha - \mathrm{P}_\alpha^a\langle x\rangle|_s \leqslant c_{\alpha,x}\left(\frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda_1}\right)^a. \tag{3.17}$$

Здесь константа

$$c_{\alpha,x} = 4d\,|A|_{\max}\frac{|x'|_s}{|x'_1|} \tag{3.18}$$

не зависит от степени a,

$$|A|_{\max} = \max_{1\leqslant i,j\leqslant d+1} |\alpha_{ij}| \tag{3.19}$$

– max-норма *матрицы* A *и* $\lambda_{2,\max}$ *определено в* (3.14).

Доказательство. приведено в [1]. □

§4. Минимальные симплексы

4.1. Минимальные рациональные симплексы. Пусть открытый d-мерный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{i1}}{\mathbf{Q}_i}, \dots, \frac{\mathbf{P}_{id}}{\mathbf{Q}_i}\Big) \tag{4.1}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ с условием

$$\mathbf{Q}_i > 0, \quad \text{НОД}\,(\mathbf{P}_{i1}, \dots, \mathbf{P}_{id}, \mathbf{Q}_i) = 1. \tag{4.2}$$

Назовем $\mathbf{s}$ *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \notin \mathbf{s} \tag{4.3}$$

никакой точки

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \Big(\frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}}, \dots, \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}}\Big), \tag{4.4}$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где использовали обозначение

$$\mathbf{Q}_{\max} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_d. \tag{4.5}$$

В [1] доказаны следующие свойства минимальных симплексов.

Предложение 4.1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *симплекс* $\mathbf{s}$ *минимальный;*

2) *матрица*

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_{01} & \mathbf{P}_{11} & \dots & \mathbf{P}_{d1} \\ & & \dots & \\ \mathbf{P}_{0d} & \mathbf{P}_{1d} & \dots & \mathbf{P}_{dd} \\ \mathbf{Q}_0 & \mathbf{Q}_1 & \dots & \mathbf{Q}_d \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

унимодулярна;

3) *симплекс* $\mathbf{s}$ *имеет объем*

$$\operatorname{vol}\mathbf{s} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant d} \mathbf{Q}_i\Big)^{-1}. \tag{4.7}$$

4.2. Точка Фарея. Рассматриваемый здесь минимальный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины (4.1). Следуя аналогии с отрезками Фарея [20], симметризуем данные вершины, используя операцию сложения Фарея для дробей. В результате получим точку Фарея, содержащуюся в симплексе $\mathbf{s}$.

Пусть симплекс $\mathbf{s}$ имеет вершины $\frac{\mathbf{P}_i}{\mathbf{Q}_i}$, где $i = 0, 1, \ldots, d$, вида (4.1), (4.2). Определим сумму вершин

$$\frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_1 + \ldots + \mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 + \ldots + \mathbf{Q}_d}, \tag{4.8}$$

используя операцию *сложения Фарея* дробей

$$\frac{a}{b} \widehat{+} \frac{c}{d} = \frac{a+b}{c+d}. \tag{4.9}$$

Используя операцию (4.8), определим *точку Фарея*

$$\frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}} = \frac{\mathbf{P}_0}{\mathbf{Q}_0} \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_1}{\mathbf{Q}_1} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{\mathbf{P}_d}{\mathbf{Q}_d}. \tag{4.10}$$

Предложение 4.2. *Минимальный симплекс* $\mathbf{s}$ *содержит*

$$\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} \in \mathbf{s} \tag{4.11}$$

единственную точку $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{Q}} = \frac{\mathbf{P}_{\max}}{\mathbf{Q}_{\max}}$ *со знаменателем* $1 \leqslant \mathbf{Q} \leqslant \mathbf{Q}_{\max}$ *и, значит, – единственную точку со знаменателем* $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{\max}$*, где значение* $\mathbf{Q}_{\max}$ *было определено в* (4.5).

Доказательство. см. в [1]. □

§5. Унимодулярный базисный симплекс

5.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \ldots, 0), \quad e_1 = (1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_d = (0, \ldots, 1)$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ с определителем ± 1 *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$W = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец.
Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$W\alpha = V\alpha + L, \tag{5.2}$$

где α рассматривается как столбец $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}$. Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

5.2. Унимодулярные симплексы. В следующем предложении, доказанном в [1], содержатся важные для дальнейшего базисные симплексы.

Предложение 5.1. *Если α – иррациональная точка* (2.8), *то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle^d_W, \tag{5.3}$$

где $\triangle^d_W = W\triangle^d_e$.

Симплекс $\triangle^d_W$ из (5.3) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

§6. Симплексы Пизо

6.1. Базисный симплекс. Выберем в качестве s *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle^d_W \tag{6.1}$$

из предложения 5.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = We_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{6.2}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \ldots, d$. Векторы

$$v'_i = v_i - v_0 = Ve_i \tag{6.3}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (6.1) имеет объем

$$\operatorname{vol} \triangle = \frac{1}{d!}.$$

Из этого равенства и предложения 4.1 следует, что симплекс $\triangle$ будет минимальным.

6.2. Симплексы Пизо. Подействуем на симплекс $\triangle$ дробно-линейным преобразованием $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$, где $a = 1, 2, 3, \ldots$, с матрицей Пизо P_α из (2.16). Чтобы исследовать новый симплекс, воспользуемся формулой связи

$$\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle = \mathrm{pr}\, \mathrm{P}_\alpha^a \triangle, \tag{6.4}$$

где

$$\mathrm{pr} : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_{d+1} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1/x_{d+1} \\ \vdots \\ x_d/x_{d+1} \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

– проекция множества векторов $\mathbb{R}_*^{d+1} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ с координатой $x_{d+1} \neq 0$ на пространство $\mathbb{R}^d$. Здесь $V = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\}$ обозначает целочисленный базис из векторов (2.5), соответствующих вершинам (6.2).

Согласно (6.2) координаты векторов данного базиса образуют унимодулярную матрицу

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \ldots & P_{d1} \\ & & \ldots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \ldots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \ldots & Q_d \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Поскольку матрица Пизо P_α унимодулярная, то матрица

$$\mathrm{P}_\alpha^a S = \begin{pmatrix} P_{a,01} & P_{a,11} & \ldots & P_{a,d1} \\ & & \ldots & \\ P_{a,0d} & P_{a,1d} & \ldots & P_{a,dd} \\ Q_{a,0} & Q_{a,1} & \ldots & Q_{a,d} \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

также унимодулярная. Принимая во внимание формулу (3.6) и условие $Q_i = 1$, можем записать значения элементов нижней строки $Q_{a,i}$ матрицы $\mathrm{P}_\alpha^a S$ в явном виде

$$Q_{a,i} = \lambda_1^a v'_{i1} + \ldots + \lambda_{d+1}^a v'_{i,d+1}, \tag{6.8}$$

где v'_{ij} – координаты вектора $\widehat{v}'_i$ из разложения

$$\widehat{v}_i = A\widehat{v}'_i \tag{6.9}$$

вектора $\widehat{v}_i$ по A-базису из (3.1).

Введем обозначения

$$l_\alpha(\triangle) = \max_{0\leqslant i\leqslant d} l_\alpha(v_i), \tag{6.10}$$

где

$$l_\alpha(v_i) = \ln \frac{2|v'_i|_s}{|v'_{i1}|} \Big/ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_{2,\max}}.$$

Предложение 6.1. *Для степеней a, удовлетворяющих неравенству*

$$a \geqslant l_\alpha(\triangle) \tag{6.11}$$

симплексы $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ *являются минимальными* (4.3)–(4.5).

Доказательство. см. в [1]. □

Назовем степени a, для которых выполняется условие (6.11), *допустимыми*, а отвечающие им $\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ *симплексами Пизо.*

6.3. Рекуррентные последовательности. Пусть

$$v_a = \frac{P_a}{Q_a} = \Big(\frac{P_{a,1}}{Q_a}, \dots, \frac{P_{a,d}}{Q_a}\Big) \tag{6.12}$$

– одна из вершин $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$ симплекса $P^a_\alpha\langle\triangle\rangle$. Вершине (6.12) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}_a = \begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \tag{6.13}$$

Из формулы связи (6.4) следует равенство

$$\mathbf{v}_a = \mathrm{P}^a_\alpha \mathbf{v}_0 \tag{6.14}$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$, где v_0 – вершина базисного симплекса $\triangle$, определенного в (6.1). В [1] доказано, что столбцы $\mathbf{v}_a$ удовлетворяют рекуррентному соотношению.

Предложение 6.2. *Пусть матрица Пизо* P_α *имеет характеристический многочлен*

$$ch_{P_\alpha}(x) = \det(xE - \mathrm{P}_\alpha) = x^{d+1} - b_d x^d - \ldots - b_1 x - b_0. \qquad (6.15)$$

Тогда столбцы $\mathbf{v}_a$ *из* (6.14) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}_{a+d} + \ldots + b_1 \mathbf{v}_{a+1} + b_0 \mathbf{v}_a \qquad (6.16)$$

для $a = 0, 1, 2, \ldots$ *Начальные условия*

$$\mathbf{v}_d = \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \ldots, \quad \mathbf{v}_1 = \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}_0 \qquad (6.17)$$

задаются матрицей Пизо P_α *из* (2.16) *и столбцом* $\mathbf{v}_0$ *из* (6.13).

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (4.9), то рекуррентное соотношение (6.16) можно применить

$$\frac{P_{a+d+1}}{Q_{a+d+1}} = \frac{b_d P_{a+d}}{b_d Q_{a+d}} \mathbin{\widehat{+}} \ldots \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_1 P_{a+1}}{b_1 Q_{a+1}} \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_0 P_a}{b_0 Q_a} \qquad (6.18)$$

непосредственно к рациональным вершинам $v_a = \frac{P_a}{Q_a}$ из (6.12). В этих терминах начальные условия (6.17) примут вид

$$v_d = \mathrm{pr}\, \mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \quad \ldots, \quad v_1 = \mathrm{pr}\, \mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad v_0 = \mathrm{pr}\, \mathbf{v}_0, \qquad (6.19)$$

где pr обозначет проекцию (6.5).

§7. Теоремы о совместных приближениях

Собранные вместе конструкции §§ 1–7 позволяют сформировать некоторый общий *алгоритм*

$$\mathcal{SM}: \quad \alpha \approx \tfrac{P_a}{Q_a} = \left(\tfrac{P_{a,1}}{Q_a}, \ldots, \tfrac{P_{a,d}}{Q_a}\right) \qquad (7.1)$$

разложения в *многомерные цепные дроби* $\frac{P_a}{Q_a}$ из (6.12) полных точек $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ степени $\deg\, \alpha = d + 1$, определенных в (2.6)–(2.9). Основными составляющими конструкции алгоритма (7.1) являются базовый симплекс $\triangle$ и модульные матрицы Пизо $\mathrm{P}_\alpha = M_\alpha^\nu$ из (2.16), в совокупности задающие геометрию приближений. По этой причине (7.1) в [1] был назван *симплекс-модульным алгоритмом* или кратко – $\mathcal{SM}$*-алгоритмом.*

В этом разделе мы покажем, как применяя $\mathcal{SM}$-алгоритм можно получать приближения алгебраических иррациональностей α произвольной степени. Первый результат – чисто геометрический, касающийся наилучших приближений, второй – аналитический, содержащий метрическую оценку указанных приближений.

7.1. Геометрическая теорема. Симплекс Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ имеет рациональные вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$. Согласно (4.10) данный симплекс содержит *точку Фарея*

$$\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a} = \frac{P_{a,0}}{Q_{a,0}} \widehat{+} \frac{P_{a,1}}{Q_{a,1}} \widehat{+} \dots \widehat{+} \frac{P_{a,d}}{Q_{a,d}}. \tag{7.2}$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \dots$ также, как и вершины $\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ симплекса Пизо $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$, удовлетворяют

$$\frac{\mathbf{P}_{a+d+1}}{\mathbf{Q}_{a+d+1}} = \frac{b_d\mathbf{P}_{a+d}}{b_d\mathbf{Q}_{a+d}} \widehat{+} \dots \widehat{+} \frac{b_1\mathbf{P}_{a+1}}{b_1\mathbf{Q}_{a+1}} \widehat{+} \frac{b_0\mathbf{P}_a}{b_0\mathbf{Q}_a} \tag{7.3}$$

– рекуррентному соотношению (6.18) с новыми *начальными условиями*

$$v_{d,\max} = \mathrm{pr}\mathrm{P}_\alpha^d\mathbf{v}_{\max}, \quad \dots, \quad v_{1,\max} = \mathrm{pr}\mathrm{P}_\alpha\mathbf{v}_{\max}, \quad v_{0,\max} = \mathrm{pr}\mathbf{v}_{\max}, \tag{7.4}$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством

$$\mathbf{v}_{\max} = \widehat{v}_0 + \widehat{v}_1 + \dots + \widehat{v}_d. \tag{7.5}$$

Здесь v_i обозначают вершины (6.2) базисного симплекса $\triangle = \triangle_W^d$ из (6.1), а $\widehat{v}_i$ – соответствующие им векторы (2.11). В координатах вектор (7.5) запишется в виде

$$\mathbf{v}_{\max} = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ 1 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7.6}$$

Теорема 7.1. *Пусть α – полная точка степени* $\deg(\alpha) = d+1$. *Если a – допустимая степень или, в частности, если $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$, где $l_\alpha(\triangle)$ определено в* (6.10), *и $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ – отвечающий ей симплекс Пизо, то имеют место следующие утверждения.*

1. *Симплекс Пизо* $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$ *обладает свойством минимальности (см. определение* (4.3)–(4.5))*:*

$$\frac{P}{Q} \notin \mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle, \tag{7.7}$$

если $1 \leqslant Q < \mathbf{Q}_a$*; единственная точка*

$$\frac{P}{Q} \in \mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle \tag{7.8}$$

со знаменателем $Q = \mathbf{Q}_a$ *есть точка Фарея* $\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$*, определенная в* (7.2).

2. *Выполняется неравенство*

$$\Big|\alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\Big|_s \leqslant \max_{0\leqslant i\leqslant d} \Big|\frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}} - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\Big|_s. \tag{7.9}$$

Доказательство. см. в [1]. □

7.2. Аналическая теорема. Теперь покажем, как используя результаты предложения 3.1 можно получать количественные оценки приближений $\Big|\alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\Big|_s$ из (7.9).

Теорема 7.2. *Пусть* α *– полная точка степени* $\deg(\alpha) = d + 1$ *и* a *удовлетворяет неравенству*

$$a \geqslant l_{\alpha,\max}(\triangle). \tag{7.10}$$

Здесь

$$l_{\alpha,\max}(\triangle) = \max\{l_\alpha(v_{\max}), l_\alpha(\triangle)\}$$

в обозначениях из (6.10)*; и*

$$v'_{\max} = \begin{pmatrix} v'_{\max,1} \\ \vdots \\ v'_{\max,d+1} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

определяется из разложения $\widehat{v}_{\max} = Av'_{\max}$ *по* A*-базису* (3.1)*, где* $v_{\max} = \mathrm{pr}\ \mathbf{v}_{\max}$ *– проекция вектора* (7.6)*; кроме того,* $\lambda = \zeta^\nu > 1$*,* ζ *– единица Пизо* (1.4) *и* $0 < \lambda_{2,\max} < 1$ *определено в* (3.14)*. Тогда при этом условии:*

1) *существует симплекс Пизо* $\mathrm{P}_\alpha^a\langle\triangle\rangle$*; и*

2) *имеет место неравенство*

$$\Big|\alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\Big|_s \leqslant c_{\alpha,\max}\, \varrho^a, \tag{7.12}$$

где

$$\varrho = \frac{\lambda_{2,\max}}{\lambda} < 1 \tag{7.13}$$

и константа

$$c_{\alpha,\max} = 4d\,|A|_{\max}\,\frac{|v'_{\max}|_s}{|v'_{\max,1}|} \tag{7.14}$$

не зависит от степени a. *Здесь* $|A|_{\max}$ – $\max$-*норма* (3.19) *матрицы* A.

Доказательство. см. в [1]. □

§8. Диофантова экспонента

8.1. Асимптотические разложения для знаменателей. В данном параграфе будет показано, как можно переписать неравенства (7.12) непосредственно в терминах знаменателей подходящих дробей $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$. Для этого нам потребуется один результат об асимптотическом поведении $\mathbf{Q}_a$.

Лемма 8.1. *Пусть* $\mathbf{Q}_a$ – *знаменатели точек Фарея* $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ *из* (7.2). *Для них выполняется асимптотическое разложение*

$$\mathbf{Q}_a = \kappa\lambda^a + O(\lambda_{2,\max}^a) \tag{8.1}$$

при $a \to +\infty$. *Здесь* $\lambda > 1$ – *единица Пизо* (2.18), *значение* $\lambda_{2,\max}$, *удовлетворяющее неравенству* $|\lambda_{2,\max}| < 1$, *определено в* (3.14) *и коэффициент* $\kappa > 0$ *не зависит от* a.

Доказательство. см. в [2]. □

8.2. Оценка приближений через знаменатели подходящих дробей. Асимптотическое разложение (8.1) позволяет оценку (7.12) представить непосредственно в терминах знаменателей $\mathbf{Q}_a$ подходящих дробей $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ к точке α.

Теорема 8.1. *В условиях теоремы* 7.2 *для любого фиксированного* $\theta > 0$ *существует такая локализованная матрица Пизо* P_α *из предложения* 2.1, *что выполняются неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\right|_s \leqslant \frac{c}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{8.2}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$. *Здесь константы* $a_{\alpha,\theta} > 0$ *и* $c = c_{\alpha,\theta} > 0$ *не зависят от* a.

Доказательство. см. в [2]. $\square$

Диофантову экспоненту определим как супремум показателей Θ, для которых неравенство

$$\left|\alpha - \frac{p_a}{q_a}\right|_s \leqslant \frac{1}{q_a^{1+\Theta}} \tag{8.3}$$

имеет беконечно много целых решений $p_{a1}, \ldots, p_{ad}$ и $q_a > 0$.

Следствие 8.1. *Для полной точки α степени $\deg(\alpha) = d+1$ диофантова экспонента Θ удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{1}{d} - \theta \leqslant \Theta \leqslant \frac{1}{d}, \tag{8.4}$$

где $\theta > 0$ – любое фиксированное число.

§9. Дробно-линейные преобразования и точки Фарея

9.1. Рекуррентные последовательности. Пусть U – произвольная матрица из унимодулярной группы матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. С помощью дробно-линейного отображения (3.8) подействуем данной матрицей

$$v'_a = \frac{P'_a}{Q'_a} = \Big(\frac{P'_{a,1}}{Q'_a}, \ldots, \frac{P'_{a,d}}{Q'_a}\Big) = U\langle v_a\rangle \tag{9.1}$$

на вершины $v_{ai} = \frac{P_{a,i}}{Q_{a,i}}$ (см. (6.12)) симплекса

$$\mathbf{s}^a = P^a_\alpha\langle\triangle\rangle. \tag{9.2}$$

Вершине (9.1) поставим в соответствие целочисленный столбец

$$\mathbf{v}'_a = \begin{pmatrix} P'_{a1} \\ \vdots \\ P'_{ad} \\ Q'_a \end{pmatrix} = U\mathbf{v}_a = U\begin{pmatrix} P_{a1} \\ \vdots \\ P_{ad} \\ Q_a \end{pmatrix}. \tag{9.3}$$

Обозначим через

$$\mathbf{V}_a = (\mathbf{v}_{a+d} \ldots \mathbf{v}_{a+1}\mathbf{v}_a) \tag{9.4}$$

квадратную матрицу порядка $d+1$, составленную из столбцов (6.13). Тогда рекуррентное соотношение (6.16) можно переписать в матричном виде

$$\mathbf{v}_{a+d+1} = \mathbf{V}_a\mathbf{b} \tag{9.5}$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ со столбцом

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_d \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}, \tag{9.6}$$

а начальные условия –

$$\mathbf{V}_0 = (\mathbf{v}_d \dots \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_0) = (\mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0 \ \dots \ \mathrm{P}_\alpha^1 \mathbf{v}_0 \ \mathrm{P}_\alpha^0 \mathbf{v}_0), \tag{9.7}$$

где столбец $\mathbf{v}_0$ задан в (6.13). В силу (9.6) и (9.5) имеем

$$\mathbf{v}'_{a+d+1} = \mathbf{V}'_a \mathbf{b}, \tag{9.8}$$

где

$$\mathbf{V}'_a = (\mathbf{v}'_{a+d} \dots \mathbf{v}'_{a+1} \mathbf{v}'_a) = U\mathbf{V}_a = (U\mathbf{v}_{a+d} \ \dots \ U\mathbf{v}_{a+1} \ U\mathbf{v}_a) \tag{9.9}$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$

Предложение 9.1. *Столбцы* $\mathbf{v}'_a$ *из* (6.14) *удовлетворяют рекуррентному соотношению*

$$\mathbf{v}'_{a+d+1} = b_d \mathbf{v}'_{a+d} + \dots + b_1 \mathbf{v}'_{a+1} + b_0 \mathbf{v}'_a \tag{9.10}$$

для $a = 0, 1, 2, \dots$ *с теми же самыми коэффициентами, что и в соотношении* (6.16), *с начальными условиями*

$$\mathbf{v}'_d = U\mathrm{P}_\alpha^d \mathbf{v}_0, \dots, \quad \mathbf{v}'_1 = U\mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}'_0 = U\mathbf{v}_0, \tag{9.11}$$

определяемыми унимодулярной матрицей U, *матрицей Пизо* P_α *из* (2.16) *и столбцом* $\mathbf{v}_0$ *из* (6.13).

Доказательство. Поскольку в силу (9.9), имеем

$$\mathbf{V}'_0 = (\mathbf{v}'_d \dots \mathbf{v}'_1 \mathbf{v}'_0) = (U\mathbf{v}_d \ \dots \ U\mathbf{v}_1 \ U\mathbf{v}_0), \tag{9.12}$$

то предложение вытекает из (9.8), (6.17) и (9.12). □

Рациональные вершины (6.12) и (9.1) связаны между собою дробно-линейным преобразованием

$$\frac{P'_a}{Q'_a} = U\left\langle \frac{P_a}{Q_a} \right\rangle. \tag{9.13}$$

Если применить операцию сложения Фарея для дробей (4.9), то рекуррентное соотношение (9.10) можно применить

$$\frac{P'_{a+d+1}}{Q'_{a+d+1}} = \frac{b_d P'_{a+d}}{b_d Q'_{a+d}} \mathbin{\widehat{+}} \dots \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_1 P'_{a+1}}{b_1 Q'_{a+1}} \mathbin{\widehat{+}} \frac{b_0 P'_a}{b_0 Q'_a} \tag{9.14}$$

непосредственно к рациональным вершинам $v'_a = \frac{P'_a}{Q'_a}$ из (9.1). В этих терминах начальные условия (9.11) примут вид

$$v'_d = \operatorname{pr} U\mathrm{P}^d_\alpha \mathbf{v}_0, \quad \dots, \quad v'_1 = \operatorname{pr} U\mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_0, \quad v'_0 = \operatorname{pr} U\mathbf{v}_0, \tag{9.15}$$

где pr обозначает проекцию (6.5).

9.2. Точки Фарея. Симплекс Пизо $U\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ имеет рациональные вершины $v'_{ai} = \frac{P'_{a,i}}{Q'_{a,i}}$ для $i = 0, 1, \dots, d$. Согласно (4.10) данный симплекс содержит *точку Фарея*

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = \frac{P'_{a,0}}{Q'_{a,0}} \widehat{+} \frac{P'_{a,1}}{Q'_{a,1}} \widehat{+} \dots \widehat{+} \frac{P'_{a,d}}{Q'_{a,d}}, \tag{9.16}$$

имеющую координаты

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = \Big(\frac{\mathbf{P}'_{a1}}{\mathbf{Q}'_a}, \dots, \frac{\mathbf{P}'_{ad}}{\mathbf{Q}'_a}\Big). \tag{9.17}$$

Из этого определения следует, что точки Фарея $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ для степеней $a = 0, 1, 2, \dots$ так же, как и вершины $\frac{P'_{a,i}}{Q'_{a,i}}$ симплекса Пизо $U\mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$, удовлетворяют

$$\frac{\mathbf{P}'_{a+d+1}}{\mathbf{Q}'_{a+d+1}} = \frac{b_d\mathbf{P}'_{a+d}}{b_d\mathbf{Q}'_{a+d}} \widehat{+} \dots \widehat{+} \frac{b_1\mathbf{P}'_{a+1}}{b_1\mathbf{Q}'_{a+1}} \widehat{+} \frac{b_0\mathbf{P}'_a}{b_0\mathbf{Q}'_a} \tag{9.18}$$

– рекуррентному соотношению (9.14) с новыми *начальными условиями*

$$v'_{d,\max} = \mathrm{pr} U\mathrm{P}^d_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \dots,$$
$$v'_{1,\max} = \mathrm{pr} U\mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_{\max}, v'_{0,\max} = \mathrm{pr} U\mathbf{v}_{\max}, \tag{9.19}$$

где вектор $\mathbf{v}_{\max} = \mathbf{v}_{0,\max}$ определен равенством (7.5) и в координатах записывается в виде (7.6). Перепишем начальные условия (9.19) в однородном с рекуррентным соотношением (9.18) виде

$$\frac{\mathbf{P}'_d}{\mathbf{Q}'_d} = \operatorname{pr} U\mathrm{P}^d_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \quad \dots, \quad \frac{\mathbf{P}'_1}{\mathbf{Q}'_1} = \operatorname{pr} U\mathrm{P}_\alpha \mathbf{v}_{\max}, \quad \frac{\mathbf{P}'_0}{\mathbf{Q}'_0} = \operatorname{pr} U\mathbf{v}_{\max}. \tag{9.20}$$

§10. Основная теорема

Покажем, как изменится теорема 8.1 при дробно-линейном преобразовании $\alpha \mapsto U\langle\alpha\rangle$ иррациональной точки α.

Теорема 10.1. *Пусть* α *– полная точка степени* $\deg(\alpha) = d+1$*; и пусть рациональные числа* $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$ *для* $a = 0,1,2,\dots$ *заданы рекуррентным соотношением* (9.18) *и начальными условиями* (9.20)*. Тогда найдется такой номер* $a_{\alpha,\zeta,U} \geqslant 0$*, зависящий от точки* α*, единицы Пизо* ζ *из* (1.6) *и матрицы* U *из унимодулярной группы* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$*, что будут иметь место следующие утверждения.*

1. *Существуют симплексы Пизо*

$$\mathbf{s}'^{a} = U\langle \mathbf{s}^a\rangle = UP^a_\alpha\langle\triangle\rangle \tag{10.1}$$

– образы симплексов $\mathbf{s}^a$ *из* (9.2) *для* $a \geqslant a_{\alpha,\zeta,U}$*; при этом точка*

$$\alpha' = (\alpha'_1,\dots,\alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle = \Big(\frac{\alpha_{U,1}}{\alpha_{U,0}},\dots,\frac{\alpha_{U,d}}{\alpha_{U,0}}\Big) \tag{10.2}$$

является внутренней для симплексов $\mathbf{s}'^{a}$*, обладающих свойством минимальности (см. определение* (4.3)-(4.5)*):*

$$\frac{P'}{Q'} \notin \mathbf{s}'^{a}, \tag{10.3}$$

если $1 \leqslant |Q|' < |Q'_{a,\max}|$*; единственная точка*

$$\frac{P'}{Q'} \in \mathbf{s}'^{a} \tag{10.4}$$

со знаменателем $Q' = \mathbf{Q}'_a$ *есть точка Фарея* $\frac{P'}{Q'} = \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$*, определяемая по формуле*

$$\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a} = U\Big\langle\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\Big\rangle, \tag{10.5}$$

где $\frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}$ *– подходящие дроби из неравенств* (7.12).

2. *Для любого фиксированного* $\theta > 0$ *существует такая локализованная матрица Пизо* P_α *из предложения* 2.1*, что выполняются неравенства*

$$\Big|\alpha' - \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}\Big|_s \leqslant \frac{c'}{\mathbf{Q}'^{\,1+\frac{1}{d}-\theta}_a} \tag{10.6}$$

для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta,U}$*. Здесь знаменатели*

$$|\mathbf{Q}'_a| \to +\infty \quad \text{при} \quad a \to +\infty; \tag{10.7}$$

константы $a_{\alpha,\theta,U} > 0$ *и* $c' = c'_{\alpha,\theta,U} > 0$ *не зависят от* a.

Доказательство. По теореме 7.1 если α – полная точка степени $\deg(\alpha) = d+1$ и $a \geqslant l_\alpha(\triangle)$, то существует симплекс Пизо $\mathbf{s}^a = \mathrm{P}^a_\alpha\langle\triangle\rangle$ и он обладает свойством минимальности (7.7), (7.8). Принимая во внимание, что точка α иррациональная (2.8) и выполняется неравенство (8.2), можем применить теорему 12.1 [20]. По этой теореме найдется такой номер $a_{\alpha,U} \geqslant 0$, зависящий от точки α и матрицы U, что для $a \geqslant a_{\alpha,U}$ будет существовать симплекс $\mathbf{s}'^a = U\langle\mathbf{s}^a\rangle$ с минимальным свойством (10.3), (10.4) для преобразованной точки α' из (10.2). На этом пути получаем первую часть теоремы, выбирая $a_{\alpha,\zeta,U} = \max\{l_\alpha(\triangle), a_{\alpha,U}\}$.

Теперь докажем вторую часть теоремы. Воспользуемся неравенством

$$\left|\alpha - \frac{\mathbf{P}_a}{\mathbf{Q}_a}\right|_s \leqslant \frac{c}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{10.8}$$

из теоремы 8.1 для всех $a \geqslant a_{\alpha,\theta}$. Из (10.8) и леммы 11.3 [20] следует оценка

$$\left|\alpha' - \frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}\right|_s \leqslant \frac{c'}{\mathbf{Q}_a^{1+\frac{1}{d}-\theta}} \tag{10.9}$$

для точки α' из (10.2) с другой константой c', также не зависящей от a. Чтобы перейти от (10.9) к неравенству (10.6), применим лемму 11.4 из [20], где доказана эквивалентность

$$|\mathbf{Q}'_a| \asymp \mathbf{Q}_a \quad \to \quad +\infty \tag{10.10}$$

при $a \to +\infty$, т.е. отношения $(|\mathbf{Q}'_a|/\mathbf{Q}_a)^{\pm 1}$ ограничены для достаточно больших значений a. Сопоставляя (10.9) с (10.10), получаем неравенство (10.6), а свойство (10.7) будет вытекать снова из эквивалентности (10.10) и асимптотики (8.1). □

Заметим, что приближения (10.6) нетривиальны только при выполнении условия (10.7) для знаменателей $\mathbf{Q}'_a$ аппроксимирующих точку α' подходящих дробей $\frac{\mathbf{P}'_a}{\mathbf{Q}'_a}$.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*, — Зап. науч. семин. ПОМИ, **449** (2016), 168–195.

2. В. Г. Журавлев, *Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел*, — Зап. науч. семин. ПОМИ, (2017), 1–27. (см. настоящий сборник)
3. Дж. В. С. Касселс, Введение в теорию диофантовых приближений, М., 1961.
4. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*, — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, Helsinki, (1957) 18–23, Mercators Tryckeri, Helsinki (1958), 45–64.
5. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*, — Nordisk Nat. Tidskr. **9** (1961), 37–43.
6. A. Nogueira, The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm, — Israel J. Math. **90**, No. 1–3 (1995), 373–401.
7. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*, Oxford Univ. Press, New York, 2000.
8. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux–Rauzy–Poincare algorithm*, — Adv. Appl. Math. **63** (2015), 90–130.
9. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*, — `arXiv:1508.07814`, August 2015.
10. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire*, — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th, 2015.
11. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*, — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
12. R. Mönkemeyer, *Über Fareynetze in n Dimensionen*, — Math. Nachr. **11** (1963), 321–344.
13. D. Grabiner, *Farey nets and multidimensional continued fractions*, — Monatsh. Math. **114**, No. 1 (1992), 35–61.
14. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*, — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
15. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*, — Современные проблемы математики, МИ РАН, (2017), 1–25.
16. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-ое изд. М., Наука 1978.
17. J. Lagarias, *Best simultaneous Diophantine approximations. I. Groth rates of best approximation denomimators*, — Trans. Amer. Math. Soc., **272:2** (1982), 545–554.
18. З. И. Боревич, И. Р. Шафаревич, *Теория чисел.* 2-ое изд. М., Наука, 1972.
19. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел.* Шестое изд. М., Наука, 1953.
20. В. Г. Журавлев, *Дробно-линейная инвариантность многомерных цепных дробей.* — Зап. науч. семин. ПОМИ **458** (2017), 42–76.

Zhuravlev V. G. Fractional-linear invariance of the symplex-module algorithm for decomposition in multidimensional continued fractions.

Using the simplex-module algorithm one can decompose real numbers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ into multidimensional continued fractions. We verified the invariance of this algorithm under fractional-linear transformations $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ with matrices U in the unimodular group $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, and prove the conservation of a linear recurrence and the approximation order for convergent fractions to the transformed α'.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей 11,
600024 Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 апреля 2017 г.