Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

В. Г. Журавлев

ДРОБНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ МНОГОМЕРНЫХ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ

Светлой памяти
Галины Васильевны Кузьминой
посвящается

Доказывается инвариантность симплекс-ядерного алгоритма разложения вещественных чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби относительно дробно-линейных преобразований $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ с матрицами U, принадлежащими унимодулярной группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. Для преобразованных наборов чисел α' найдены подходящие цепные дроби с наилучшими приближениями к α'.

Введение

0.1. Симплекс-ядерный алгоритм. В [1] был предложен универсальный симплекс-ядерный алгоритм разложения вещественных алгебраических чисел $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ в многомерные цепные дроби. В случае иррациональных точек α, когда числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над кольцом целых рациональных чисел $\mathbb{Z}$, симплекс-ядерный алгоритм работает по следующей схеме. Выбирается целевая функция $\wp(r)$. Данная функция и точка α определяют некоторую $\wp$-стратегию построения бесконечной монотонной последовательности

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 \supset \mathbf{s}_1 \supset \dots \supset \mathbf{s}_n \supset \dots \ni \alpha, \tag{0.1}$$

состоящий из d-мерных открытых симплексов $\mathbf{s}_n$ с рациональными вершинами. Симплексы (0.1) обладают свойством минимальности:

1) любая рациональная точка $\frac{P}{Q} = \left(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q}\right)$ не попадает

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}_n \tag{0.2}$$

Ключевые слова: многомерные цепные дроби, наилучшие приближения, суммы Фарея.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант No. 14-11-00433.

в симплекс $\mathbf{s}_n$, если ее общий знаменатель $1 \leqslant Q < \mathbf{Q}_n$, где $\mathbf{Q}_n$ – знаменатель точки Фарея

$$\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n} = \Big(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \ldots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\Big) \tag{0.3}$$

симплекса $\mathbf{s}_n$, равной сумме Фарея всех его вершин;

2) единственной точкой $\frac{P}{Q}$ со знаменателем $Q = \mathbf{Q}_n$, содержащейся в симплексе

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}_n, \tag{0.4}$$

является точка Фарея $\frac{P}{Q} = \frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$.

Из включения $\alpha \in \mathbf{s}_n$ и свойства минимальности (0.2)-(0.4) симплекса $\mathbf{s}_n$ следует, что точка Фарея $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$ дает наилучшее приближение для иррациональной точки α относительно $\mathbf{s}_n$-нормы, для которой в качестве выпуклого тела выбран сам симплекс $\mathbf{s}_n$. В этом состоит геометрический смысл минимальности симплексов $\mathbf{s}_n$ в последовательности (0.1).

В [1] была доказана следующая оценка (см. теорему 8.1)

$$\left|\alpha_1 - \frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}\right| + \ldots + \left|\alpha_d - \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\right| \leqslant \frac{c}{\mathbf{Q}_n^{1+\eta^*}} \tag{0.5}$$

для всех $n \geqslant n_{\eta^*}$. Здесь константа $c > 0$ и нижняя граница n_{η^*} для n определяются выбором показателя $\eta^* < \eta(\alpha, \wp)$, где $\eta(\alpha, \wp)$ – диофантова экспонента, зависящая от иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ и целевой функции $\wp(r)$. Диофантова экспонента определяется равенством

$$\eta(\alpha, \wp) = \sup_{n' \geqslant 0} \inf_{n \geqslant n'} \frac{-\ln \wp(r_n)}{\ln \mathbf{Q}_n},$$

где r_n – ядра индуцированных разбиений торов $\mathbb{T}^d$, соответствующие симплексам $\mathbf{s}_n$ из (0.1). Отсюда и (0.4) проистекает название для рассматриваемого здесь симплекс-ядерного алгоритма. Ядра r_n подробно исследованы в [3] в случае размерности $d = 2$ и в [4] для произвольного d.

Приближение (0.5) нетривиально, если выполняется неравенство $\eta^* > 0$. Данное требование можно удовлетворить только в случае, когда диофантова экспонента $\eta(\alpha, \wp) > 0$, – это основное требование, которое необходимо выполнить при выборе целевой функции $\wp(r)$.

0.2. Дробно-линейные преобразования. Цель настоящей статьи – исследовать, насколько симплекс-ядерный алгоритм (0.1) инвариантен относительно дробно-линейных преобразований

$$\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_d') = U\langle\alpha\rangle \tag{0.6}$$

базовых точек α с матрицами U, принадлежащими унимодулярной группе $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$.

В теореме 12.2 доказывается существование такого натурального числа n_{α,U,η^*}, для которого приведенная выше оценка (0.5) принимает вид

$$\left|\alpha_1' - \frac{\mathbf{P}'_{n1}}{\mathbf{Q}'_n}\right| + \ldots + \left|\alpha_d' - \frac{\mathbf{P}'_{nd}}{\mathbf{Q}'_n}\right| \leqslant \frac{c'}{|\mathbf{Q}'_n|^{1+\eta^*}} \tag{0.7}$$

для всех $n \geqslant n_{\alpha,U,\eta^*}$. При этом подходящие дроби в (0.7) преобразуются

$$\left(\frac{\mathbf{P}'_{n1}}{\mathbf{Q}'_n}, \ldots, \frac{\mathbf{P}'_{nd}}{\mathbf{Q}'_n}\right) = U\left\langle\left(\frac{\mathbf{P}_{n1}}{\mathbf{Q}_n}, \ldots, \frac{\mathbf{P}_{nd}}{\mathbf{Q}_n}\right)\right\rangle \tag{0.8}$$

по тому же правилу (0.6), что и базисная точка α; $c' = c \cdot c_{\alpha,U}$, где c – константа из неравенства (0.5) и множитель $c_{\alpha,U} > 0$ зависит только от точки α и выбора унимодулярной матрицы U в (0.6).

Более того, отметим (см. теорему 12.1), что получаемые таким образом приближения (0.8) остаются наилучшими для новой точки α', но уже относительно других $\mathbf{s}_n'$-норм, для которых в качестве выпуклых тел выбираются симплексы $\mathbf{s}_n' = U\langle\mathbf{s}_n\rangle$, также обладающие стягивающим свойством (0.1) и свойством минимальности (0.2)–(0.4).

0.3. Связи с другими работами. Симплекс-ядерный алгоритм основан на индуцированных торических разбиениях, первое применение которых к задачам нахождения наилучших многомерных приближений было найдено в [3, 4].

Все рациональные вершины симплексов $\mathbf{s}_n$ имеют тот же порядок приближения к точке α, что и точки Фарея $\frac{\mathbf{P}_n}{\mathbf{Q}_n}$ из (0.3), но только последние являются наилучшими приближениями. Для двумерных приближений операция сложения Фарея точек в разных вариантах использовалась в [5–11]. Одномерный случай см., например, [12]. Обединение этих двух подходов: индуцированных разбиениий и сумм Фарея – было осуществлено в работе [1].

§1. Согласованные множества векторов и их производные

1.1. Согласованные множества векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, d\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_d$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^d$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{d-1}\}$ – дополнительное к σ сочетание в $\{0, 1, \ldots, d\}$. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие $\sigma \Leftrightarrow \sigma'$. Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $d-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ линейно независимы. Обозначим через $H_{\sigma'}$ гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ назовем* согласованным, *если для всех дополнительных к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ не принадлежат гиперплоскости $H_{\sigma'}$ и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения согласованности следует, что любые D вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$ будут линейно независимы.

Определение 1.2. *Любое согласованное множество векторов*

$$v = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\} \tag{1.1}$$

из $\mathbb{R}^d$ будем для краткости называть звездой.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через $\Delta(v)$ натянутый на векторы звезды v замкнутый симплекс, и пусть $\Delta^{\text{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса. Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\text{int}}(v). \tag{1.2}$$

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.3}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\text{int}} \cap X_2^{\text{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания* $\sigma = \{k_1, k_2\}$ *из* Σ *сумма векторов* $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ *звезды* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ *не принадлежит гиперплоскости* $H_{\sigma'}$, *где* σ' *– дополнительное сочетание для* σ. *Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.4}$$

будет согласованным. Здесь $v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\}$ *или* $v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\}$ *в зависимости от того, какие из пар векторов* v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^{\pm}_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

$\square$

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.4) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.3. *Обозначим через* $v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma')$ *то множество векторов из* (1.4), *которое является согласованным. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 1.1, *то будем говорить, что согласованное множество векторов* $\{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождено *или более кратко – звезда* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ невырождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_d\}$ определено отображение

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_d^\sigma\}, \tag{1.5}$$

где $v^\sigma_{k_1} = v_{k_1}$, $v^\sigma_{k_2} = v_\sigma$ или $v^\sigma_{k_1} = v_\sigma$, $v^\sigma_{k_2} = v_{k_2}$ в зависимости от выполнения условия из (1.4), и $v^\sigma_{k'} = v_{k'}$ для всех $k' \in \sigma'$.

Звезду v^σ из (1.5) назовем *σ-производной* нерывожденной звезды v. Для нерывожденной звезды v существуют $C^2_{d+1} = \frac{(d+1)d}{2}$ ее производных звезд v^σ.

§2. Симплексы

2.1. Линейные унимодулярные преобразования. Основной областью для нас будет замкнутый d-мерный *единичный симплекс* $\triangle_e = \triangle_e^d$ с вершинами в точках

$$e_0 = (0, \dots, 0), \quad e_1 = (1, \dots, 0), \quad \dots, \quad e_d = (0, \dots, 1)$$

из пространства $\mathbb{R}^d$.

Выделим в *унимодулярной группе* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$, состоящей из целочисленных матриц порядка $d+1$ с определителем ± 1, *подгруппу* $G_0 = \mathrm{GL}_{d+1,0}(\mathbb{Z})$ из матриц

$$U = \begin{pmatrix} V & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.1}$$

где $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ и $L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_d \end{pmatrix}$ – произвольный целочисленный столбец. Группа G_0 действует на точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ из $\mathbb{R}^d$ по формуле $U\alpha = V\alpha + L$, где α рассматривается как столбец

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Таким образом, группа G_0 соответствует целочисленным унимодулярным преобразованиям пространства $\mathbb{R}^d$.

Точку (вектор) α из (2.2) назовем *иррациональной* (*иррациональным*), если выполняется условие:

$$\textit{числа}\quad 1, \alpha_1, \dots, \alpha_d \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.3}$$

2.2. Унимодулярный базисный симплекс.

Предложение 2.1. *Если α – иррациональная точка, то существует такая матрица $U \in G_0$, что выполняется включение*

$$\alpha \in \triangle_U^d, \tag{2.4}$$

где $\triangle_U^d = U\triangle_e^d$.

Доказательство. см. [2]. □

Симплекс $\triangle_U^d$ из (2.4) назовем *базисным*. Его основное свойство состоит в том, что он является *унимодулярным*: векторы, выходящие из одной его вершины во все остальные вершины, образуют *унимодулярный базис*, т.е. некоторый базис кубической решетки $\mathbb{Z}^d$.

2.3. Базисный симплекс. Выберем в качестве s *базисный симплекс*

$$\triangle = \triangle_U^d \tag{2.5}$$

из предложения 2.1. Он имеет целочисленные вершины

$$v_i = Ue_i = \frac{P_i}{Q_i}, \tag{2.6}$$

где полагаем $Q_i = 1$ для всех $i = 0, 1, \ldots, d$. Векторы

$$v_i' = v_i - v_0 = Ve_i \tag{2.7}$$

для $i = 1, \ldots, d$ с матрицей $V \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ образуют унимодулярный базис. Поэтому симплекс (2.5) имеет объем

$$\operatorname{vol} \triangle = \frac{1}{d!}. \tag{2.8}$$

2.4. Суперсимплекс. Определим следующий *суперсимплекс*

$$\widehat{\triangle} = \widehat{\triangle}_U^d \subset \mathbb{R}^{d+1}. \tag{2.9}$$

Он имеет $d+2$ вершины: $d+1$ целочисленную вершину

$$\widehat{v}_i = \widehat{U}e_i = \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

с индексами $i = 0, 1, \ldots, d$ и еще одну вершину в начале координат $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$. Из (2.7) и (2.10) следует, что векторы

$$\widehat{v}_i = \widehat{v}_i - 0$$

для $i = 0, 1, \ldots, d$ образуют унимодулярный базис и поэтому суперсимплекс (2.9), как и базисный симплекс (2.8), имеет объем

$$\operatorname{vol} \widehat{\triangle} = \frac{1}{(d+1)!}. \tag{2.11}$$

Далее выходящие из начала координат векторы и их концы будем отождествлять.

§3. Дифференцирования центрированных унимодулярных базисов

3.1. Центрированный унимодулярный базис. Как уже было сказано, множество ребер

$$\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\} \tag{3.1}$$

суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ из (2.9) образуют унимодулярный базис в пространстве $\mathbb{R}^{d+1}$. Базисный симплекс $\triangle$ из (2.5) является гранью суперсимплекса $\widehat{\triangle}$ и $\triangle$ содержит в качестве внутренней точку α. Такой $\widehat{\triangle}$ назовем *центрированным унимодулярным симплексом* или кратко – *CU-симплексом.*

Ему отвечает *центрированный унимодулярный базис* $\widehat{V}$ из (3.1) (*CU-базис*), центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Последнее означает, что внутренняя область *конуса* $\mathbb{R}_+\widehat{V}$ содержит *луч* $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.

Запишем векторы CU-базиса (3.1) в виде столбцов

$$\widehat{v}_0 = \begin{pmatrix} P_{01} \\ \vdots \\ P_{0d} \\ Q_0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{v}_1 = \begin{pmatrix} P_{11} \\ \vdots \\ P_{1d} \\ Q_1 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \widehat{v}_d = \begin{pmatrix} P_{d1} \\ \vdots \\ P_{dd} \\ Q_d \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

имеющих целые координаты. Составленная из координат (3.2) матрица S унимодулярна.

3.2. Пространства. Введем следующие понятия:

$$\mathbf{S} = \mathbb{R}^{d+1}, \quad \mathbf{K} = \mathbb{R}^d \tag{3.3}$$

– *суперпространство* и *ядерное пространство* (*karyon space*), вложенное

$$\mathbf{K} \quad \hookrightarrow \quad \mathbf{K}_0 \subset \mathbf{S} \tag{3.4}$$

в $\mathbf{S}$ как гиперплоскость,

$$\mathbf{K}_0 = \{(x, 0) : \quad x \in \mathbf{K}\} \tag{3.5}$$

– *ядерная гиперплоскость*

3.3. Проекции. Определим следующие проекции:

$$\mathbf{S} \quad \xrightarrow{\mathrm{pr}_0} \quad \mathbf{K}_0 \quad \xrightarrow{\kappa_0} \quad \mathbf{K}, \tag{3.6}$$

где

$$\mathrm{pr}_0 : \quad (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \quad \mapsto \quad (x_1 - \alpha_1 x_{d+1}, \ldots, x_d - \alpha_d x_{d+1}, 0) \tag{3.7}$$

– параллельная проекция вдоль вектора

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

и

$$\kappa_0: \quad (x_1, \dots, x_d, 0) \quad \mapsto \quad (x_1, \dots, x_d) \tag{3.9}$$

– изоморфизм. Обозначим через

$$\kappa = \kappa_0 \circ \mathrm{pr}_0 \tag{3.10}$$

композицию отображений (3.7) и (3.9).

3.4. Центрированные унимодулярные базисы и звезды. Пусть $\widehat{V}$ – CU-базис, определенный в (3.1). Его проекция (3.10)

$$\kappa: \quad \widehat{V} \quad \to \quad r \tag{3.11}$$

представляет собою множество $r = \{r_0, r_1, \dots, r_d\}$, состоящее из векторов

$$r_i = \kappa(\widehat{v}_i) = v_i - \alpha \tag{3.12}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$ в ядерном пространстве $\mathbf{K}$ из (3.3), (3.4).

Предложение 3.1. *Если α – иррациональная точка* (2.2) *и $\widehat{V}$ – центрированный унимодулярный базис* (3.1)*, то множество векторов r из* (3.11) *образует невырожденную звезду.*

Доказательство. см. в [1]. □

3.5. Дифференцирования базисов. Как уже отмечалось, отображение (3.11) задает биекцию между векторами CU-базиса $\widehat{V}$ и лучами звезды r. Поскольку оно является линейным отображением, то с помощью коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \widehat{V} & \xrightarrow{\kappa} & r \\ \downarrow{\scriptstyle\sigma} & & \downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \widehat{V}^{\sigma} & \xrightarrow{\kappa} & r^{\sigma} \end{array} \tag{3.13}$$

можно перенести операции дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ звезд (1.5) на дифференцирования CU-базисов $\widehat{V}$.

Выясним *геометрический смысл* дифференцирований CU-базисов $\widehat{V}$. Пусть σ' – дополнительное сочетание к $\sigma \in \Sigma$. Обозначим через $\widehat{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в $\mathbb{R}^{d+1}$, содержащую векторы $\widehat{v}_{k'_j} \in \widehat{V}$ с индексами k'_j из σ' и луч $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Если, допустим, для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вектор $\widehat{v}_{k_1}$ и сумма векторов $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\widehat{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\widehat{V} \xrightarrow{\sigma} \widehat{V}^{\sigma} \tag{3.14}$$

сводится к замене вектора $\widehat{v}_{k_2}$ на сумму $\widehat{v}_{k_1} + \widehat{v}_{k_2}$.

Предложение 3.2. *Если α – иррациональная точка* (2.2), *то для любого дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ производное множество векторов $\widehat{V}^{\sigma}$, определенное в* (3.13) *и* (3.14), *снова образует CU-базис, т.е. унимодулярный базис, центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.*

Доказательство. см. в [1]. □

Определенный в (3.14) CU-базис $\widehat{V}^{\sigma}$ назовем *σ-производным базисом.*

Используя предложения 3.1 и 3.2, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.3. 1. *Если α – иррациональная точка* (2.2), *то любой центрированный унимодулярный базис $\widehat{V}$, центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$, является бесконечно дифференцируемым.*

2. *При том же условии на α звезда $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_d\}$ из* (3.11) *также будет бесконечно дифференцируемой.*

Доказательство. см. в [1]. □

Замечание 3.1. Ранее бесконечно дифференцируемость звезд $r = \{r_0, r_1, \ldots, r_d\}$ была доказана в [3] для размерности $d = 2$.

§4. Пространства Фарея

4.1. Пространство и гиперплоскость Фарея. Выделим в суперпространстве $\mathbf{S}$ из (3.3) единичную гиперплоскость

$$\mathbf{F}_1 = \widehat{\mathbf{F}} = \{\widehat{x} = (x, 1) : \quad x \in \mathbf{F}\} \quad \subset \quad \mathbf{S}, \tag{4.1}$$

где

$$\mathbf{F} = \mathbb{R}^d. \tag{4.2}$$

Назовем $\mathbf{F}_1$ *гиперплоскостью Фарея*, а $\mathbf{F}$ – *пространством Фарея.*

Зададим проекции

$$\mathbf{S}_+ \quad \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \quad \mathbf{F}_1 \quad \xrightarrow{\varphi_1} \quad \mathbf{F}. \tag{4.3}$$

Здесь

$$\mathbf{S}_+ = \{(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) \in \mathbf{S}; \quad x_{d+1} > 0\} \tag{4.4}$$

обозначает *верхнее суперпространство*,

$$\mathrm{pr}_1: \quad \big(x_1, \dots, x_d, x_{d+1}\big) \quad \mapsto \quad \big(\tfrac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \tfrac{x_d}{x_{d+1}}, 1\big) \tag{4.5}$$

– *центральную проекцию* на гиперплоскость Фарея $\mathbf{F}_1$ с центром в $0 \in \mathbb{R}^{d+1}$ и

$$\varphi_1: \quad (x_1, \dots, x_d, 1) \quad \mapsto \quad (x_1, \dots, x_d) \tag{4.6}$$

– изоморфизм. Далее, обозначим через

$$\varphi = \varphi_1 \circ \mathrm{pr}_1 \tag{4.7}$$

композицию отображений (4.5) и (4.6).

4.2. Сумма Фарея точек. Данные нами названия для множеств $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}_1$ объясняет следующее утверждение.

Предложение 4.1. *При отображении*

$$\varphi: \quad \mathbf{S}_+ \quad \longrightarrow \quad \mathbf{F} \tag{4.8}$$

имеет место согласование операций

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \widehat{+} \varphi(y), \tag{4.9}$$

где справа

$$\big(\tfrac{x_1}{x_{d+1}}, \dots, \tfrac{x_d}{x_{d+1}}\big) \widehat{+} \big(\tfrac{y_1}{y_{d+1}}, \dots, \tfrac{y_d}{y_{d+1}}\big) = \big(\tfrac{x_1+y_1}{x_{d+1}+y_{d+1}}, \dots, \tfrac{x_d+y_d}{x_{d+1}+x_{d+1}}\big) \tag{4.10}$$

– *сумма Фарея точек.*

Доказательство. см. в [1]. □

§5. Дифференцирования центрированных симплексов

5.1. Центрированные унимодулярные симплексы. Пусть $\widehat{V} = \{\widehat{v}_0, \widehat{v}_1, \ldots, \widehat{v}_d\}$ – произвольный центрированный унимодулярный базис, центрированный лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$. Подействуем на него

$$\mathbf{S} \supset \widehat{V} \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \mathbf{s} \subset \mathbf{F} \tag{5.1}$$

проекцией φ из (4.8). Образом будет симплекс

$$\mathbf{s} \quad = \{v_0, v_1, \ldots, v_d\}, \tag{5.2}$$

имеющий рациональные вершины

$$v_i = \varphi(\widehat{v}_i) = \frac{P_i}{Q_i} = \Big(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \ldots, \frac{P_{id}}{Q_i}\Big) \tag{5.3}$$

с индексами $i = 0, 1, \ldots, d$.

Замечание 5.1. 1. Чтобы не усложнять обозначения, мы отождествляем симплекс $\mathbf{s}$ с множеством его вершин $\{v_0, v_1, \ldots, v_d\}$.

2. В определении (5.3) вершины v_i получаются, как образы концов базисных векторов $\widehat{v}_i$.

По определению CU-базиса $\widehat{V}$, луч $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$ принадлежит внутренней области конуса $\mathbb{R}_+\widehat{V}$. Отсюда и (4.7) следует, что точка

$$\alpha = \varphi(\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}) = \varphi(\widehat{\alpha}) \tag{5.4}$$

будет внутренней точкой симплекса $\mathbf{s} \subset \mathbf{F}$. Назовем $\mathbf{s}$ *центрированным точкой α симплексом.*

5.2. Дифференцирования симплексов. Используя коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \widehat{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathbf{s} \arrow[d, "\sigma"] \\ \widehat{V}^{\sigma} \arrow[r, "\varphi"] & \mathbf{s}^{\sigma} \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

перенесем операции дифференцирования $\sigma \in \Sigma$ центрированных унимодулярных базисов $\widehat{V}$ на дифференцирования центрированных симплексов (5.2).

Геометрический смысл дифференцирований симплексов $\mathbf{s}$ состоит в следующем. Пусть $\sigma = \{k_1, k_2\}$ и σ' – дополнительное сочетание.

Обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma'}$ гиперплоскость в $\mathbb{R}^d$, проходящую через вершины $v_{k'_j}$ симплекса $\mathbf{s}$ с индексами k'_j из σ' и точку α Если для сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ вершина v_{k_1} и сумма вершин $v_{k_1}\widehat{+}v_{k_2}$ лежат по разные стороны от гиперплоскости $\mathcal{H}_{\sigma'}$, то операция дифференцирования

$$\mathbf{s} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{s}^{\sigma} \tag{5.2}$$

симплекса $\mathbf{s}$ сводится к замене вершины v_{k_2} на сумму вершин $v_{k_1}\widehat{+}v_{k_2}$. В противном случае вершина v_{k_1} заменяется на сумму $v_{k_1}\widehat{+}v_{k_2}$.

Из (5.1) и (5.2) следует, что новая вершина $v_{k_1}\widehat{+}v_{k_2}$ лежит на ребре, соединяющим вершины v_{k_1} и v_{k_2}.

§6. Минимальные симплексы

6.1. Минимальные рациональные симплексы. Пусть открытый d-мерный симплекс $\mathbf{s}$ имеет рациональные вершины

$$\frac{P_i}{Q_i} = \Big(\frac{P_{i1}}{Q_i}, \dots, \frac{P_{id}}{Q_i}\Big) \tag{6.1}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$, удовлетворяющие условию

$$Q_i > 0, \quad \text{НОД}\,(P_{i1}, \dots, P_{id}, Q_i) = 1. \tag{6.2}$$

Назовем $\mathbf{s}$ *минимальным симплексом*, если он не содержит

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s} \tag{6.3}$$

никакой точки

$$\frac{P}{Q} = \Big(\frac{P_1}{Q}, \dots, \frac{P_d}{Q}\Big), \tag{6.4}$$

координаты которой имеют общий знаменатель $1 \leqslant \mathbf{Q} < \mathbf{Q}_{\max}$, где использовали обозначение

$$Q_{\max} = Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_d. \tag{6.5}$$

В [2] приведены некоторые свойства, равносильные свойству быть минимальным симплексом.

Предложение 6.1. *Следующие утверждения равносильны:*

1) *симплекс* $\mathbf{s}$ *минимальный:* (6.1)–(6.5)*;*

2) *квадратная матрица*

$$S = \begin{pmatrix} P_{01} & P_{11} & \dots & P_{d1} \\ & & \dots & \\ P_{0d} & P_{1d} & \dots & P_{dd} \\ Q_0 & Q_1 & \dots & Q_d \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

размера $d+1$ *унимодулярна;*

3) *симплекс* $\mathbf{s}$ *имеет объем*

$$\operatorname{vol}\mathbf{s} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant d} Q_i\Big)^{-1}. \tag{6.7}$$

Из предложения 6.1 вытекает следующая теорема.

Теорема 6.1. *Пусть* α *– иррациональная точка* (2.2) *и* $\mathbf{s}$ *– любой центрированный точкой* α *симплекс из диаграммы* (5.1) *с рациональными вершинами* (5.3)*. Тогда такой симплекс* $\mathbf{s}$ *является минимальный* (6.1)–(6.5).

Доказательство. см. в [1]. □

6.2. Производные центрированных минимальных симплексов.

Теорема 6.2. *Пусть* α *– иррациональная точка* (2.2) *и* $\mathbf{s}$ *– центрированный точкой* α *минимальный симплекс из диаграммы* (5.1)*. Тогда для любого* $\sigma \in \Sigma$ *при дифференцировании* $\mathbf{s}\xrightarrow{\sigma}\mathbf{s}^{\sigma}$*, определенного в* (5.2), $\mathbf{s}$ *переходит снова в минимальный симплекс* $\mathbf{s}^{\sigma}$*, центрированный точкой* α*.*

Доказательство. см. в [1]. □

Предложение 6.2. *Пусть* α *– иррациональная точка* (2.2) *и* $\mathbf{s}$ *– центрированный точкой* α *симплекс из диаграммы* (5.1)*. Тогда симплекс* $\mathbf{s}$ *бесконечно дифференцируемый* (5.2).

Доказательство. вытекает из предложения 3.3 и теоремы 6.2. □

§7. Аппроксимация

7.1. Связь между ядерном пространством и пространством Фарея. Между ядерном пространством $\mathbf{K}$ и пространством Фарея $\mathbf{F}$ существует следующая связь.

Лемма 7.1. *Пусть точка* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d, x_{d+1})$ *принадлежит верхнему суперпространству* $\mathbf{S}_+$ *из* (4.4), $x = x^{\varphi} = \varphi(\mathbf{x})$ *– ее образ относительно отображения* (4.7), *принадлежащий пространству Фарея* $\mathbf{F}$, *а* $x^{\kappa} = \kappa(\mathbf{x})$ *– образ относительно отображения* (3.10), *принадлежащий ядерному пространству* $\mathbf{K}$. *Тогда имеет место равенство*

$$|x - \alpha|_s = \frac{|x^{\kappa}|_s}{x_{d+1}}, \tag{7.1}$$

где $|\cdot|_s$ *обозначает* s*-метрику*

$$|(x_1, \ldots, x_d)|_s = |x_1| + \ldots + |x_d|. \tag{7.2}$$

Доказательство. см. в [1]. □

7.2. Бесконечные итерации дифференцирований. Рассмотрим

$$\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}} \tag{7.3}$$

– множество всех бесконечных последовательностей $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$, состоящих из произвольных сочетаний σ_i из Σ; и пусть

$$[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\} \tag{7.4}$$

обозначает *отрезок* из первых n членов последовательности σ, при этом полагаем, что $[\sigma]_0 = \varnothing$. Используя определение производной симплекса (5.2), индукцией по $n = 0, 1, 2, \ldots$ определим $[\sigma]_n$*-производные*

$$\mathbf{s}^{[\sigma]_n} = (\mathbf{s}^{[\sigma]_{n-1}})^{\sigma_n}, \tag{7.5}$$

центрированного точкой α симплекса $\mathbf{s}$, где условимся $\mathbf{s}^{[\sigma]_0} = \mathbf{s}$ для $n = 0$.

Если α – иррациональная точка (2.2), то в силу предложения 6.2 симплекс $\mathbf{s}$ будет $[\sigma]_n$*-дифференцируемым* для всех значений $n = 0, 1, 2, \ldots$ при любом выборе последовательности дифференцируемостей σ из множества (7.3).

Лемма 7.2. *Если* α *– иррациональная точка* (2.2), *то при любом выборе последовательности дифференцируемостей* $\sigma \in \Xi$ *симплексы* $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ *из* (7.5) *образуют монотонную последовательность*

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^{[\sigma]_0} \supset \mathbf{s}^{[\sigma]_1} \supset \ldots \supset \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \supset \ldots \ni \alpha. \tag{7.6}$$

Указанные симплексы имеют объемы $\operatorname{vol}\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$, *вычисляемые по формуле*

$$\operatorname{vol}\mathbf{s}^{[\sigma]_n} = \frac{1}{d!}\Big(\prod_{0\leqslant i\leqslant d} Q_i^{[\sigma]_n}\Big)^{-1} \tag{7.7}$$

и обладающие свойством

$$\operatorname{vol} \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \longrightarrow 0 \quad \textit{при} \quad n \longrightarrow +\infty. \tag{7.8}$$

Доказательство. см. в [1]. $\square$

Для базиса (3.1) по правилу (6.1) и (6.6) определим $[\sigma]_n$-производные базисы

$$\widehat{V}^{[\sigma]_n} = \{\widehat{v}_0^{[\sigma]_n}, \widehat{v}_1^{[\sigma]_n}, \dots, \widehat{v}_d^{[\sigma]_n}\} \tag{7.9}$$

порядка n, состоящие из целочисленных векторов

$$\widehat{v}_0^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}, \ \widehat{v}_1^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{11}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{1d}^{[\sigma]_n} \\ Q_1^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}, \dots, \ \widehat{v}_d^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ \vdots \\ P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix}. \tag{7.10}$$

Обозначим через

$$S^{[\sigma]_n} = \begin{pmatrix} P_{01}^{[\sigma]_n} & P_{11}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{d1}^{[\sigma]_n} \\ & & \dots & \\ P_{0d}^{[\sigma]_n} & P_{1d}^{[\sigma]_n} & \dots & P_{dd}^{[\sigma]_n} \\ Q_0^{[\sigma]_n} & Q_1^{[\sigma]_n} & \dots & Q_d^{[\sigma]_n} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

матрицы $[\sigma]_n$-производных суперсимплексов $\widehat{\triangle}^{[\sigma]_n}$, где столбцы в (7.11) – это координаты вершин суперсимплекса. Будем говорить, что базис $\widehat{V} = \widehat{V}^{[\sigma]_0}$ и суперсимплекс $\widehat{\triangle} = \widehat{\triangle}^{[\sigma]_0}$ имеют *нулевые порядки*.

Заметим, что все производные базисы $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ остаются центрированными одним и тем же исходным лучом $\mathbb{R}_+\widehat{\alpha}$.

Из (7.11) следует, что $[\sigma]_n$-производный симплекс $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (7.5) имеет рациональные вершины

$$v_i^{[\sigma]_n} = \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}} = \Big(\frac{P_{i1}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \dots, \frac{P_{id}^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}\Big) \tag{7.12}$$

для $i = 0, 1, \dots, d$.

7.3. Радиус производных звезд и симплексов. Пусть $[\sigma]_n$-производные $r^{[\sigma]_n}$ звезды r состоят из лучей

$$r^{[\sigma]_n} = \{r_0^{[\sigma]_n}, r_1^{[\sigma]_n}, \dots, r_d^{[\sigma]_n}\}, \tag{7.13}$$

и пусть $\Delta(r^{[\sigma]_n})$ – *симплекс звезды* $r^{[\sigma]_n}$, имеющий вершины в концах лучей из (7.13). Размер звезд $r^{[\sigma]_n}$ и отвечающих им симплексов

$\Delta(r^{[\sigma]_n})$ будем контролировать с помощью *радиуса звезды и симплекса*

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(r^{[\sigma]_n}) = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) = \max_{0\leqslant i\leqslant d} |r_i^{[\sigma]_n}|_s, \tag{7.14}$$

равного максимальной длине лучей звезды $r^{[\sigma]_n}$ или радиусу минимальной сферы с центром в точке 0, содержащей звезду $r^{[\sigma]_n}$ и симплекс $\Delta(r^{[\sigma]_n})$.

7.4. Углы между векторами CU-базисов произвольного порядка n. Пусть радиус $[\sigma]_n$-производной $r^{[\sigma]_n}$ звезды r обладает свойством

$$\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{7.15}$$

Здесь $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n}))$ обозначает радиус (7.14) звезды $r^{[\sigma]_n}$.

Лемма 7.3. *Обозначим через φ_i^n и φ_{ij}^n углы между векторами $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$, $\widehat{\alpha}$ и векторами $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$, $\widehat{v}_j^{[\sigma]_n}$ из* (7.9) *соответственно. Тогда если выполнено условие* (7.15), *то координаты $Q_i^{[\sigma]_n}$ из* (7.10) *удовлетворяют свойству*

$$Q_i^{[\sigma]_n} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{7.16}$$

и углы

$$\varphi_i^n \to 0, \quad \varphi_{ij}^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{7.17}$$

для всех i, j.

Доказательство. Свойство (7.16) непосредственно вытекает из определения производных звезд (1.5), так как из условия (7.15) будет следовать, что при дифференцированиях $r^{[\sigma]_n}$ звезды r каждый из ее лучей подвергается замене бесконечное число раз при $n = 0, 1, 2, \ldots$; и в таком случае порядок луча увеличивается как минимум на единицу.

Для доказательства (7.17) достаточно проверить, что

$$|v_i^{[\sigma]_n} - \alpha|_s \to 0, \quad |v_i^{[\sigma]_n} - v_j^{[\sigma]_n}|_s \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{7.18}$$

Ясно, что второе свойство в (7.18) вытекает из первого. Чтобы его вывести, применим лемму 7.1 и получим равенство

$$\left|v_i^{[\sigma]_n} - \alpha\right|_s = \frac{|r_i^{[\sigma]_n}|_s}{Q_i^{[\sigma]_n}}, \tag{7.19}$$

где $v_i^{[\sigma]_n} = \varphi(\widehat{v}_i^{[\sigma]_n})$ – образ вектора $\widehat{v}_i^{[\sigma]_n}$ относительно отображения (4.7) и $r_i^{[\sigma]_n} = \kappa(\widehat{v}_i^{[\sigma]_n})$ – образ относительно отображения (3.10), являющийся лучом звезды $r^{[\sigma]_n}$. Теперь первое свойство в (7.18) будет следовать из равенства (7.19), условия (7.15) и доказанного свойства (7.16). □

7.5. Теорема об аппроксимации. Пусть $[\sigma]_n$-производный симплекс $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ из (7.5) имеет рациональные вершины $v_i^{[\sigma]_n} = \frac{P_i^{[\sigma]_n}}{Q_i^{[\sigma]_n}}$ из (7.12). Определим для симплекса $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ его *точку Фарея*

$$v_{\max}^{[\sigma]_n} = \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} = \left(\frac{P_{\max,1}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}, \ldots, \frac{P_{\max,d}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}\right) = \frac{P_0^{[\sigma]_n}}{Q_0^{[\sigma]_n}} \widehat{+} \frac{P_1^{[\sigma]_n}}{Q_1^{[\sigma]_n}} \widehat{+} \ldots \widehat{+} \frac{P_d^{[\sigma]_n}}{Q_d^{[\sigma]_n}} \tag{7.20}$$

порядка n, где справа в (7.20) использованы суммы Фарея (4.10).

В [1] доказана следующая теорема о базовой аппроксимации, т.е. аппроксимации исходной точки α.

Теорема 7.1. *Пусть* α *– иррациональная точка* (2.2), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ *– произвольная бесконечная последовательность сочетаний* σ_i *из множества* Σ *и* $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ *– соответствующие производные симплексы* (7.5). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Симплексы* $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ *обладает свойством минимальности* (*см. определение* (6.3)-(6.5))*:*

$$\frac{P}{Q} \notin \mathbf{s}^{[\sigma]_n}, \tag{7.21}$$

если $1 \leqslant Q < Q_{\max}^{[\sigma]_n}$*; единственная точка*

$$\frac{P}{Q} \in \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \tag{7.22}$$

со знаменателем $Q = Q_{\max}^{[\sigma]_n}$ *есть точка Фарея* $\frac{P}{Q} = \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$, *определенная в* (7.20).

2. *Имеют место неравенства*

$$\left|\alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}\right|_s \leqslant \frac{\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \tag{7.23}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ *Здесь* $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n} = \varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n}))$ *обозначает радиус* $[\sigma]_n$*-производной* $r^{[\sigma]_n}$ *звезды* r, *определенный в* (7.14).

Замечание 7.2. Согласно (7.8) при любом выборе бесконечной последовательности производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ отвечающие им симплексы $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ будут обладать свойством $\operatorname{vol}\mathbf{s}^{[\sigma]_n} \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow +\infty$. Приближения (7.23) будут нетривиальны только в случае, когда $\varrho_{\max}(\Delta(r^{[\sigma]_n})) \longrightarrow 0$ при $n \longrightarrow +\infty$. Описанию того, как можно обеспечить выполнение последнего свойства, посвящен следующий раздел.

§8. Локальные стратегии

8.1. Целевая функция. Из неравенств (7.23) видно, что приближение иррациональной точки $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ подходящими дробями $\frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}}$ – точками Фарея из (7.20) полностью зависит от величины радиуса $\varrho_{\max}^{[\sigma]_n}$ производной звезды $r^{[\sigma]_n}$.

В свою очередь, сами производные звезды $r^{[\sigma]_n}$ определяются бесконечной последовательностью производных $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$ из множества $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$. Чтобы как-то упорядочить выбор производных σ_n из Σ, входящих в последовательность σ, можно, например, ввести *целевую функцию* $\wp(r) \geqslant 0$, удовлетворяющую следующим свойствам:

$$\wp(r) \geqslant \wp(r'), \quad \text{если} \quad \Delta(r) \supset \Delta(r'), \tag{8.1}$$

где r, r' – две произвольные звезды и $\Delta(r)$, $\Delta(r')$ – отвечающие им симплексы;

$$\varrho_{\max}(r) \leqslant c\,\wp(r) \tag{8.2}$$

с константой $c > 0$, не зависящей от звезды r.

Если целевая функция $\wp(r) \geqslant 0$ уже задана, то ее можно будет использовать для формирования стратегии выбора производных $\sigma_n \in \Sigma$ в последовательности $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots\}$, применяя индукцию по $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$\wp(r^{[\sigma]_n}) = \min_{\sigma'_n \in \Sigma} \wp(r^{[\sigma']_n}), \tag{8.3}$$

где через $[\sigma]_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$ и $[\sigma']_n = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma'_n\}$ обозначены отрезки длины n. Определенную в (8.3) стратегию будем называть *$\wp$-стратегией*, явно указывая на ее зависимость от целевой функции $\wp(r)$ из (8.1), (8.2).

8.2. Диофантовы экспоненты. Из неравенств (7.23) и (8.2) следует, что выбранная $\wp$-стратегия применительно к данной точке α срабатывает, если

$$\wp(r^{[\sigma]_n}) \to 0 \tag{8.4}$$

при $n \to +\infty$. Если же попытаться как-то количественно оценить $\wp$-стратегию, то с этой целью можно использовать, например, *диофантову экспоненту*

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) = \sup_{n' \geqslant 0} \inf_{n \geqslant n'} \frac{-\ln \wp(r^{[\sigma]_n})}{\ln Q_{\max}^{[\sigma]_n}}. \tag{8.5}$$

Роль диофантовой экспоненты (8.5) видна из следующего утверждения.

Теорема 8.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 7.1, *выбрана целевая функция* $\wp(r)$ *из* (8.1), (8.2) *и по* $\wp$*-стратегии* (8.3) *построена бесконечная последовательность производных* $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ *из множества* $\Xi = \Sigma^{\mathbb{N}}$*. Кроме того, пусть* η^* *– произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\eta^* < \eta$*, где* $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ *– диофантова экспонента* (8.5)*. Тогда справедлива оценка*

$$\left| \alpha - \frac{P_{\max}^{[\sigma]_n}}{Q_{\max}^{[\sigma]_n}} \right|_s \leqslant \frac{c}{(Q_{\max}^{[\sigma]_n})^{1+\eta^*}} \tag{8.6}$$

для всех $n \geqslant n_{\eta^*}$*. Здесь* c *– константа из неравенства* (8.2) *и нижняя граница* n_{η^*} *для* n *определяется выбором показателя* η^* *и зависит от иррациональной точки* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ *и целевой функции* $\wp(r)$.

Доказательство. непосредственно следует из неравенства (7.23) в теореме 7.1 и определения (8.5) диофантовой экспоненты η. $\square$

Замечание 8.2. Доказанное неравенство (8.6) нетривиально только, если выполняется неравенство $\eta' > 0$. Данное требование можно удовлетворить только в случае, когда диофантова экспонента

$$\eta = \eta(\alpha, \wp) > 0. \tag{8.7}$$

Таким образом, подбирая целевую функцию $\wp(r)$ в (8.1), (8.2) необходимо следить за ограничением (8.7). При этом, если для двух таких функций $\wp(r)$ и $\wp'(r)$ будет иметь место неравенство $\eta(\alpha, \wp) > \eta(\alpha, \wp')$, то целевая функция $\wp(r)$ будет, естественно, предпочтительней, чем $\wp'(r)$.

§9. Системы линейных форм

9.1. Приведенные системы линейных форм. Рассмотрим систему линейных форм

$$f_i(x) = f_{i1}x_1 + \ldots + f_{id}x_d + f_{i0}x_0 \tag{9.1}$$

для $i = 1, \dots, d$ с произвольными вещественными коэффициентами f_{ij}. Каждую из форм можно записать в матричном виде

$$f_i(x) = f_i \cdot x = (f_{i1} \dots f_{id} f_{i0}) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_0 \end{pmatrix}. \tag{9.2}$$

Также в матричном виде можно представить

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_d(x) \end{pmatrix} = F \cdot x \tag{9.3}$$

всю совокупность линейных форм (9.1),(9.2), где

$$F = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} & f_{10} \\ & \dots & & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} & f_{d0} \end{pmatrix} \tag{9.4}$$

– *матрица системы форм* (9.3), имеющая размеры $d \times (d+1)$.

Будем говорить, что матрица F из (9.4) и соответсвенно система линейных форм $F(x)$ из (9.3) имеют *максимальный d-ранг* или кратко – *максимальный ранг*, если все миноры матрицы F размера d отличны от нуля. В этом случае матрица F раскладывается в произведение

$$F = AF_\alpha \tag{9.5}$$

$d \times d$-матрицы

$$A = -\begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} \\ & \dots & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} \end{pmatrix} \tag{9.6}$$

и *приведенной матрицы*

$$F_\alpha = (-E|\,\alpha) = \begin{pmatrix} -1 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ & \dots & & \dots \\ 0 & \dots & -1 & \alpha_d \end{pmatrix} \tag{9.7}$$

со столбцом

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = A^{-1}F_0 = A^{-1} \begin{pmatrix} f_{10} \\ \vdots \\ f_{d0} \end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Если F – матрица максимального d-ранга, то для (9.6) существует обратная матрица A^{-1}.

Для матрицы (9.7) система линейных форм (9.3) принимает *приведенный* вид

$$F_\alpha(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 x_0 & -x_1 & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ \alpha_d x_0 & & \dots & -x_d \end{pmatrix}. \qquad (9.9)$$

9.2. Связь между системами линейных форм. Из (9.5) следует, что системы линейных форм (9.3) и (9.9) связаны между собою соотношениями

$$F(x) = AF_\alpha(x), \quad F_\alpha(x) = A^{-1}F(x). \qquad (9.10)$$

В пространстве $\mathbb{R}^d$ введем s-метрику $|y|_s$ (см. (7.2)), а на множестве матриц $M = (m_{ij})$ – соответственно *s-норму*

$$||M||_s = \sum_{ij} |m_{ij}|. \qquad (9.11)$$

Предложение 9.1. *Для любых* $x = (x_1, \dots, x_d, x_0)$ *из* $\mathbb{R}^{d+1}$ *выполняются неравенства*

$$|F(x)|_s \leqslant ||A||_s |F_\alpha(x)|_s \qquad (9.12)$$

и

$$|F_\alpha(x)|_s \leqslant ||A^{-1}||_s |F(x)|_s \qquad (9.13)$$

между значениями систем линейных форм (9.3) *и* (9.9)*, где* A *– матрица* (9.6).

Доказательство. вытекает из соотношений (9.10) и неравенства

$$|My|_s \leqslant ||M||_s |y|_s. \qquad (9.14)$$

□

9.3. Условия на линейные формы. Пусть столбец α из (9.8) и соответствующая точка $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ являются иррациональными (2.3). Если точка $x = (x_1, \dots, x_d, x_0)$ выбрана из $\mathbb{R}^{d+1}$, то ее *иррациональность* будет означать, что

числа $x_0, x_1, \dots, x_d$ *линейно независимы над кольцом* $\mathbb{Z}$. (9.15)

Далее будем предполагать, что система линейных форм (9.3) удовлетворяет следующим двум условиям:

$$\begin{gathered}\text{\textit{система линейных форм}}\ \ F(x)\ \ \text{\textit{имеет максимальный}}\ d\text{\textit{-ранг,}}\\ \text{\textit{столбец}}\ \ \alpha = A^{-1}F_0\ \ \text{\textit{иррациональный.}}\end{gathered} \tag{9.16}$$

§10. Дробно-линейные преобразования

10.1. Вектор системы линейных форм. Системе линейных форм $F(x)$ из (9.3) поставим в соответствие

$$\mathfrak{e}: \ F(x) \to F_e \tag{10.1}$$

$(d+1)$-мерный *вектор системы*

$$F_e = \det\begin{pmatrix} F \\ e \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} & f_{10} \\ & \dots & & \\ f_{d1} & \dots & f_{dd} & f_{d0} \\ e_1 & \dots & e_d & e_0 \end{pmatrix}, \tag{10.2}$$

где $e = (e_1 \dots e_d e_0)$ – строка, составленная из единичных векторов

$$e_1 = (1,\dots,0,0), \quad \dots, \quad e_d = (0,\dots,1,0) \quad e_0 = (0,\dots,0,1)$$

пространства $\mathbb{R}^{d+1}$. Вектор приведенных систем $F_\alpha(x)$ из (9.9) равен

$$F_{\alpha,e} = \det\begin{pmatrix} F_\alpha \\ e \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_d e_d + 1e_0. \tag{10.3}$$

Воспользуемся соотношением (9.5) и вычислим вектор F_e произвольной системы линейных форм $F(x)$. Записываем

$$F_e = \det\begin{pmatrix} AF_\alpha \\ e \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_\alpha \\ e \end{pmatrix}\right), \tag{10.4}$$

и поэтому имеем

$$F_e = |A|\, F_{\alpha,e}, \tag{10.5}$$

где использовали сокращение $|A| = \det A$.

10.2. Унимодулярные преобразования. Выберем произвольную матрицу U из группы унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. В системе линейных форм (9.3) произведя замену переменных,

$$F(Ux) = F \cdot Ux = FU \cdot x = FU(x),$$

приходим к обратимому преобразованию самих систем линейных форм

$$U: \quad F(x) \quad \overrightarrow{\sim} \quad FU(x). \tag{10.6}$$

Найдем для преобразованной системы $FU(x)$ ее вектор (10.2). Для этого воспользуемся следующей цепочкой равенств

$$FU_e = \det \begin{pmatrix} FU \\ e \end{pmatrix} = \det\left(\begin{pmatrix} F \\ eU^{-1} \end{pmatrix} \cdot U\right). \tag{10.7}$$

Откуда получаем формулу

$$FU_e = |U|\, F_{e'}, \tag{10.8}$$

где справа появился новый базис $e' = (e'_1 \dots e'_d e'_0) = eU^{-1}$.

Используя равенства (10.5) и (10.3), имеем

$$F_{e'} = |A|\, F_{\alpha, e'} = |A|\, (\alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_d e'_d + 1e'_0). \tag{10.9}$$

Выражение в скобках перепишем в виде произведения

$$\alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_d e'_d + 1e'_0 = e' \cdot \widehat{\alpha} \tag{10.10}$$

строки $e' = (e'_1 \dots e'_d e'_0)$ и столбца

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{10.11}$$

Подставляя $e' = eU^{-1}$ в правую часть равенства (10.10), получаем равенство

$$\alpha_1 e'_1 + \ldots + \alpha_d e'_d + 1e'_0 = e \cdot \widehat{\alpha}' \tag{10.12}$$

со столбцом

$$\widehat{\alpha}' = U^{-1}\widehat{\alpha}. \tag{10.13}$$

Собирая вместе равенства (10.9)-(10.12), приходим к формуле

$$F_{e'} = |A|\, e \cdot \widehat{\alpha}'. \tag{10.14}$$

10.3. Дробно-линейные преобразования. Пусть

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1d} & m_{10} \\ & \dots & & \\ m_{d1} & \dots & m_{dd} & m_{d0} \\ m_{01} & \dots & m_{0d} & m_{00} \end{pmatrix} \tag{10.15}$$

– вещественная $(d+1, d+1)$-матрица и $y = (y_1, \dots, y_d)$ из пространства $\mathbb{R}^d$. Определим дробно-линейное преобразование

$$M\langle y\rangle = \left(\frac{\lambda_1(M,y)}{\lambda_0(M,y)}, \dots, \frac{\lambda_d(M,y)}{\lambda_0(M,y)}\right), \tag{10.16}$$

где

$$\lambda_i(M,y) = m_{i1}y_1 + \dots + m_{id}y_d + m_{i,0} \tag{10.17}$$

– неоднородные линейные формы для $i = 0, 1, \dots, d$. Форма $\lambda_0(M,y)$ называется *фактором автоморфности* дробно-линейного преобразования (10.16). При этом предполагается, что $\lambda_0(M,y) \neq 0$.

В терминах линейных форм (10.17) равенство (10.13) запишется в виде

$$\widehat{\alpha}\,' = \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \vdots \\ \alpha_d' \\ \alpha_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1(U^{-1},\alpha) \\ \vdots \\ \lambda_d(U^{-1},\alpha) \\ \lambda_0(U^{-1},\alpha) \end{pmatrix}. \tag{10.18}$$

Отсюда получаем

$$\widehat{\alpha}\,' = \lambda_0(U^{-1},\alpha)\,\widehat{U^{-1}\langle\alpha\rangle}, \tag{10.19}$$

а из (10.14) и (10.8) соответственно

$$F_{e'} = |A|\,\lambda_0(U^{-1},\alpha)\,F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle,e} \tag{10.20}$$

и

$$FU_e = |U|\,|A|\,\lambda_0(U^{-1},\alpha)\,F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle,e}. \tag{10.21}$$

Выберем в качестве матрицы F сразу приведенную матрицу $F = F_\alpha$. Согласно (9.5) в этом случае $A = E$ – единичная матрица и формула (10.21) примет более простой вид

$$F_\alpha U_e = |U|\,\lambda_0(U^{-1},\alpha)\,F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle,e}. \tag{10.22}$$

10.4. Биекция: системы линейных форм (матрицы) – векторы. Введем следующие обозначения для классов

$$(\widehat{\alpha}) = \mathbb{R}^{\times} \cdot \widehat{\alpha}, \quad (F) = \mathrm{GL}_d(\mathbb{R})\, F, \tag{10.23}$$

где $\mathbb{R}^{\times} = \mathrm{GL}_1(\mathbb{R})$ – множество ненулевых вещественных чисел.

Предложение 10.1. *Отображение* (*см.* (10.1))

$$\mathfrak{e}: \quad F \quad \mapsto \quad \mathfrak{e}F = F_e \tag{10.24}$$

задает биекцию

$$\mathfrak{e}: \quad (F) \quad \overrightarrow{\sim} \quad (\widehat{\alpha}) \tag{10.25}$$

между классами матриц F *максимального* d*-ранга, определенного в п.* 9.1, *и классами подобных* $(d+1)$*-мерных векторов* $\widehat{\alpha}$ *с ненулевыми координатами.*

Доказательство. Из равенства (10.5) следует, что отображение (10.25) определено корректно. Покажем, что оно инъективно. Пусть $F = AF_\alpha$ и $F' = A'F_{\alpha'}$ – представители из двух классов имеют подобные образы

$$\mathfrak{e}F = |A|\,\widehat{\alpha}, \quad \mathfrak{e}F' = |A'|\,\widehat{\alpha'}, \tag{10.26}$$

т.е. $\widehat{\alpha'} = \lambda\widehat{\alpha}$. Отсюда следует $\lambda = 1$. Значит, $\widehat{\alpha'} = \widehat{\alpha}$ и тогда $\alpha' = \alpha$.

Чтобы проверить сюръективность отображения (10.25), заметим, что в силу (10.3) для любого вектора $\widehat{\alpha}$ справедливо равенство $\mathfrak{e}F_\alpha = \widehat{\alpha}$. □

Участвующую в формулах (10.21) и (10.22) матрицу U разобъем на блоки

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & U_3 \\ U_2 & U_4 \end{pmatrix}. \tag{10.27}$$

Блок U_1 имеет размеры $d \times d$, соседние с ним U_2 и U_3 – соответственно строка и столбец длины d, а U_4 – число.

Предложение 10.2. *Пусть система линейных форм* $F(x)$ *удовлетворяет условиям* (9.16) *и* F_α *– приведенная матрица* (9.7). *Тогда для произвольной матрицы* U *из группы* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *выполняются формулы*

$$FU = ABF_{U^{-1}\langle\alpha\rangle}, \quad F_\alpha U = BF_{U^{-1}\langle\alpha\rangle}. \tag{10.28}$$

Здесь A *– матрица* (9.6),

$$B = U_1 - \alpha U_2 \tag{10.29}$$

– матрица с определителем

$$|B| = |U|\,\lambda_0(U^{-1},\alpha), \tag{10.30}$$

где U_1, U_2 *– блоки* (10.27) *матрицы* U *и* $\lambda_0(U^{-1},\alpha)$ *– фактор автоморфности* (10.17).

Доказательство. Сравним две матрицы $F_\alpha U$ и $F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle}$. Ввиду формулы (10.22) они имеют один и тот же образ $\mathfrak{e}F_\alpha U = \mathfrak{e}F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle}$ относительно отображения (10.25). Поэтому по предложению 10.1 указанные матрицы связаны вторым соотношением из (10.28), в котором B – некоторая матрица из группы $\mathrm{GL}_d(\mathbb{R})$. Из него непосредственно следует первое соотношение из (10.28), если учесть равенство $F = AF_\alpha$ из (9.10).

Принимая во внимание вид (9.7) приведенной матрицы F_α и разбиение (10.27), последовательно находим

$$F_\alpha U = (-E\ \alpha)U = (-U_1 + \alpha U_2 \,|\, -U_3 + \alpha U_4). \tag{10.31}$$

С другой стороны, произведение матриц справа в (10.28) равно

$$BF_{U^{-1}\langle\alpha\rangle} = (-B \,|\, BU^{-1}\langle\alpha\rangle). \tag{10.32}$$

Сравнивая (10.31) с (10.32), находим явный вид (10.29) матрицы B и еще одно дополнительное равенство

$$BU^{-1}\langle\alpha\rangle = -U_3 + \alpha U_4. \tag{10.33}$$

Осталось вычислить определитель матрицы B. Согласно формуле (10.28) имеем

$$F_\alpha U_e = (BF_{U^{-1}\langle\alpha\rangle})_e = |B|\,F_{U^{-1}\langle\alpha\rangle}, e. \tag{10.34}$$

Отсюда и из равенства (10.22) получаем для определителя формулу (10.30). □

Замечание 10.1. В ходе доказательства предложения 10.2 было получено равенство (10.33). Если в него подставить явное выражение (10.29) матрицы B, то придем к *матричному представлению*

$$U^{-1}\langle\alpha\rangle = (U_1 - \alpha U_2)^{-1}(-U_3 + \alpha U_4) \tag{10.35}$$

для дробно-линейного преобразования (10.16).

§11. Дробно-линейные преобразования симплексов и точек Фарея

11.1. Точка и ее дробно-линейный образ. Во второй формуле из (10.28) заменим U на обратную матрицу U^{-1}. Получим

$$F_\alpha U^{-1} = B_{U^{-1}} F_{U\langle\alpha\rangle}, \tag{11.1}$$

где

$$B_{U^{-1}} = U_1^{-1} - \alpha U_2^{-1}, \quad U^{-1} = \begin{pmatrix} U_1^{-1} & U_3^{-1} \\ U_2^{-1} & U_4^{-1} \end{pmatrix}. \tag{11.2}$$

Предположим, что точка $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ являются иррациональной (2.3). Тогда по формуле (10.30) будем иметь

$$|B_{U^{-1}}| = |U^{-1}|\, \lambda_0(U, \alpha) \neq 0 \tag{11.3}$$

и, значит, для $B_{U^{-1}}$ существует обратная матрица $B_{U^{-1}}^{-1}$.

Лемма 11.1. *Пусть*

$$\alpha' = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \vdots \\ \alpha'_d \end{pmatrix} = U\langle\alpha\rangle, \quad x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \\ x'_0 \end{pmatrix} = Ux. \tag{11.4}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|\alpha'_1 x'_0 - x'_1| + \ldots + |\alpha'_d x'_0 - x'_d| \leqslant c_{\alpha,U}\ (|\alpha_1 x_0 - x_1| + \ldots + |\alpha_d x_0 - x_d|) \tag{11.5}$$

с константой

$$c_{\alpha,U} = ||B_{U^{-1}}^{-1}||_s. \tag{11.6}$$

Доказательство. Перепишем (11.1) в виде равенства

$$F_{U\langle\alpha\rangle}\, U = B_{U^{-1}}^{-1}\, F_\alpha. \tag{11.7}$$

Если данное равенство умножить на столбец x и воспользоваться обозначениями (11.4), то получим тождество

$$F_{\alpha'}\, x' = B_{U^{-1}}^{-1}\, F_\alpha\, x. \tag{11.8}$$

Теперь неравенство (11.5) вытекает из (11.8) и общего неравенства (9.14). □

11.2. Коммутативная диаграмма. Пусть $\mathbb{R}^d_{\mathrm{irr}}$ и $\mathbb{R}^{d+1}_{\mathrm{irr}}$ обозначают соответствующие подмножества из пространств $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^{d+1}$, состоящее из иррациональных точек (2.3) и (9.15); и пусть

$$\mathbb{R}^{d+1}_{\mathrm{irr}} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^d_{\mathrm{irr}} : \quad x \mapsto \underline{x} = \varphi x \tag{11.9}$$

– проекция (4.7). Здесь $x = (x_1, \ldots, x_d, x_0)$ и $\underline{x} = (x_1/x_0, \ldots, x_d/x_0)$.

Лемма 11.2. *Пусть U – произвольная унимодулярная матрица из группы* $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$ *и* $U\langle\ \rangle$ *– дробно-линейное преобразование* (10.16) *с матрицей U. Тогда в обозначениях* (11.9) *имеет место следующая коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{d+1}_{\mathrm{irr}} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbb{R}^{d+1}_{\mathrm{irr}} \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^{d}_{\mathrm{irr}} \arrow[r, "U\langle\ \rangle"] & \mathbb{R}^{d}_{\mathrm{irr}}; \end{tikzcd} \tag{11.10}$$

или кратко –

$$\varphi(Ux) = U\langle \varphi x\rangle. \tag{11.11}$$

Доказательство. Введем дополнительное обозначение

$$Ux = \begin{pmatrix} u_1 x \\ \vdots \\ u_d x \\ u_0 x \end{pmatrix}, \tag{11.12}$$

где $u_1, \ldots, u_d, u_0$ – строки матрицы U, и, значит, $x \mapsto u_i x$ – линейные формы. В этих терминах левую часть в (11.11) можем записать в виде

$$\varphi(Ux) = \varphi\left(\begin{pmatrix} u_1 x \\ \vdots \\ u_d x \\ u_0 x \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{u_1 x}{u_0 x} \\ \vdots \\ \frac{u_d x}{u_0 x} \end{pmatrix}. \tag{11.13}$$

Теперь вычислим правую часть в (11.11). Вспоминая (10.16), находим

$$U\langle \varphi x\rangle = U\left\langle \begin{pmatrix} \frac{x_1}{x_0} \\ \vdots \\ \frac{x_d}{x_0} \end{pmatrix} \right\rangle = U\langle \underline{x}\rangle = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1(U,\underline{x})}{\lambda_0(U,\underline{x})} \\ \vdots \\ \frac{\lambda_d(U,\underline{x})}{\lambda_0(U,\underline{x})} \end{pmatrix}. \tag{11.14}$$

Так как в силу (10.16) и (11.12) выполняются тождества

$$\frac{\lambda_i(U,\underline{x})}{\lambda_0(U,\underline{x})} = \frac{x_0 \cdot \lambda_i(U,\underline{x})}{x_0 \cdot \lambda_0(U,\underline{x})} = \frac{u_i x}{u_0 x}, \tag{11.15}$$

то из (11.13)-(11.15) выводим коммутационное соотношение (11.11). □

11.3. Унимодулярные преобразования векторов Фарея. Обозначим через

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \\ x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{[\sigma]_n}_{\max,1} \\ \vdots \\ P^{[\sigma]_n}_{\max,d} \\ Q^{[\sigma]_n}_{\max} \end{pmatrix} \tag{11.16}$$

вектор Фарея для CU-базиса $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ из (7.9). Из теоремы 7.1 следуют неравенства

$$\left| Q^{[\sigma]_n}_{\max}\alpha - P^{[\sigma]_n}_{\max} \right|_s \leqslant \varrho^{[\sigma]_n}_{\max} \tag{11.17}$$

для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ Сделаем унимодулярную замену

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_d \\ x'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{'[\sigma]_n}_{\max,1} \\ \vdots \\ P^{'[\sigma]_n}_{\max,d} \\ Q^{'[\sigma]_n}_{\max} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} P^{[\sigma]_n}_{\max,1} \\ \vdots \\ P^{[\sigma]_n}_{\max,d} \\ Q^{[\sigma]_n}_{\max} \end{pmatrix} \tag{11.18}$$

для векторов Фарея (11.16). Тогда из неравенств (11.5) и (11.17) получаем следующую лемму об аппроксимации преобразованной точки α'.

Лемма 11.3. *Имеет место оценка*

$$\left|\alpha'_1 Q^{'[\sigma]_n}_{\max} - P^{'[\sigma]_n}_{\max,1}\right| + \ldots + \left|\alpha'_d Q^{'[\sigma]_n}_{\max} - P^{'[\sigma]_n}_{\max,d}\right| \leqslant c_{\alpha,U}\ \varrho^{[\sigma]_n}_{\max} \tag{11.19}$$

для точки α' *из* (11.4).

Убедимся, что полученная оценка (11.19) приближений для точки α' нетривиальна. Для этого необходимо знать порядок роста множителей $Q^{'[\sigma]_n}_{\max}$.

Лемма 11.4. *Для иррациональной* (2.3) *точки* α *числа* $Q^{[\sigma]_n}_{\max} > 0$ *и* $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$, *определенные в* (7.20) *и* (11.18), *имеют один и тот же порядок роста*

$$|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}| \asymp Q^{[\sigma]_n}_{\max} \quad \to \quad +\infty \tag{11.20}$$

при $n \to +\infty$, *т.е. отношения* $(|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|/Q^{[\sigma]_n}_{\max})^{\pm 1}$ *ограничены для достаточно больших значений* n.

Доказательство. Для вектора $\widehat{\alpha}$ из (3.8) рассмотрим его образ

$$\widehat{\alpha}_U = U\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_{U,1} \\ \vdots \\ \alpha_{U,d} \\ \alpha_{U,0} \end{pmatrix} \tag{11.21}$$

относительно унимодулярного преобразования U. Из условия иррациональности точки α следует, что преобразованный вектор имеет координаты

$$\alpha_{U,i} \neq 0. \tag{11.22}$$

Далее ради определенности сначала будем предполагать выполненным условие

$$\alpha_{U,0} > 0. \tag{11.23}$$

Также рассмотрим преобразование

$$\widehat{V}^{[\sigma]_n}_U = U\,\widehat{V}^{[\sigma]_n} = \{\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,0}, \widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,1}, \ldots, \widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,d}\} \tag{11.24}$$

базисов $\widehat{V}^{[\sigma]_n}$ из (7.9). Обозначим через $\varphi^n_{U,i}$ углы между векторами $\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,i}$, $\widehat{\alpha}_U$. Из леммы 7.3 будет следовать

$$\varphi^n_{U,i} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty \tag{11.25}$$

для всех i. Но тогда из (11.25) выводим, что углы $\varphi^n_{\max}$ между векторами Фарея

$$\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{\max} = \widehat{v}^{[\sigma]_n}_0 + \widehat{v}^{[\sigma]_n}_1 + \ldots + \widehat{v}^{[\sigma]_n}_d = \begin{pmatrix} P^{[\sigma]_n}_{\max,1} \\ \vdots \\ P^{[\sigma]_n}_{\max,d} \\ Q^{[\sigma]_n}_{\max} \end{pmatrix} \tag{11.26}$$

и вектором $\widehat{\alpha}$, а также углы $\varphi^n_{\max,U}$ между преобразованными векторами Фарея

$$\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{\max,U} = \widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,0} + \widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,1} + \ldots + \widehat{v}^{[\sigma]_n}_{U,d} = \begin{pmatrix} P'^{[\sigma]_n}_{\max,1} \\ \vdots \\ P'^{[\sigma]_n}_{\max,d} \\ Q'^{[\sigma]_n}_{\max} \end{pmatrix} \tag{11.27}$$

и вектором $\widehat{\alpha}_U$ также обладают свойством

$$\varphi^n_{\max} \to 0, \quad \varphi^n_{\max,U} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{11.28}$$

Последнее равенство в (11.27) следует из определений (7.12), (7.20). В силу (7.16), имеем

$$Q^{[\sigma]_n}_{\max} \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{11.29}$$

Поскольку

$$\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{\max,U} = U\,\widehat{v}^{[\sigma]_n}_{\max}, \tag{11.30}$$

то из (11.23), (11.28)-(11.30) получаем эквивалентность

$$Q'^{[\sigma]_n}_{\max} \asymp Q^{[\sigma]_n}_{\max} \tag{11.31}$$

при $n \to +\infty$. Противоположный случай

$$\alpha_{U,0} < 0 \tag{11.32}$$

приводит к эквивалентности (11.20). □

§12. Основные теоремы

В этом итоговом разделе мы покажем, как изменяются теоремы 7.1 и 8.1 при дробно-линейном преобразовании иррациональной точки α.

Теорема 12.1. *Пусть* α *– иррациональная точка* (2.2), $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$ *– произвольная бесконечная последовательность сочетаний* σ_i *из множества* Σ *и* $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ *– соответствующие производные симплексы* (7.5)*. Кроме того, пусть радиус* $[\sigma]_n$*-производной* $r^{[\sigma]_n}$ *звезды* r*, определенный в* (7.14)*, обладает свойством* (7.15)*. Тогда найдется такой номер* $n_{\alpha,U} \geqslant 0$*, зависящий от точки* α *и матрицы* U*, что будут иметь место следующие утверждения.*

1. *Существуют симплексы*

$$\mathbf{s}'^{[\sigma]_n} = U\langle \mathbf{s}^{[\sigma]_n} \rangle \tag{12.1}$$

для $n \geqslant n_{\alpha,U}$; при этом точка

$$\alpha' = (\alpha'_1, \ldots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle = \Big(\frac{\alpha_{U,1}}{\alpha_{U,0}}, \ldots, \frac{\alpha_{U,d}}{\alpha_{U,0}}\Big) \tag{12.2}$$

является внутренней для симплексов $\mathbf{s}'^{[\sigma]_n}$, обладающих свойством минимальности (*см. определение* (6.3)-(6.5))*:*

$$\frac{P'}{Q'} \notin \mathbf{s}'^{[\sigma]_n}, \tag{12.3}$$

если $1 \leqslant |Q|' < |Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|$; единственная точка

$$\frac{P'}{Q'} \in \mathbf{s}'^{[\sigma]_n} \tag{12.4}$$

со знаменателем $Q' = Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$ есть точка Фарея $\frac{P'}{Q'} = \frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}$, определяемая по формуле

$$\frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}} = U\Big\langle\frac{P^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q^{[\sigma]_n}_{\max}}\Big\rangle \tag{12.5}$$

где $\frac{P^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q^{[\sigma]_n}_{\max}}$ – подходящие дроби из неравенств (7.23)*.*

2. *Выполняются неравенства*

$$\left|\alpha' - \frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}\right|_s \leqslant c_{\alpha,U}\ \frac{\varrho^{[\sigma]_n}_{\max}}{|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|} \tag{12.6}$$

для всех $n \geqslant n_{\alpha,U}$. Здесь $c_{\alpha,U}$ – константа из (11.5) *не зависит от n и знаменатели*

$$|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}| \to +\infty \quad \text{при} \quad n \to +\infty. \tag{12.7}$$

Доказательство. Существование симплексов $\mathbf{s}'^{[\sigma]_n}$, их связь (12.1) с симплексами $\mathbf{s}^{[\sigma]_n}$ и формула (12.2) следуют из коммутативной диаграммы (11.10) и леммы 11.4. Формула (12.5) получается из равенства (11.27) и формулы для дробно-линейного преобразования (10.16), а свойство минимальности (12.3), (12.4) – из теоремы 7.1. Второе утверждение теоремы вытекает из неравенств (11.19) и леммы 11.4. $\square$

Замечание 12.1. Чтобы приближения (12.6) были нетривиальны, необходимо выполнение условия (12.7) для знаменателей $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$ подходящих дробей $\frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}$.

Теорема 12.2. *В условиях теорем* 8.1 *и* 12.1 *справедлива оценка*

$$\left|\alpha' - \frac{P'^{[\sigma]_n}_{\max}}{Q'^{[\sigma]_n}_{\max}}\right|_s \leqslant \frac{c'}{|Q'^{[\sigma]_n}_{\max}|^{1+\eta^*}} \tag{12.8}$$

для всех $n \geqslant n_{\alpha,U,\eta^*}$. *Здесь* η^* *– произвольное число, удовлетворяющее неравенству* $\eta^* < \eta$, *где* $\eta = \eta(\alpha, \wp)$ *– диофантова экспонента* (8.5); $c' = c \cdot c_{\alpha,U}$, *где* c *– константа из неравенства* (8.2) *и* $c_{\alpha,U}$ *из* (12.6); *нижняя граница* n_{α,U,η^*} *для* n *определяется выбором показателя* η^* *и зависит от иррациональной точки* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, *унимодулярной матрицы* U *и целевой функции* $\wp(r)$.

Доказательство следует из теорем 8.1, 12.1 и эквивалентности (11.20).

Относительно доказанных теорем необходимы следующие поясняющие комментарии.

Замечание 12.2. Сравнивая теоремы 7.1, 8.1 с их аналогами – теоремами 12.1, 12.2 – видим, что оценки приближений (7.23), (8.6) остаются инвариантными (12.6), (12.8) с точностью до постоянного множителя $c_{\alpha,U}$ из (11.6) при дробно-линейном преобразовании (12.2) аппроксимируемой точки α.

Замечание 12.3. Формула $c_{\alpha,U} = \|B^{-1}_{U^{-1}}\|_s$ с разъяснениями (11.2), (11.3) показывают, что главным фактором, влияющим на величину $c_{\alpha,U}$, является фактор-автоморфности

$$\lambda_0(U,\alpha) = u_0 \cdot \widehat{\alpha} = u_{01}\alpha_1 + \ldots + u_{0d}\alpha_d + u_{00}, \tag{12.9}$$

где u_0 – нижняя строка унимодулярной матрицы U. Величина $c_{\alpha,U}$ обратно пропорциональна значению линейной формы (12.9) и, значит, гиперплоскость $\lambda_0(U,x) = 0$ будет критической при выборе α и U. Ограничиваясь в данной статье иррациональными точками α мы, тем самым, гарантировали выполнение условия $\lambda_0(U,\alpha) \neq 0$. Используя обозначения п. 11.3, можем записать фактор-автоморфности (12.9) в виде $\lambda_0(U,\alpha) = \alpha_{U,0}$. Поэтому, принимая во внимание (11.23), (11.32), убеждаемся в том, что знак sign $\lambda_0(U,\alpha) = \pm 1$ совпадает со знаком знаменателей $Q'^{[\sigma]_n}_{\max}$ в неравенствах (12.6), (12.8) для всех достаточно больших значений n.

Литература

1. В. Г. Журавлев, *Симплекс-ядерный алгоритм разложения в многомерные цепные дроби*, — Современные проблемы математики, МИ РАН (2017), 1–25. (в печати)

2. В. Г. Журавлев, *Симплекс-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в многомерные цепные дроби*, — Зап. науч. семин. ПОМИ **449** (2016), 168–195.
3. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений*, — Зап. науч. семин. ПОМИ **440** (2015), 81–98.
4. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел*, — Зап. науч. семин. ПОМИ **445** (2016), 33–92.
5. V. Brun, *Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres*, — In Treizieme congres des mathematiciens scandinaves, Helsinki (1957), 18–23, Mercators Tryckeri, Helsinki (1958), 45–64.
6. E. S. Selmer, *Continued fractions in several dimensions*, — Nordisk Nat. Tidskr., **9** (1961), 37–43.
7. A. Nogueira, *The three-dimensional Poincare continued fraction algorithm*, — Israel J. Math. **90**, No.1-3 (1995), 373–401.
8. F. Schweiger, *Multidimensional Continued Fraction*, — Oxford Univ. Press, New York, 2000.
9. V. Berthe, S. Labbe, *Factor complexity of S-adic words generated by the Arnoux–Rauzy–Poincare algorithm*, — Adv. in Appl. Math. **63** (2015), 90–130.
10. P. Arnoux, S. Labbe, *On some symmetric multidimensional continued fraction algorithms*, — arXiv:1508.07814, August (2015).
11. J. Cassaigne, *Un algorithme de fractions continues de complexite lineaire*, — October 2015. DynA3S meeting, LIAFA, Paris, October 12th (2015).
12. И. М. Виноградов, *Основы теории чисел*, — 5-ое изд. М., 1972.

Zhuravlev V. G. Fractional-linear invariance of multidimensional continued fractions.

With the help of the simplex-karyon algorithm it is possible to decompose real numbers $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ into multidimensional continued fractions. We prove the invariance of this algorithm under fractional-linear transformations $\alpha' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d) = U\langle\alpha\rangle$ with matrices U from the unimodular group $\mathrm{GL}_{d+1}(\mathbb{Z})$. The best convergent fractions of the transformed α' are found.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей 11,
600024 Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 5 апреля 2017 г.