Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

МОДУЛИ СЕМЕЙСТВ ВЕКТОРНЫХ МЕР НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§1. Введение и основные обозначения

В 1999 году Айкава и Оцука дополнили метод экстремальных метрик в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $n \geqslant 2$, новыми соотношениями между емкостью конденсатора и модулями соответствующих семейств векторных мер. Некоторые из них (см. [7, теоремы 1, 2] мы распространяем на случай конденсаторов в G (см. теоремы 1, 2), где G – открытое множество с компактным замыканием на римановой поверхности $\mathfrak{R}$.

Всюду ниже под римановой поверхностью понимается поверхность $\mathfrak{R}$, склеенная из конечного или счетного числа плоских областей замкнутой плоскости $\overline{R^2} = R^2 \cup \{\infty\}$ с соблюдением следующих условий:

(1) При склеивании проекции точек сохраняются (проекцией точки плоской области считаем саму эту точку);
(2) Окрестностью каждой точки X поверхности $\mathfrak{R}$ является однолистный круг с центром в точке X или конечнолистный круг с единственной точкой разветвления в его центре X (подробнее см. [1, стр. 383]).

Следовательно, $\mathfrak{R}$ можно рассматривать как топологическое пространство с топологией, порожденной указанными в 2) окрестностями точек из $\mathfrak{R}$. Само склеивание проводится таким образом, что множество $\mathfrak{R}$ есть связная триангулируемая поверхность (см. [5, гл. III]).

Кривой на $\mathfrak{R}$ назовем образ невырожденного числового интервала $(a;b)$ или отрезка $[a;b]$ при непрерывном отображении $X = X(t)$ его в $\mathfrak{R}$. В дальнейшем считаем, что отображение $X(t)$ не является постоянным ни на одном интервале из области определения I отображения $X(t)$ и задает параметризацию кривой γ. Когда это будет необходимо, параметризацию $X = X(t)$, $t \in I$, кривой γ будем записывать в

Ключевые слова: модуль семейства кривых, емкость конденсатора, риманова поверхность, вес Макенхаупта.

виде $X = X_\gamma(t)$, $t \in I$. В случае $I = [a;b]$ кривую γ назовем замкнутой дугой, в случае $I = (a;b)$ кривую γ назовем открытой дугой.

Операция проектирования $X \to \operatorname{pr} X = x$ индуцирует двумерную меру Лебега σ, евклидову метрику ds, сферическую метрику dh (подробнее см. [4, 10]). Точку $x = \operatorname{pr} X \in \overline{R^2}$ будем называть также локальным параметром точки $X \in \mathfrak{R}$. В дальнейшем считаем, что в R^2 задана фиксированная декартова система координат с осями Ox_1, Ox_2 и запись $x = (x_1, x_2) \in R^2$ будет означать, что точка x имеет координаты x_1, x_2 в этой системе координат.

Для кривой $\gamma \subset \mathfrak{R}$ проекцию $\operatorname{pr}\gamma$ будем рассматривать как кривую на $\overline{R^2}$ с параметризацией $x = x(t) = x_{\operatorname{pr}\gamma}(t) = \operatorname{pr} X_\gamma(t)$, $t \in I$. Под сферической длиной $h(\gamma)$ замкнутой дуги $\gamma \subset \mathfrak{R}$ будем понимать длину $h(\operatorname{pr}\gamma)$ кривой $\operatorname{pr}\gamma$ в сферической метрике на $\overline{R^2}$. Сферическую длину $h(\gamma)$ открытой дуги $\gamma \subset \mathfrak{R}$ положим равной $\sup\{h(\gamma') :$ γ' – замкнутая поддуга кривой $\gamma\}$.

Определим сферическое расстояние $h(X, X')$ между точками X, $X' \in \mathfrak{R}$ как инфимум длин $h(\gamma)$ по всем кривым $\gamma \subset \mathfrak{R}$, содержащим точки X и X'. Далее поверхность $\mathfrak{R}$ мы рассматриваем как метрическое пространство $(\mathfrak{R}, h(\cdot,\cdot))$. Если $F \subset \mathfrak{R}$, то $\bar{F}$ означает замыкание F в $(\mathfrak{R}, h(\cdot,\cdot))$. Для $E, F \subset \mathfrak{R}$ обозначим через $h(E, F)$ расстояние между E и F в сферической метрике.

Пусть γ – открытая дуга на $\mathfrak{R}$ и $X = X(t)$, $a < t < b$ – ее параметризация. Будем говорить, что γ соединяет множества E и F, если

$$\lim_{t\to a} h(E, X(t)) = \lim_{t\to b} h(F, X(t)) = 0.$$

Положим $\mathfrak{R}_\infty = \{X \in \mathfrak{R} : \operatorname{pr} X = \infty\}$,

$$\mathfrak{R}_b = \{X \in \mathfrak{R} : X \text{ – точка разветвления для } \mathfrak{R}\}.$$

Отметим, что по определению $\sigma(\mathfrak{R}_\infty \cup \mathfrak{R}_b) = 0$. Для замкнутой дуги $\gamma \subset \mathfrak{R}$ ее евклидову длину $s(\gamma)$ примем равной $+\infty$ в случае, когда $\gamma \cap \mathfrak{R}_\infty \neq \varnothing$. В случае, когда $\gamma \cap \mathfrak{R}_\infty = \varnothing$, положим ее евклидову длину $s(\gamma)$ равной длине $s(\operatorname{pr}\gamma)$ кривой $\operatorname{pr}\gamma$ в евклидовой метрике на R^2. Для открытой дуги γ определим ее евклидову длину $s(\gamma)$ как $\sup\{s(\gamma') :$ γ' – замкнутая поддуга кривой $\gamma\}$.

Пусть для открытой дуги $\gamma \subset \mathfrak{R}$ выполнено условие $\gamma \cap \mathfrak{R}_\infty = \varnothing$. Тогда дугу γ назовем локально спрямляемой, если для любой замкнутой поддуги $\gamma' \subset \gamma$ имеет место неравенство $s(\gamma') < \infty$.

Пусть теперь открытая дуга $\gamma \subset \mathfrak{R}$ имеет непустое пересечение с $\mathfrak{R}_\infty$ и $X(t)$, $a < t < b$ – ее параметризация. Положим $T = \{t \in (a;b) : X(t) \notin \mathfrak{R}_\infty\}$. Поскольку $\mathfrak{R}_\infty$ – замкнутое множество в $\mathfrak{R}$, то T состоит из не более чем счетного числа попарно не пересекающихся интервалов T_i, $i \geqslant 1$, и $X = X(t), t \in T_i$, задает открытую дугу γ_i в $\mathfrak{R}$. Если γ_i – локально спрямляемая кривая для всех $i \geqslant 1$, то кривую γ назовем локально спрямляемой кривой. В этом случае для каждой кривой γ_i можно определить ее натуральную параметризацию $X = X_i(s)$, $s \in S_i$, $i \geqslant 1$. Сам набор $X = X_i(s), s \in S_i, i \geqslant 1$, будем называть натуральной параметризацией кривой γ. Для борелевской функции $\rho : \mathfrak{R} \to [0;+\infty]$ положим

$$\int\limits_\gamma \rho\, ds = \sum_{i\geqslant 1} \int\limits_{\gamma_i} \rho\, ds = \sum_{i\geqslant 1} \int\limits_{S_i} \rho(X_i(s))\, ds. \tag{1}$$

Здесь интеграл $\int\limits_{S_i} \rho(X_i(s))\, ds$ понимается в смысле Лебега и допускается, что $S_i = (-\infty;+\infty)$ для некоторых $i \geqslant 1$ (подробнее см. [9, §2.2, p. 18]). В частности, полагая в (1) $\rho = \chi_F$, где χ_F – характеристическая функция борелевского множества $F \subset \mathfrak{R}$, введем на $\mathfrak{R}$ борелевскую меру s_γ соотношением

$$s_\gamma(F) = \int\limits_{\gamma\cap F} 1 \cdot ds = \int\limits_\gamma \chi_F\, ds.$$

Отметим, что для этой меры по определению имеет место равенство $s_\gamma(\mathfrak{R}_\infty \cup \mathfrak{R}_b) = 0$.

Пусть теперь $\gamma \subset G$ – локально спрямляемая кривая. Тогда γ назовем локально спрямляемой кривой в G, если для любого компакта $K \subset G \setminus \mathfrak{R}_\infty$ выполняется неравенство $s_\gamma(K) < \infty$. Это позволяет для такой кривой ввести векторную меру $\mu_\gamma = (\mu_{1\gamma}, \mu_{2\gamma})$. Здесь

$$\mu_{i\gamma}(F) = \int\limits_{\gamma\cap F} dx_i = \int\limits_{\gamma\cap F} \frac{dx_i}{ds}\, ds, \quad i = 1,2, \tag{2}$$

где F – борелевское множество в G и $\bar{F} \subset G \setminus \mathfrak{R}_\infty$, точки $X = X(s)$ кривой γ отождествляются с их проекциями $\operatorname{pr} X = x = (x_1, x_2) = (x_1(s), x_2(s))$, $i = 1, 2$.

Пусть теперь $f = (f_1, f_2)$ – вектор-функция на G, где f_1, f_2 – борелевские функции на G и $\int\limits_\gamma |f|\, ds < \infty$. Тогда нетрудно заметить, что интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f\,d\mu_{\gamma} = \int\limits_{\gamma} f_1 d\mu_{1\gamma} + f_2 d\mu_{2\gamma} = \int\limits_{\gamma} \left(f_1 \frac{dx_1}{ds} + f_2 \frac{dx_2}{ds} \right) ds$$

имеет смысл и справедлива оценка $\left| \int\limits_{\gamma} f\,d\mu_{\gamma} \right| \leqslant \int\limits_{\gamma} |f|\,ds.$

Вещественную функцию $u : E \to (-\infty; +\infty)$, непрерывную на $E \subset \mathfrak{R}$, назовем локально липшицевой на E, если для любой точки множества E существует окрестность этой точки и положительное число L такие, что для любой пары различных точек $X, X' \in E$ из этой окрестности выполняется неравенство

$$|u(X) - u(X')| \leqslant L|\operatorname{pr} X - \operatorname{pr} X'|.$$

Пусть $p \in (1; +\infty)$, A_p – класс положительных борелевских локально интегрируемых функций w на плоскости R^2, удовлетворяющих условию Макенхаупта [9, §2.4]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} w\,dx \left(\frac{1}{|Q|} \int\limits_{Q} w^{1-q}\,dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным квадратам $Q \subset R^2$, $|Q|$ — площадь Q, dx — элемент площади, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Будем говорить, что борелевская функция $\omega : \mathfrak{R} \to [0; +\infty]$ удовлетворяет на $\mathfrak{R}$ A_p-условию Макенхаупта, если существует функция $w \in A_p$ такая, что $\omega(X) = w(\operatorname{pr} X)$ для всех $X \in \mathfrak{R} \backslash \mathfrak{R}_{\infty}$. В этом случае будем говорить, что вес w порождает вес ω.

Вес, порожденный весом w^{1-q}, обозначим через $\tilde{\omega}$.

Обозначим через $L^{p,\omega}(D)$, где D – борелевское множество на $\mathfrak{R}$, класс функций $f : D \to [-\infty; +\infty]$, для которых

$$\|f\| = \|f\|_{L_{p,\omega}(D)} = \left(\int\limits_{D} |f|^p \omega\,d\sigma \right)^{1/p} < \infty.$$

Вектор-функцию $f = (f_1, f_2)$ назовем борелевской в D, если f_1, f_2 – борелевские функции в D.

Конденсатором на G назовем упорядоченную тройку (F_0, F_1, G), где F_0, F_1 – непересекающиеся непустые множества на $\bar{G}$. Положим $G_0 = G \setminus (F_0 \cup F_1)$.

Величину

$$C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = \inf \int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma$$

назовем (p, ω)-емкостью конденсатора (F_0, F_1, G). Здесь инфимум берется по всем функциям u, локально липшицевым в G, равным j в некоторой окрестности F_j и постоянным в какой-нибудь окрестности каждой точки из $G \cap (\mathfrak{R}_\infty \cup \mathfrak{R}_b)$, где $j = 0, 1$.

Отметим, что градиент ∇u в терминах локального параметра $x = (x_1, x_2) = \operatorname{pr} X$ равен $\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$ в точке X σ-почти всюду на G. Класс всех таких допустимых функций для $C_{p,\omega}(F_0, F_1, G)$ обозначим через $\mathcal{D}(F_0, F_1, G)$.

В силу известных свойств измеримых по Лебегу функций будем считать, что ∇u – борелевская вектор-функция на G (если ее доопределить надлежащим образом на множестве нулевой σ-меры [4, доказательство теоремы 1]) для всех $u \in \mathcal{D}(F_0, F_1, G)$. Кроме того, ввиду неравенства $C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) < \infty$ (см. [4, лемма 6]) и применяя срезки вида $\max(0, u)$, $\min(1, u)$, потребуем, чтобы класс функций $\mathcal{D}(F_0, F_1, G)$ состоял только из функций u, для которых

$$\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma < \infty \quad \text{и} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \quad \text{в} \quad G.$$

Тогда каждой функции $u \in \mathcal{D}(F_0, F_1, G)$ сопоставим векторную меру $\sigma_u = (\sigma_{1u}, \sigma_{2u})$, где

$$\sigma_{ju}(F) = \int\limits_F \frac{\partial u}{\partial x_j} \, d\sigma, \quad j = 1, 2,$$

для любого борелевского множества F такого, что $\bar{F} \subset G_0 \setminus \mathfrak{R}_\infty$. Семейство всех таких мер обозначим через $\nabla\mathcal{D} = \nabla\mathcal{D}(F_0, F_1, G)$.

Для семейства Γ локально спрямляемых кривых в G определим его (p, ω)-модуль как величину $m_{p,\omega}(\Gamma) = \inf \int\limits_G \rho^p \omega \, d\sigma$. Здесь инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho : G \to [0; +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho \, ds \geqslant 1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Класс всех таких допустимых функций для

$m_{p,\omega}(\Gamma)$ обозначим через $\mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma)$. Если $m_{p,\omega}(\Gamma) = 0$, то семейство Γ назовем (p,ω)-исключительным ((p,ω)-искл.).

Через $\Gamma = \Gamma(F_0, F_1, G)$ обозначим семейство всех локально спрямляемых кривых γ в G, которые расположены в G_0 и соединяют F_0 и F_1. Положим $m_{p,\omega}(\Gamma(F_0, F_1, G)) = m_{p,\omega}(F_0, F_1, G)$.

Определим для каждой кривой $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$ по формулам (2) векторную меру $\mu_\gamma = (\mu_{1\gamma}, \mu_{2\gamma})$. Параметризацию кривой γ на области определения выбираем так, чтобы обход кривой осуществлялся от F_0 к F_1 и этот обход сохранялся при натуральной параметризации данной кривой. Полученное таким образом семейство мер μ_γ, $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$, обозначим через $\Lambda = \Lambda(F_0, F_1, G)$.

Пусть $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ – борелевская вектор-функция на G. Тогда пишем $\xi \wedge \mu_\gamma$, если $\int\limits_\gamma \xi\, d\mu_\gamma = \int\limits_\gamma \xi_1 d\mu_{1\gamma} + \xi_2 d\mu_{2\gamma} \geqslant 1$ для $\mu_\gamma \in \Lambda$. Мы пишем $\xi \wedge \Lambda$ (p,ω)-п.в., если $\xi \wedge \mu_\gamma$ для всех $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)$, исключая, быть может, некоторое (p,ω)-искл. семейство кривых.

Введем (p,ω)-модуль семейства Λ как величину

$$M_{p,\omega}(\Lambda) = \inf\left\{\int\limits_{G_0} |\xi|^p \omega\, d\sigma : \xi \wedge \Lambda (p,\omega)\text{-п.в.}\right\}.$$

Аналогично, для борелевской вектор-функции $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ в G_0 и $\sigma_u \in \nabla\mathcal{D}$ пишем $\xi \wedge \sigma_u$, если

$$\int\limits_{G_0} \xi d\sigma_u = \int\limits_{G_0} \xi \cdot \nabla u\, d\sigma \geqslant 1.$$

Мы пишем $\xi \wedge \nabla\mathcal{D}$, если $\xi \wedge \sigma_u$ для всех $\sigma_u \in \nabla\mathcal{D}$.

Введем $(q,\tilde\omega)$-модуль семейства $\nabla\mathcal{D}$ как величину

$$M_{q,\tilde\omega}(\nabla\mathcal{D}) = \inf\left\{\int\limits_{G_0} |\xi|^q \tilde\omega\, d\sigma : \xi \wedge \nabla\mathcal{D}\right\}$$

и перейдем к доказательству основных результатов.

§2. Основные результаты

Теорема 1.

$$C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = m_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = M_{p,\omega}(\Lambda).$$

Доказательство. Равенство

$$C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = m_{p,\omega}(F_0, F_1, G) \tag{3}$$

есть следствие теоремы 2 из [4], где получено равенство емкости и модуля конденсатора с конечным числом пластин не меньше двух. Кроме того, установлено, что емкость конденсатора есть конечная величина. Установим, что

$$M_{p,\omega}(\Lambda) \leqslant C_{p,\omega}(F_0, F_1, G). \tag{4}$$

Возьмем $u \in \mathcal{D}(F_0, F_1, G)$ и зададим множество

$$E_u = \{X \in G_0 : u \text{ как функция локального параметра } x = \operatorname{pr} X \text{ недифференцируема в точке } x\}.$$

Тогда $\sigma(E_u) = 0$ в силу локальной липшицевости u на G_0. Поскольку мера Лебега σ — регулярная мера Бореля на $\mathfrak{R}$, то можно указать борелевское множество $B_u \subset G_0$ нулевой σ-меры и $E_u \subset B_u$. Положим

$$\Gamma_u = \{\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G) : s_\gamma(B_u) > 0\}, \quad \rho_0 = \begin{cases} +\infty, & X \in B_u, \\ 0, & X \in \mathfrak{R} \setminus B_u. \end{cases}$$

Тогда $\rho_0 \in \operatorname{adm}_{p,\omega}(\Gamma_u)$, $\int\limits_{G_0} \rho_0^p \omega \, d\sigma = 0$ и поэтому $m_{p,\omega}(\Gamma_u) = 0$. Другими словами, Γ_u – (p, ω)-искл. С другой стороны, учитывая, что $u(X_\gamma(s))$ абсолютно непрерывна на любом отрезке из области определения натуральной параметризации кривой $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G) \setminus \Gamma_u$, имеем

$$\int\limits_\gamma \nabla u \, d\mu_\gamma = \int\limits_\gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds} \right) ds = \int\limits_\gamma \frac{du}{ds} \, ds = 1.$$

Здесь $X(s) = X_\gamma(s)$ отождествляется с $x(s) = (x_1(s), x_2(s)) = \operatorname{pr} X(s)$, когда $X(s) \in \gamma$. Таким образом, $\nabla u \wedge \Lambda$ (p, ω)-п.в. и, следовательно, $\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \geqslant M_{p,\omega}(\Lambda)$. Переходя к инфимуму по всем $u \in \mathcal{D}$ (F_0, F_1, G), получим требуемое неравенство (4). Из (4), в частности, следует, что $M_{p,\omega}(\Lambda) < \infty$.

Покажем, что

$$M_{p,\omega}(\Lambda) \geqslant m_{p,\omega}(F_0, F_1, G). \tag{5}$$

Пусть $\xi \wedge \Lambda$ (p, ω)-п.в. Тогда в силу выбора ξ существует (p, ω)-искл. семейство $\Gamma_\xi \subset \Gamma(F_0, F_1, G)$ такое, что

$$1 \leqslant \int\limits_\gamma \xi \, d\mu_\gamma \leqslant \int\limits_\gamma |\xi| \, ds$$

для всех $\gamma \in \Gamma(F_0, F_1, G)\setminus\Gamma_\xi$. Следовательно, $|\xi| \in \mathrm{adm}_{p,\omega}(\Gamma(F_0, F_1, G)\setminus \Gamma_\xi)$. Отсюда и из свойства полуаддитивности модуля получим, что

$$\int\limits_{G_0} |\xi|^p \omega \, d\sigma \geqslant m_{p,\omega}(F_0, F_1, G).$$

Переходя к инфимуму по всем $\xi \wedge \Lambda$ (p, ω)-п.в., получим нужную оценку (5).

Соединение (3),(4),(5) завершает доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Если* $C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = 0$, *то* $M_{q,\tilde{\omega}}(\nabla\mathcal{D}) = \infty$; *если* $C_{p,\omega}$ $(F_0, F_1, G) > 0$, *то*

$$C_{p,\omega}(F_0, F_1, G)^{\frac{1}{p}} \cdot M_{q,\tilde{\omega}}(\nabla\mathcal{D})^{\frac{1}{q}} = 1.$$

Доказательство. Очевидно, что $\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in \mathcal{D}(F_0, F_1, G)$ для всех $u_1, u_2 \in \mathcal{D}(F_0, F_1, G)$ и любого $\alpha \in [0, 1]$; другими словами, $\mathcal{D}$ (F_0, F_1, G) – выпуклое множество. Аналогично, применяя неравенство Минковского (см. [4, лемма 2]) получим, что $\mathcal{B} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2) : |\xi| \in L^{q,\tilde{\omega}}(G_0), \|\xi\|_{L^{q,\tilde{\omega}}(G_0)} \leqslant 1\}$ – выпуклое множество. В силу неравенства Кларксона [4, лемма 1] банахово пространство $L^{q,\tilde{\omega}}(G_0)$ является равномерно выпуклым, и, значит, по теореме Мильмана [3] рефлексивно. По теореме о слабой компактности в рефлексивных банаховых пространствах [2, гл. V, §2, теорема 1] замкнутое множество $\mathcal{B}$ будет слабо компактным.

Заметим, что

$$\Phi(u, \xi) = -\int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma$$

есть билинейный функционал на $\mathcal{D} \times \mathcal{B}$ такой, что $\Phi(u, \cdot)$ непрерывен в смысле слабой топологии на $\mathcal{B}$. Применяя теорему о минимаксе [6,8], получим

$$\sup_{u\in\mathcal{D}} \inf_{\xi\in\mathcal{B}} \Phi(u, \xi) = \inf_{\xi\in\mathcal{B}} \sup_{u\in\mathcal{D}} \Phi(u, \xi).$$

Иначе говоря,

$$\inf_{u\in\mathcal{D}} \sup_{\xi\in\mathcal{B}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma = \sup_{\xi\in\mathcal{B}} \inf_{u\in\mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma. \tag{6}$$

Из неравенства Гельдера [4, лемма 2] следует, что

$$\int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \leqslant \left(\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_{G_0} |\xi|^q \tilde{\omega} \, d\sigma \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда

$$\sup_{\xi \in \mathcal{B}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \leqslant \left(\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пусть

$$\xi = \left(\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \right)^{-\frac{1}{q}} |\nabla u|^{p-2} \omega \cdot \nabla u.$$

Тогда $\|\xi\|_{L^{q,\tilde{\omega}}(G_0)} = 1$, и

$$\int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma = \left(\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Это дает равенство

$$\sup_{\xi \in \mathcal{B}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma = \left(\int\limits_{G_0} |\nabla u|^p \omega \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}$$

и, значит, в силу (6) имеем

$$C_{p,\omega}(F_0, F_1, G)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\xi \in \mathcal{B}} \inf_{u \in \mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma. \tag{7}$$

Допустим теперь, что $C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) = 0$. Тогда $\inf\limits_{u \in \mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma = 0$ для любого $\xi \in \mathcal{B}$ и не существует вектор-функции ξ, $|\xi| \in L^{q,\tilde{\omega}}(G_0)$, для которой $\xi \wedge \nabla \mathcal{D}$. Поэтому $M_{q,\tilde{\omega}}(\nabla \mathcal{D}) = \infty$, и теорема справедлива в этом случае.

Пусть теперь $C_{p,\omega}(F_0, F_1, G) > 0$. Тогда докажем, что

$$\sup_{\xi\in\mathcal{B}} \inf_{u\in\mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma = \sup \left\{ \left(\int\limits_{G_0} |\xi|^q \tilde{\omega} \, d\sigma \right)^{-\frac{1}{q}} : \inf_{u\in\mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \geqslant 1 \right\}. \tag{8}$$

Пусть $\alpha = C_{p,\omega}(F_0, F_1, G)^{\frac{1}{p}}$ – значение левой части в (8) (как следует из (7)), а β – значение правой части (8). В силу приведенных выше рассуждений и однородности интеграла в (7) по ξ существует вектор-функция ξ, $|\xi| \in L^{q,\tilde{\omega}}(G_0)$ такая, что

$$\inf_{u\in\mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \geqslant 1. \tag{9}$$

Применяя неравенство Гельдера, из (9) получим, что

$$\left(\int\limits_{G_0} |\xi|^q \tilde{\omega} \, d\sigma \right)^{\frac{1}{q}} \geqslant \frac{1}{\inf\limits_{u\in\mathcal{D}} \left(\int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \right)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Это приводит к оценке $\beta \leqslant \alpha$. Рассуждая аналогично, установим, что $\beta \geqslant \alpha$. Таким образом, равенство (8) верно.

По определению, правая часть в (8) равна

$$\left(\inf \left\{ \int\limits_{G_0} |\xi|^q \tilde{\omega} \, d\sigma : \inf_{u\in\mathcal{D}} \int\limits_{G_0} \nabla u \cdot \xi \, d\sigma \geqslant 1 \right\} \right)^{-\frac{1}{q}} = M_{q,\tilde{\omega}}(\nabla\mathcal{D})^{-\frac{1}{q}}.$$

Подставляя значения α и β в (8), получим утверждение теоремы. □

Литература

1. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, Наука, 1968.
2. К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
3. Д. Мильман, *О некоторых признаках регулярности пространств типа (B)*. — ДАН СССР **20** (1938), 243–246.
4. П. А. Пугач, В. А. Шлык, *Весовые модули и емкости на римановой поверхности*, В наст. сборнике.
5. С. Стоилов, *Лекции о топологических принципах теории аналитических функции*, Наука, 1964.
6. D. Adams, L. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer-Verlag, 1996.

7. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. **24** (1999), 61–88.
8. K. Fan, *Minimax Theorems.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **39**, No. 1 (1953), 42–47.
9. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO international series, Gakkōtosho, 2003.
10. P. Pugach, V. Shlyk, *Moduli, capacity, BV-functions on the Riemann surfaces.* — Lobachevskii J. Math. **38**, No. 2 (2017), 338–351.

Dymchenko Yu. V., Shlyk V. A. Modules of families of vector measures on a Riemann surface.

We consider a Riemann surface in the broad sense of the term in the Hurwitz-Courant terminology and an open set with a compact closure on this surface. In this paper, it is established that a family of vector measures can be associated with a condenser on a given open set, following the Aikawa-Ohtsuka, whose modules are calculated directly with the help of a weighted capacity (with Muckenhoupt weight) of the given condenser.

Поступило 14 сентября 2017 г.

Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова 8,
Владивосток, Россия
E-mail: dymch@mail.ru

Владивостокский филиал Российской
таможенной академии
ул. Стрелковая, 16в,
г. Владивосток, Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru