Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

В. Н. Дубинин

ПОЯС ЛЕМНИСКАТ И ТЕОРЕМЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ МНОГОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

§1. Введение

Пусть f – мероморфная функция в области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, отличная от постоянной, и пусть $0 \leqslant t \leqslant \infty$. Множество

$$L_f(t) = \{z \in D : \, |f(z)| = t\}$$

будем называть *лемнискатой* функции f. В данной работе рассматриваются метрические свойства голоморфных функций f различных классов, зависящие от связности некоторых лемнискат этих функций. Мотивация такого исследования восходит к известной задаче Эрдеша о нахождении максимума модуля производной монома f на связной лемнискате $L_f(1)$ [1, 2]. Задача Эрдеша была решена Еременко и Лэмпертом [3] (см. также [4]). Впоследствии выяснилось, что связность лемнискаты $L_f(1)$ влияет не только на верхнюю оценку модуля $|f'|$ на $L_f(1)$ (и, следовательно, внутри неё), но и на оценку $|f'|$ во всей плоскости $\mathbb{C}$. Именно, справедливо следующее утверждение. Если $f(z) = c_p z^p + \dots$ – полином степени $p \geqslant 2$, и если лемниската $L_f(1)$ связная, то для любой точки z выполнятся неравенство

$$|f'(z)| \leqslant 2^{\frac{1-p}{p}} |c_p|^{\frac{1}{p}} T_p'(T_p^{-1}(|f(z)|)),$$

где $T_p(z) = 2^{p-1} z^p + \dots$ – полином Чебышева, а значение $T_p^{-1}(|f(z)|)$ берется на луче $[\cos(\pi/(2p)), +\infty]$. Равенство достигается, например, в случае $f = T_p$ и любого вещественного z, $|z| \geqslant \cos(\pi/(2p))$ (см. [5,6]). Другие теоремы искажения для полиномов со связной лемнискатой представлены в работах [7, 8]. Аналогичные неравенства для рациональных функций получены в [9,10]. Все упомянутые выше результаты в [5–10] установлены с помощью круговой симметризации конденсаторов на римановых поверхностях [11,12]. Продолжая это исследование,

---

Ключевые слова: лемнискаты, многолистные функции, теоремы искажения, дроби Золотарева, рациональные функции, симметризация.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект No. 14-11-00022).

мы вводим во втором параграфе данной статьи понятие *пояса лемнискат* голоморфной функции и обсуждаем наличие такого пояса у функций некоторых классов. Третий и четвертый параграф носят вспомогательный характер. В третьем параграфе рассматриваются подходящие дроби Золотарева, а в четвертом – некоторая модификация симметризации [12]. Наконец, в пятом параграфе доказываются теоремы искажения для многолистных функций различных классов, учитывающие наличие пояса лемнискат.

§2. Пояс лемнискат

Фиксируем натуральное число $p \geqslant 1$ и односвязную область D расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. Мероморфная в области D функция f, отличная от постоянной, называется p-листной в среднем по окружности (сокр. *с.т.p*-листной функцией), если для любого числа $t > 0$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} n(te^{i\varphi}, f)d\varphi \leqslant p.$$

Здесь $n(w, f)$ означает число корней уравнения $f(z) = w$ в D. Каждая лемниската $L_f(t)$, отличная от пустого множества, состоит из связных компонент, замыкания которых либо принадлежат D, либо имеют общие точки с границей области D. Объединение лемнискат *с.т.p*-листной функции f

$$L_f(t_1, t_2) := \bigcup_{t\in[t_1,t_2]} L_f(t), \tag{1}$$

$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \infty$, назовем *поясом лемнискат первого рода*, если каждая лемниската $L_f(t)$ из (1) является связной, а ее образ при отображении функцией f p-кратно накрывает окружность $\gamma(t) := \{w : \ |w| = t\}$. Если каждая лемниската из объединения (1) не содержит связной компоненты, лежащей компактно в D, то множество $L_f(t_1, t_2)$ будем называть *поясом лемнискат второго рода*. В этом случае непустой пояс лемнискат становится связным множеством, если к нему добавить граничную точку ∂D (как идеальную границу). Нетрудно показать, что любой комплексный полином f степени $p \geqslant 2$, рассматриваемый в области $D = \overline{\mathbb{C}}$, имеет пояс лемнискат первого рода $L_f(t, \infty)$, где

$$t = \max\{|f(z)| : \ f'(z) = 0\}.$$

Сложнее обстоит дело с рациональными функциями. Так, дробь Золотарева F (см. §3) имеет пояс лемнискат первого рода $L_F(1,\tau)$, а другая дробь Золотарева Z_p не имеет связных лемнискат при $p \geqslant 3$. Элементарным примером рациональной функции, не имеющей связных лемнискат, может служить функция

$$f(z) = \frac{(1-2z)(z+2)^{20}}{(z-2)(1+2z)^{20}}.$$

В этом несложно убедиться стандартными методами, либо привлекая структуру траекторий квадратного дифференциала

$$((i\log f(z))')^2 dz^2.$$

Наконец, функция

$$f(z) = \frac{1-z^p}{1+z^p}$$

имеет только одну связную лемнискату. Справедливо следующее

Утверждение 1 ([13, теорема 1])**.** *Если для рациональной функции f степени $p \geqslant 2$ существует связная лемниската, то найдутся такие числа t_1 и t_2, $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant \infty$, что лемниската $L_f(t)$ является связной для всех $t \in [t_1,t_2]$ и $L_f(t)$ – несвязная при $t \notin [t_1,t_2]$.*

Голоморфные функции f классов $S_p(\tau)$ [11], $\mathfrak{M}_p(\tau)$ [14] и $S_p^c(\tau)$ [15] имеют пояс лемнискат первого рода $L_f(0,\tau)$. Функции $f \in M_p(\omega,\lambda)$ [16] обладают поясом лемнискат первого рода $L_f(\lambda,\infty)$. Функции f класса $D_p(\lambda)$ [11] и функции класса $D_p^c(\lambda)$ [15] имеют пояс лемнискат вторго рода $L_f(\lambda,\infty)$. В частности, голоморфные *с.т.р*-листные в круге $U_z := \{z : \ |z| < 1\}$ функции f, не принимающие значения ноль, обладают поясом лемнискат второго рода $L_f(0,\infty)$.

§3. Дроби Золотарева

При фиксированном натуральном $p > 1$ и $0 < \varkappa < 1$ рассмотрим функцию $Z_p(z) \equiv Z_p(z;\varkappa)$, заданную параметрически:

$$Z_p(\mathrm{sn}(u;k);\varkappa) := \mathrm{sn}(u\mathbf{K}(\varkappa)/\mathbf{K}(k);\varkappa), \ \ u \in \mathbb{C},$$

где модуль k определяется из условия

$$\mathbf{K}'(k)\mathbf{K}(\varkappa) = p\mathbf{K}'(\varkappa)\mathbf{K}(k), \quad 0 < k < 1,$$

$\mathbf{K}(\cdot)$, $\mathbf{K}'(\cdot)$ – полные эллиптические интегралы первого рода [17]. Функцию $Z_p(z)$, а также композиции $Z_p(z)$ с дробно-линейными преобразованиями как в области аргумента, так и в области значений

$Z_p(z)$ принято называть *дробями Золотарева* [18–20]. Хорошо известна роль дробей Золотарева в теории рациональной аппроксимации и расчетах электрических фильтров [17]. Нам понадобится также функция $F(z) \equiv F(z; p, \tau) = \Phi(Z_p(z; \varkappa))$, где

$$\Phi(v) = \sqrt{\tau}\,\frac{v\sqrt{\varkappa}+1}{1-v\sqrt{\varkappa}}, \quad \sqrt{\varkappa} = \frac{\sqrt{\tau}-1}{\sqrt{\tau}+1}.$$

Все нули и полюса функции F простые, причем нули расположены на отрезке вещественной оси $[-1/k, -1]$, а полюса – на отрезке $[1, 1/k]$ и каждый полюс симметричен некоторому нулю относительно начала координат. Всюду далее α означает наименьший, а β – наибольший нуль функции F. Функция F отображает сферу $\overline{\mathbb{C}}_z$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(F)$, лежащую над сферой $\overline{\mathbb{C}}_w$. Рассмотрим одно из представлений этой римановой поверхности. Пусть D_1 есть w-плоскость с разрезом по отрезку $[-\tau, -1]$; $D_2, \dots, D_{p-1}$ суть w-плоскости с разрезами по отрезкам $[-\tau, -1]$ и $[1, \tau]$, и пусть D_p – w-плоскость с разрезом по отрезку $[-\tau, -1]$ в случае четного p и по отрезку $[1, \tau]$ в случае, когда p нечетное. Риманову поверхность $\mathscr{R}(F)$ можно получить склеиванием областей D_k, $k = 1, \dots, p$, следующим образом. Область D_1 склеиваится крест на крест с областью D_2 по берегам разрезов вдоль отрезка $[-\tau, -1]$, область D_2 склеиваится с областью D_3 по берегам разрезов вдоль отрезка $[1, \tau]$ и т.д. Область D_{p-1} склеивается с областью D_p по берегам разрезов вдоль отрезка $[-\tau, -1]$ в случае четного p и вдоль отрезка $[1, \tau]$ в случае, когда p нечетное. Склеиваемые области D_k, рассматриваемые как подмножества поверхности $\mathscr{R}(F)$, будем обозначать буквами $\mathscr{D}_k$ соответственно, $k = 1, \dots, p$. Обозначим через $\mathscr{L}$ луч, лежащий на листе $\mathscr{D}_1$ над лучом $[0, +\infty]$. Рассматриваем функцию F как отображение сферы $\overline{\mathbb{C}}$ на риманову поверхность $\mathscr{R}(F)$, при котором $F[-1, 1] \subset \mathscr{L}$. Данное описание римановой поверхности $\mathscr{R}(F)$ вытекает из представления поверхности $\mathscr{R}(Z_p)$, которое, в свою очередь, несложно получить, зная свойства эллиптического синуса и используя принцип симметрии Римана–Шварца для конформных отображений.

Компактная риманова поверхность $\mathscr{R}(F)$ является подобной однолистной и имеет конечное число листов. Поэтому функция F и, следовательно, функция Z_p суть рациональные функции степени p [21, гл. 8, §10, теорема 4].

§4. Симметризация

Следуя работам [9,10], рассмотрим обобщение круговой симметризации [12]. Пусть $\gamma(\rho) = \{w : |w| = \rho\}$, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$. Обозначим через $\mathfrak{R}_p(\tau)$, $p \geqslant 2$, $\tau > 1$, совокупность всех римановых поверхностей $\mathscr{R}$, лежащих над комплексной w-сферой и удовлетворяющих следующим условиям:

1) линейная мера всех дуг на поверхности $\mathscr{R}$, лежащих над любой окружностью $\gamma(\rho)$, с учетом кратности не превосходит $2\pi p\rho$, $0 < \rho < \infty$;

2) для всех ρ, $1 \leqslant \rho \leqslant \tau$, любая замкнутая жорданова кривая на поверхности $\mathscr{R}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$ и не проходящая через точки разветвления $\mathscr{R}$, p-кратно покрывает эту окружность.

Заметим, что если f – рациональная функция степени p, для которой лемнискаты $L_f(t)$, $t \in [1, \tau]$, суть связные множества, то риманова поверхность $\mathscr{R}(f)$ функции, обратной f, принадлежит классу $\mathfrak{R}_p(\tau)$. Важным для нас частным случаем поверхности класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ является риманова поверхность функции, обратной дроби Золотарева $\mathscr{R}(F)$.

Перейдем к определению круговой симметризации множеств и конденсаторов, которую будем обозначать символом Sym_τ в отличие от Sym в [12]. Пусть $\mathscr{R}$ – произвольная поверхность класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ и $\mathscr{B}$ – открытое множество на $\mathscr{R}$. Симметризация Sym_τ преобразует множество $\mathscr{B}$ в множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащее на поверхности $\mathscr{R}(F)$ и обладающее следующими свойствами. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{B}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$. Если множество $\mathscr{B}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \tau$, p-кратно, то множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$ также покрывает $\gamma(\rho)$ p-кратно. Если $\mathscr{B}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, $\tau < \rho \leqslant \infty$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1, \ldots, \mathscr{D}_l$. В остальных случаях при $1 \leqslant \rho \leqslant \tau$ часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, является открытой дугой[1] на $\mathscr{R}(F)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{B}(\rho) := \{W \in \mathscr{B} : |\mathrm{pr}\, W| = \rho\}$. При $0 < \rho < 1$ и $\tau < \rho < \infty$ часть $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$ и открытой

[1] В случае $1 < \rho < \tau$ это открытая жорданова дуга, а при $\rho = 1$ и $\rho = \tau$ данная дуга может иметь точки самоприкасания.

дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k = \Gamma_k(\mathscr{B},\rho) \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1,\dots,m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{B}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$. Здесь количество окружностей m зависит от меры множества $\mathscr{B}(\rho)$. Если указанная мера меньше $2\pi\rho$, то необходимо $m = 0$ и множество окружностей пусто. Результат симметризации $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ замкнутого множества $\mathscr{E} \subset \mathscr{R}$ также лежит на поверхности $\mathscr{R}(F)$ и определяется следующим образом. Если при данном ρ, $0 \leqslant \rho \leqslant \infty$, над окружностью $\gamma(\rho)$ нет точек множества $\mathscr{E}$, то над ней нет также и точек множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$. Если множество $\mathscr{E}$ покрывает окружность $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \tau$, $p-$ кратно, то множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$ также p-кратно. Если $\mathscr{E}$ покрывает $\gamma(\rho)$, $0 \leqslant \rho < 1$, $\tau < \rho \leqslant \infty$, l-кратно, $l \leqslant p$, то часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$, лежащая над $\gamma(\rho)$, состоит из l окружностей на листах $\mathscr{D}_1,\dots,\mathscr{D}_l$. В остальных случаях часть множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$, лежащая над окружностью $\gamma(\rho)$, $1 \leqslant \rho \leqslant \tau$, является замкнутой дугой (т.е. дугой, содержащей свои концы) на $\mathscr{R}(F)$ с центром на луче $\mathscr{L}$ и линейной меры, равной мере множества $\mathscr{E}(\rho) := \{W \in \mathscr{E} : |\mathrm{pr}\, W| = \rho\}$ (в случае когда данная мера равна нулю, соответствующая дуга является точкой на луче $\mathscr{L}$). Часть $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ над $\gamma(\rho)$, $0 < \rho < 1$, $\tau < \rho < \infty$, представляет собой совокупность из m окружностей $\Gamma_1,\dots,\Gamma_m$ и замкнутой дуги Γ_{m+1}, $\Gamma_k \subset \mathscr{D}_k$, $k = 1,\dots,m+1$, $0 \leqslant m \leqslant p-1$, суммарная линейная мера которых равна мере множества $\mathscr{E}(\rho)$, а центр дуги Γ_{m+1} расположен над точкой $(-1)^m\rho$ (если указанная мера равна $2\pi\rho m$, где m – целое неотрицательное число, то дуга Γ_{m+1} является точкой).

Непосредственно из определения симметризации видно, что если $\mathscr{E} \subset \mathscr{B}$, то $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E} \subset \mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$. Результат симметризации открытого множества $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$ есть множество, открытое в $\mathscr{R}(F)$, и если $\mathscr{E}$ – компакт в $\mathscr{R}$, то $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ является компактом в $\mathscr{R}(F)$. Поэтому можно определить симметризацию *конденсатора* $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ (см. [12]) по формуле

$$\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{C} = (\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}, \mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}).$$

Следующее утверждение совпадает по форме с теоремой 1.1 в [12].

Утверждение 2 ([9, теорема 2]). *Для любого конденсатора $\mathscr{C}$ на поверхности $\mathscr{R}$ класса $\mathfrak{R}_p(\tau)$ справедливо неравенство*

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap}\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{C}. \tag{2}$$

Если дополнительно поле конденсатора $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ *связное и существует потенциальная функция этого конденсатора, то равенство в* (2) *достигается только в следующих случаях*:

(i) *поле конденсатора* $\mathscr{C}$ *совпадает с полем конденсатора* $\mathrm{Sym}_\tau \mathscr{C}$ *с точностью до поворота вокруг начала координат*;

(ii) *при некоторых* s, t *и* l, $0 < s < t < \infty$, $1 < l \leqslant p$, *поле конденсатора* $\mathscr{C}$ l*-кратно накрывает круговое кольцо*[2] $s < |w| < t$ *так, что над каждой граничной окружностью этого кольца расположены либо только граничные точки множества* $\mathscr{B}$, *либо только граничные точки* $\mathscr{E}$.

§5. Теоремы искажения

Всюду ниже $p \geqslant 2$ – фиксированное натуральное число, (a_1, a_2, a_3, a_4) – ангармоническое отношение четырех различных точек a_k, $k = 1, \ldots, 4$, лежащих на сфере Римана $\overline{\mathbb{C}}$,

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} : \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2}.$$

Для точки $w \in \overline{\mathbb{C}}_w$ обозначим через $\alpha(w)$ корень уравнения $F(z) = (-1)^p |w|$, принадлежащий множеству $[-\infty, \alpha] \cup [-\alpha, +\infty]$, и пусть $\beta(w)$ – корень уравнения $F(z) = |w|$, лежащий на отрезке $[\beta, -\beta]$. В частности, $\alpha(0) = \alpha$, $\alpha(\infty) = -\alpha$, $\beta(0) = \beta$, $\beta(\infty) = -\beta$.

Теорема 1. *Пусть* f *– рациональная функция степени* p, *имеющая пояс лемнискат первого рода* $L_f(1, \tau)$. *Тогда для любых четырех различных точек* z_j, $j = 1, 2, 3, 4$, *расположенных на ориентированной прямой в порядке возрастания индекса, выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} |(\beta(f(z_3)), \alpha(f(z_1)), \beta(f(z_2)), \alpha(f(z_4)))| &\leqslant -(z_3, z_1, z_2, z_4) \\ &\leqslant |(\alpha(f(z_3)), \beta(f(z_1)), \beta(f(z_2)), \alpha(f(z_4)))|. \end{aligned} \tag{3}$$

Равенство в левой части (3) *достигается, например, в случае функции* $f = F$ *и точек* z_j, $j = 1, 2, 3, 4$, *удовлетворяющих условиям* $z_1 \leqslant \alpha$, $\beta \leqslant z_2 < z_3 \leqslant -\beta$, $-\alpha \leqslant z_4$, *а в правой части* (3) *– для* $f = F$ *и точек* $\beta \leqslant z_1 < z_2 \leqslant -\beta$, $-\alpha \leqslant z_3 < z_4$.

---

[2] То есть над каждой точкой этого кольца имеется ровно l точек поля с учетом кратности.

Доказательство. Утверждение о знаке равенства вытекает непосредственно из определения дроби Золотарева F и принятых обозначений $\alpha(w)$ и $\beta(w)$. Для доказательства левого неравенства в (3) можно считать, что $-\infty < z_1 < z_2 < z_3 < z_4 < +\infty$, и$|f(z_1)| \neq |f(z_4)|$, $|f(z_2)| \neq |f(z_3)|$. Рассмотрим конденсатор $C = (B, E)$,[3] где

$$B = \mathbb{C} \setminus \{z :\ \operatorname{Im} z = 0,\ |z - (z_1 + z_4)/2| \geqslant (z_4 - z_1)/2\},\ E = [z_2, z_3].$$

Пусть $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ – образ конденсатора C при отображении f, рассматриваемый на римановой поверхности $\mathscr{R}(f)$. Ввиду конформной инвариантности емкости конденсатора

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap}\mathscr{C}.$$

Так как функция f имеет пояс лемнискат первого рода $L_f(1, \tau)$, то поверхность $\mathscr{R}(f)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_p(\tau)$. Утверждение 2 дает

$$\operatorname{cap}\mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap}\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{C}.$$

Положим $f(z_j) = W_j \in \mathscr{R}(f)$, $\operatorname{pr} W_j = w_j$, $j = 1, 2, 3, 4$. (Там, где это не вызывает недоразумений образ f на поверхности $\mathscr{R}(f)$ и образ f на плоскости обозначаем одним и тем же символом $f(\,\cdot\,)$). Поскольку континуум $\mathscr{E}$ соединяет точки W_2 и W_3 на поверхности $\mathscr{R}(f)$, то над любой окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho \in [|w_2|, |w_3|]$ $([|w_3|, |w_2|])$ найдется точка этого континуума. По определению симметризации заключаем, что компакт $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{E}$ содержит отрезок $[W_2^*, W_3^*]$ на листе $\mathscr{D}_1$ поверхности $\mathscr{R}(F)$, $\operatorname{pr} W_j^* = |w_j|$, $j = 2, 3$. Аналогично, континуум $\mathscr{R}(f) \setminus \mathscr{B}$ соединяет точки W_1 и W_4. Поэтому над любой окружностью $\gamma(\rho)$, $\rho \in [|w_1|, |w_4|]$ $([|w_4|, |w_1|])$ найдется точка этого континуума. Следовательно, открытое множество $\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{B}$ не содержит точек отрезка $[W_1^*, W_4^*]$ на листе $\mathscr{D}_p \subset \mathscr{R}(F)$ такого, что $\operatorname{pr} W_j^* = (-1)^p |w_j|$, $j = 1, 4$. Из монотонности емкости

$$\operatorname{cap}\operatorname{Sym}_\tau \mathscr{C} \geqslant \operatorname{cap}(\mathscr{R}(F) \setminus [W_1^*, W_4^*], [W_2^*, W_3^*]).$$

Обозначим через $C^* = (B^*, E^*)$ образ конденсатора $(\mathscr{R}(F) \setminus [W_1^*, W_4^*],$ $[W_2^*, W_3^*])$ при отображении F^{-1}, расположенный на плоскости $\overline{\mathbb{C}}_z$. Множество B^* есть дополнение некоторого отрезка (в $\overline{\mathbb{C}}_z$), лежащего на вещественной оси и соединяющего точки $\alpha(w_1)$ и $\alpha(w_4)$, а множество E^* – отрезок $[\beta(w_2), \beta(w_3)]$, $([\beta(w_3), \beta(w_2)])$. Суммируя выписанные соотношения и учитывая вновь конформную инвариантность

[3] Мы придерживаемся обозначений, принятых в статье [12].

емкости, заключаем
$$\operatorname{cap} C \geqslant \operatorname{cap} C^*. \tag{4}$$
Пусть φ – дробно-линейное отображение, переводящее точки z_1, z_2, z_3 в точки $\infty, -1$ и 0, соответственно. Ввиду инвариантности ангармонического отношения при мебиусовых преобразованиях
$$(z_3, z_1, z_2, z_4) = (0, \infty, -1, \varphi(z_4)) = -1/\varphi(z_4) < 0.$$
Аналогично, если ψ – дробно-линейное отображение, переводящее точки $\alpha(w_1), \beta(w_2), \beta(w_3)$ в точки $\infty, -1, 0$, соответственно,то
$$(\beta(w_3), \alpha(w_1), \beta(w_2), \alpha(w_4)) = (0, \infty, -1, \psi(\alpha(w_4))) = -1/\psi(\alpha(w_4)).$$
Независимо от расположения точки $\psi(\alpha(w_4))$ по отношению к отрезку $[-1, 0]$ неравенство (4) влечет
$$\varphi(z_4) \leqslant |\psi(\alpha(w_4))|,$$
что с выше сказанным дает левое неравенство в (3).

Доказательство правого неравенства в (3) повторяет предыдущее доказательство со следующими изменениями. Необходимо положить $|f(z_1)| \neq |f(z_2)|$, $|f(z_3)| \neq |f(z_4)|$ и вместо конденсатора C рассмотреть конденсатор
$$(\overline{\mathbb{C}} \setminus [z_3, z_4], [z_1, z_2]).$$
В заключительной части доказательства требуется взять иные дробно-линейные отображения:
$$\varphi: \ z_1, z_2, z_4 \to -1, 0, \infty \ \text{ и } \ \psi: \ \beta(w_1), \beta(w_2), \alpha(w_4) \to -1, 0, \infty.$$
Теорема доказана. □

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если f – рациональная функция степени p с поясом лемнискат первого рода $L_f(1, \tau)$, а ее два нуля z_1, z_2 и два полюса ζ_1, ζ_2 расположены на одной ориентируемой прямой в порядке $z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2$, то*
$$-(\zeta_1, z_1, z_2, \zeta_2) \geqslant \frac{4\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^2}.$$
Равенство достигается в случае $f = F$ и $z_1 = \alpha$, $z_2 = \beta$, $\zeta_1 = -\beta$, $\zeta_2 = -\alpha$.

Следствие 2. *Пусть z_1 и ζ_1 – произвольные нуль и полюс, соответственно, рациональной функции f степени p, имеющей пояс лемнискат первого рода $L_f(1,\tau)$. Тогда для любого другого нуля z_2 этой функции справедливо неравенство*

$$\left|\frac{(z_1-z_2)(\zeta_1-z_2)}{(\zeta_1-z_1)}f'(z_2)\right| \leqslant \left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}F'(\beta)\right|.$$

Равенство достигается в случае $f=F$ и $z_1=\alpha$, $z_2=\beta$, $\zeta_1=-\alpha$.

Доказательство. Обозначим через λ дробно-линейное отображение, переводящее точки $-1,0,1$ в точки z_1, z_2, ζ_1, соответственно. Левое неравенство в (3), примененное к суперпозиции $\widetilde{f}=f\circ\lambda$ и точкам $-1,0,x,1$, дает

$$\frac{x}{1-x} \geqslant \left|\frac{\alpha(\beta-\beta(\widetilde{f}(x)))}{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta(\widetilde{f}(x)))}\right|.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\beta-\beta(\widetilde{f}(x))}{x}\right| \leqslant \left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}\right|,$$

$$\frac{|\widetilde{f}'(0)|}{2} \leqslant \left|\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\alpha}F'(\beta)\right|.$$

Осталось вычислить $\widetilde{f}'(0)=f'(z_2)\lambda'(0)$. Следствие доказано. □

Читатель без труда получит другие очевидные следствия неравенств (3), включая двуточечную теорему искажения.

Теорема 2. *Пусть f – мероморфная с.т.р-листная в круге U_ζ функция с поясом лемнискат первого рода $L_f(1,\tau)$, и пусть $-1\leqslant r_1<r_2<r_3<r_4\leqslant 1$. Пусть w_2, w_3 – произвольные различные точки на кривой $f([r_2,r_3])$, а w_1, w_4 – различные точки "образа границы"*[4] *круга U_ζ с разрезами $[-1,r_1]$, $[r_4,1]$ при отображении f. Тогда*

$$\left|(\beta(w_3),\alpha(w_1),\beta(w_2),\alpha(w_4))\right| \leqslant -(k(r_3),k(r_1),k(r_2),k(r_4)), \qquad (5)$$

где $k(\zeta)=\zeta(1+\zeta)^{-2}$ – функция Кебе. Равенство в (5) имеет место, например, в случае $f=F\circ\Psi$, $w_j=f(r_j)$, $j=1,2,3,4$, где Ψ есть конформное и однолистное отображение круга U_ζ на плоскость $\overline{\mathbb{C}}_z$ с разрезом по отрезку вещественной оси, лежащему вне $|z|<-\alpha$

[4]Имеется ввиду совокупность предельных граничных значений.

такое, что точки $\Psi(r_j),\ j=1,2,3,4,$ *расположены на вещественной оси в положительном либо отрицательном направлении, причем* $|\Psi(r_j)|\geqslant-\alpha,\ j=1,4,$ *и* $|\Psi(r_j)|\leqslant\beta,\ j=2,3.$

Доказательство совпадает по форме с доказательством левого неравенства в (3) теоремы 1, где $z_j=k(r_j),\ j=1,2,3,4$. При этом вместо отображения f необходимо рассматривать суперпозицию $f\circ k^{-1}$, а точки w_j не обязательно совпадают с $f\circ k^{-1}(z_j),\ j=1,2,3,4$. В утверждении о знаке равенства в (5) проще всего убедиться, заметив, что в ситуации, описанной в теореме 2, во всех неравенствах для емкостей конденсаторов (и, следовательно, в неравенстве (4)) имеет место знак равенства. □

Следствие 3. *Предположим, что в условиях теоремы* 2 *число полюсов функции* f *с учетом кратности не превосходит* $p-1$, *и пусть* ζ_1,ζ_2 *– нули функции* f, $-1<\zeta_1<\zeta_2<1$. *Тогда для любой точки* $\zeta,\ \zeta_2<\zeta<1$, *имеет место неравенство*

$$\frac{\beta-\beta(f(\zeta))}{\alpha+\beta(f(\zeta))}\leqslant\frac{\alpha-\beta}{2\alpha}\,\frac{(\zeta-\zeta_2)(1-\zeta\zeta_2)(1-\zeta_1)^2}{(\zeta_2-\zeta_1)(1-\zeta_1\zeta_2)(1-\zeta)^2}. \tag{6}$$

Если, дополнительно, правая часть (6) *не превосходит* $2\beta/(\alpha-\beta)$, *то неравенство* (6) *примет вид*

$$|f(\zeta)|\leqslant F(u_0), \tag{7}$$

где $u_0=(\beta-\alpha y_0)/(1+y_0)$, y_0 *– правая часть неравенства* (6). *Равенство в* (7) *достигается для суперпозиции* $f=F\circ\Psi$, *где функция* $z=\Psi(\zeta)$ *задана уравнением*

$$\frac{k(\zeta)-k(\zeta_1)}{k(\zeta)-k(\zeta_2)}\,\frac{1/4-k(\zeta_2)}{1/4-k(\zeta_1)}=\frac{z-\alpha}{z-\beta}\,\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.$$

Доказательство. Можно считать, что $f(1)=\infty$. Полагая в теореме 2 $r_1=\zeta_1,\ r_2=\zeta_2,\ r_3=\zeta,\ r_4=1$, приходим к неравенству (6). Неравенство (7) элементарно вытекает из (6), а случай равенства в (7) непосредственно проверяется с помощью утверждения о знаке равенства в теореме 2. Следствие доказано. □

Следствие 4. *Пусть в условиях следствия* 3 $\zeta_2=0$. *Тогда*

$$|f'(0)|\leqslant\frac{(\alpha^2-\beta^2)(1-\zeta_1)^2|F'(\beta)|}{2\alpha\zeta_1}$$

с равенством для функции $f=F\circ\Psi$ *из следствия* 3.

Теорема 3. *Пусть f – мероморфная с.т.р-листная в круге U_ζ функция с поясом лемнискат второго рода $L_f(1,\tau)$, и пусть $-1 \leqslant \zeta_1 < \zeta_2 \leqslant 1$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left|\frac{2k[\beta(f(\zeta_1)) - \beta(f(\zeta_2))]}{(1+k\beta(f(\zeta_1)))(1-k\beta(f(\zeta_2)))}\right| \leqslant \frac{4(\zeta_2-\zeta_1)(1-\zeta_1\zeta_2)}{(1+\zeta_1)^2(1-\zeta_2)^2}. \tag{8}$$

Равенство в (8) *достигается для функции*

$$f(\zeta) = F\left(\frac{2\zeta}{k(1+\zeta^2)}\right) \tag{9}$$

и любых точек ζ_j, $j=1,2$, удовлетворяющих условиям $-1 \leqslant \zeta_1 < \zeta_2 \leqslant 1$, $|2\zeta_j/(k(1+\zeta_j^2))| \leqslant -\beta$, $j=1,2$. Здесь k – модуль эллиптического интеграла, определенный в §3.

Доказательство. Можно считать, что $|f(\zeta_1)| \neq |f(\zeta_2)|$. Рассмотрим конденсатор $C=(B,E)$, где

$$B = \mathbb{C}_\omega \setminus \{\omega :\ \mathrm{Im}\ \omega = 0,\ 1/4 \leqslant \mathrm{Re}\ \omega \leqslant +\infty\}, \quad E = [k(\zeta_1), k(\zeta_2)]$$

и $\omega = k(\zeta)$ – функция Кебе. Обозначим через $\mathscr{C} = (\mathscr{B}, \mathscr{E})$ образ конденсатора C при отображении $f \circ k^{-1}$, рассматриваемый на римановой поверхности $\mathscr{R}(f)$. Ввиду конформной инвариантности емкости

$$\mathrm{cap}\ C = \mathrm{cap}\mathscr{C}.$$

Так как функция f имеет пояс лемнискат второго рода $L_f(1,\tau)$, то поверхность $\mathscr{R}(f)$ принадлежит классу $\mathfrak{R}_p(\tau)$. Кроме того, множество $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{B}$ принадлежит открытому множеству $\mathscr{B}^*$, полученному из поверхности $\mathscr{R}(F)$ удалением отрезка на листе $\mathscr{D}_p$ с проекцией $[(-1)^p\tau, (-1)^p]$. Поскольку континуум $\mathscr{E}$ соединяет точки $f(\zeta_1)$ и $f(\zeta_2)$, то компакт $\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{E}$ содержит отрезок $\mathscr{E}^*$ на листе $\mathscr{D}_1$ поверхности $\mathscr{R}(F)$ с проекцией $[|f(\zeta_1)|, |f(\zeta_2)|]$ $([|f(\zeta_2)|, |f(\zeta_1)|])$. Учитывая монотонность емкости и утверждение 2 имеем

$$\mathrm{cap}\mathscr{C} \geqslant \mathrm{cap}\mathrm{Sym}_\tau\mathscr{C} \geqslant \mathrm{cap}(\mathscr{B}^*, \mathscr{E}^*).$$

Пусть $C^* = (B^*, E^*)$ есть образ конденсатора $(\mathscr{B}^*, \mathscr{E}^*)$ при отображении F^{-1}, рассматриваемый в z-плоскости. Множество B^* является дополнением множества $\{z : z^2 \in [1/k^2, +\infty]\}$, а множество E^* – отрезок, соединяющий точки $\beta(f(\zeta_1))$ и $\beta(f(\zeta_2))$. Суммируя выписанные соотношения и учитывая конформную инвариантность емкости, заключаем

$$\mathrm{cap}\ C \geqslant \mathrm{cap}\ C^*.$$

Отсюда следует неравенство

$$-(k(\zeta_2), \infty, k(\zeta_1), 1/4) \geqslant |(\beta(f(\zeta_2)), -1/k, \beta(f(\zeta_1)), 1/k)| \qquad (10)$$

(см. неравенство (4) и последующие рассуждения в доказательстве теоремы 1). Неравенство (10) совпадает с (8). Утверждение о знаке равенства в (8) вытекает из того факта, что в указанном случае во всех, приведенных выше емкостных соотношениях и в (10) имеет место знак равенства. Теорема доказана. □

Следствие 5. *Пусть f – мероморфная с.т.р-листная в круге U_ζ функция с поясом лемнискат второго рода $L_f(1,\tau)$, и пусть $f(0) = 0$. Тогда*

$$|f'(0)| \leqslant \frac{2(1-k^2\beta^2)|F'(\beta)|}{k}.$$

Равенство имеет место для функции (9).

Доказательство. Достаточно положить в теореме 3 $\zeta_1 = 0$ и устремить ζ_2 к нулю. □

Заметим, что если f – мероморфная *с.т.р*-листная в круге U_ζ функция с поясом лемнискат второго рода $L_f(1,\tau)$, то функция $f \circ \varphi$ также обладает этим свойством для любого дробно-линейного автоморфизма φ круга U_ζ. Поэтому из теоремы 3 вытекает оценка для любых точек $\zeta_1, \zeta_2 \in U_\zeta$, не обязательно лежащих на вещественной оси.

Литература

1. W. K. Hayman, *Research Problems in Function Theory.* The Athlone Press University of London, London, 1967.
2. P. Erdos, *Some of My Favorite Unsolved Problems.* A Tribute to Paul Erdos, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
3. A. Eremenko, L. Lempert, *An extremal problem for polynomials.* — Proc. Amer. Math. Soc. **122**, No. 1 (1994), 191–193.
4. A. Eremenko, *A Markov-type inequality for arbitrary plane continua.* — Proc. Amer. Math. Soc. **135**, No. 5 (2007), 1505-1510.
5. В. Н. Дубинин, *Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов.* — Докл. РАН **451**, No. 5 (2013), 495–497.
6. V. Dubinin, *Four-point distortion theorem for complex polynomials.* — Complex Variables and Elliptic Equations **59**, No. 1 (2014), 59–66.
7. В. Н. Дубинин, *Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения.* – Сиб. мат. ж. **55**, No. 1 (2014), 79–89.
8. В. Н. Дубинин, *Критические значения и модули производной в нулях комплексного полинома.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **449** (2016), 60–68.

9. В. Н. Дубинин, *Экстремальная задача для производной рациональной функции.* — Мат. заметки **100**, No. 5 (2016), 732–738.
10. В. Н. Дубинин, *О логарифмической энергии нулей и полюсов рациональной функции.* — Сиб. мат. ж. **57**, No. 6 (2016), 1255–1261.
11. В. Н. Дубинин, *Новая версия круговой симметризации с приложениями к p-листным функциям.* — Мат. сб. **203**, No. 7 (2012), 79–94.
12. В.Н. Дубинин, *Круговая симметризация конденсаторов на римановых поверхностях.* — Мат. сб. **206**, No. 1 (2015), 69–96.
13. В. Н. Дубинин, А. С. Афанасьева–Григорьева, *О лемнискатах рациональных функций.* — Дальневосточный мат. ж. **17**, No. 2 (2017), (в печати).
14. В. Н. Дубинин, *Симметризация конденсаторов и неравенства для многолистных в круге функций.* — Мат. заметки **94**, No. 6 (2013), 846-856.
15. В. Н. Дубинин, *Теоремы искажения для функций, p -листных в среднем по окружности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **440** (2015), 43–56.
16. В. Н. Дубинин, *Неравенства для модулей функций, p-листных в среднем по окружности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **429** (2014), 44–54.
17. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций.* М., Наука, 1970.
18. А. Б. Богатырев, *Чебышёвское представление рациональных функций.* – Мат. сб. **201**, No. 11 (2010), 19–40.
19. A.B. Bogatyrev, *How Many Zolotarev Fractions are There?*, arXiv:1511.05346 (2015).
20. М. М. Гхашим, В. Н. Малоземов, Г. Ш. Тамасян, *Дроби Золотарева. Семинар по конструктивному негладкому анализу и недифференцируемой оптимизации “CNSA&NDO”.* http://www.apmath.spbu.ru/cnsa/ (2016).
21. А. Гурвиц, Р. Курант, *Теория функций*, М., 1968.

Dubinin V. N. Lemniscate zone and distortion theorems for multivalent functions.

The impact of the connectivity of some lemniscates of the multivalent function on the absolute value of this function or its derivative is considered.

Дальневосточный федеральный
университет, ул. Суханова 8,
Владивосток, Россия
Институт прикладной математики
ДВО РАН, ул. Радио 7,
Владивосток, Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 3 июля 2017 г.