Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

Е. П. Голубева

АЛЬТЕРНИРОВАННЫЕ СУММЫ ЭЛЕМЕНТОВ НЕПРЕРЫВНЫХ ДРОБЕЙ И ФУНКЦИЯ МИНКОВСКОГО $?(t)$

В настоящей работе мы вводим и исследуем функцию $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, связанную с распределением альтернированных сумм элементов разложения вещественного числа t в непрерывную дробь.

Альтернированные суммы представляют интерес, поскольку для рациональных чисел их значения связаны с числами классов мнимых квадратичных полей [1–3].

Функция $A(t)$ строится исходя из дерева Фарея и аналогична функции Минковского $?(t)$ и другим родственным функциям (см. [4–7]). Она имеет сходные свойства: непрерывна, удовлетворяет похожим функциональным уравнениям, $A'(t) = 0$ для почти всех t по мере Лебега. Основное отличие функции $A(t)$ от $?(t)$ состоит в том, что она не является монотонно возрастающей. Более того, она имеет острый экстремум на любом промежутке из [0,1]. Рациональные числа записываются в виде непрерывной дроби в двух различных формах:

$$r = [0, k_1, \dots, k_l] = [0, k_1, \dots, k_l - 1, 1],$$

где $k_l \geqslant 2$. Это обстоятельство не имеет значения при определении функции Минковского и при вычислении альтернированных сумм в работах [1–3], но является существенным при построении функции $A(t)$.

Мы выбираем ту запись, при которой длина разложения является четной, поскольку именно в этом случае $A(t)$ имеет хорошие свойства (функциональные уравнения и др.). Через W_n мы обозначаем множество рациональных чисел уровня n в дереве Фарея:

$$W_n = \{r : r = [0, k_1, \dots, k_l],\ k_l \geqslant 2, k_1 + \dots + k_l = n\}.$$

Как известно, $|W_n| = 2^{n-1}$.

Доказательство всех основных и вспомогательных фактов, приведенных ниже, проводится прямыми вычислениями, которые иногда

Ключевые слова: непрерывные дроби, функция Минковского.

являются очень громоздкими, поскольку связаны с рассмотрением большого числа частных случаев.

Определение 1. *Пусть r – рациональное, $0 < r < 1$ и $r = [0, k_1, \dots, k_l] = [0, k_1, \dots, k_l - 1, 1]$, где $k_l \geqslant 2$. Альтернированной суммой элементов k_i называется число*

$$a(r) = \begin{cases} k_1 - k_2 + \dots - k_l, & \text{если } \ l\text{– четное;} \\ k_1 - k_2 + \dots - k_l - 2, & \text{если } \ l\text{– нечетное.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть $r_0 \in W_n$ и r_1, r_2 – узлы в W_{n+1}, порожденные r_0. Тогда $a(r_1) + a(r_2) = 2a(r_0)$.*

Лемма 2. *Для всех рациональных чисел r имеем $a(1 - r) = -a(r)$.*

Определение 2. *Пусть $0 < t < 1$ – рациональное число. Через $A(t)$ мы обозначаем функцию*

$$A(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|W_n|} \sum_{\substack{r\in W_n \\ r\leqslant t}} a(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{r\in W_n \\ r\leqslant t}} a(r).$$

Замечание 1. Позже мы докажем, что предел существует для всех t.

Лемма 3. *Пусть $r_0 \in W_n$ и $A_n(t) = \frac{1}{|W_n|} \sum\limits_{\substack{r\in W_n \\ r\leqslant t}} a(t)$, тогда*

$$A(r_0) = A_{n+1}(r_1) = A_{n+2}(r_0) = A_{n+3}(r_0) = \dots,$$

где $r_1 < r_0$, $r_1 \in W_{n+1}$ порождается r_0.

Следствие 1. *Для всех рациональных t предел в определении $A(t)$ существует.*

Лемма 4. *Пусть $r_0 = [0, k_1, \dots, k_l] \in W_n$ и $r_1 < r_0 < r_2$ – узлы в W_{n+1}, порожденные r_0. Тогда*

$$A(r_1) = A(r_0) - \frac{a(r_0)}{2^{n+1}}; \quad A(r_2) = A(r_0) + \frac{a(r_0)}{2^{n+1}}.$$

Доказательство опирается на лемму 3. В следующей лемме мы получаем явное выражение для $A(t)$.

Лемма 5. *Пусть $r = [0, k_1, \dots, k_l]$, тогда*

$$A(r) = \frac{a(r_1) + 1}{2^{k_1 - 1}} - \frac{a(r_2) - 1}{2^{k_1 + k_2 - 1}} + \frac{a(r_3) + 1}{2^{k_1 + k_2 + k_3 - 1}} - \dots + (-1)^{l+1} \frac{a(r_l) + (-1)^{l+1}}{2^{k_1 + k_2 + \dots + k_{l-1}}},$$

где $0 < r_i < 1$, $r_i = [0, k_1, \dots, k_i]$.

Основную роль в доказательстве играет лемма 4.

Определение 3. *Для любого вещественного* t *мы задаем функцию* $A(t)$ *с помощью сходящегося ряда: если* $t = [0, k_1, \dots, k_l, \dots]$, *то*

$$A(t) = \frac{a(r_1)+1}{2^{k_1}} - \frac{a(r_2)-1}{2^{k_1+k_2-1}} + \dots + (-1)^{l+1}\frac{a(r_l)+(-1)^{l+1}}{2^{k_1+\dots+k_l-1}} + \dots, \quad (1)$$

где r_i *обозначает то же, что и в лемме* 5.

Перейдем к перечислению свойств $A(t)$.

Лемма 6. *Функция* $A(t)$ *непрерывна на* $[0,1]$ *и удовлетворяет условию* $0 \leqslant A(t) \leqslant 2$.

Замечание 2. Легко показать, что $A(t) > 0$ при $t \neq 0$ и $t \neq 1$. Можно предположить, что максимальное значение $A(t) = 2/3$ и достигается в точках $t = 2/(1+\sqrt{5})$ и $t = (3-\sqrt{5})/2$.

Лемма 7. *Имеем для всех* t

$$A(1-t) = A(t); \quad A\Big(\frac{1}{1+t}\Big) = \frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}?(t).$$

Замечание 3. Функция $A(t)$ является единственной непрерывной функцией, удовлетворяющей последним соотношениям.

Лемма 8. *Существует (эффективная) постоянная* C *такая, что для всех* t_1, t_2 *выполняется неравенство*

$$|A(t_1) - A(t_2)| < C|?(t_1) - ?(t_2)|\,|\log|?(t_1) - ?(t_2)||.$$

Лемма 9. *Для почти всех* t *по мере Лебега* $A'(t) = 0$.

В доказательстве используется тот факт, что если $?'(t) = 0$, то $A'(t) = 0$.

Лемма 10. *На любом промежутке найдется точка острого экстремума* $A(t)$.

Для доказательства достаточно рассмотреть точки, эквивалентные $2/(1+\sqrt{5})$, которые образуют всюду плотное множество на интервале $[0,1]$.

Перечислим основные свойства функции в теореме.

Теорема 1. *Функция $A(t)$, заданная на промежутке $[0,1]$ рядом (1), обладает следующими свойствами: она непрерывна, положительна, удовлетворяет уравнениям*

$$A(1-t) = A(t), \quad A(\frac{1}{1+t}) = \frac{1}{2}A(t) + \frac{1}{2}?(t), \quad A'(t) = 0$$

для почти всех t по мере Лебега , $A(t)$ имеет хотя бы один острый экстремум на любом промежутке из $[0,1]$.

Литература

1. D. B. Zagier, *Nombre de classes et fractions continues.* — Astérisque **24–25** (1975), 81–97.
2. В. Н. Попов, *Асимптотика суммы сумм элементов непрерывных дробей чисел вида a/p.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 81–93.
3. Е. П. Голубева, *О длинах периодов разложения в непрерывную дробь квадратичных иррациональностей и числах классов вещественных квадратичных полей. II.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1998), 11–22.
4. H. Minkowski, Gesammelte Abhandlungen, Vol.2, 1911, 50–51.
5. A. Denjoy, *Sur une function réelle de Minkowski.* — J. Math. Pures Appl. **17**, No. 2 (1938), 105–151.
6. R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing.* — Trans. Amer. Math. Soc. **53**, No. 3 (1943), 427–439.
7. Е. П. Голубева, *О плоской выпуклой кривой с большим числом целых точек.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 22–32.

Golubeva E. P. Alternating sums of elements of continued fractions and the Minkowski question mark function.

We consider a function $A(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ related to the Minkowski function $?(t)$. $A(t)$ has properties akin to those of $?(t)$ (in particular it satisfies similar functional equations, is continuous and $A'(t) = 0$ almost everywhere with respect to Lebesgue measure). But unlike $?(t)$, the function $A(t)$ is not increasing. In reality it is not monotonic on any subinterval of [0,1].

Государственный университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича
E-mail: elena_golubeva@mail.ru

Поступило 4 сентября 2017 г.