Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 458, 2017 г.

ПАМЯТИ ГАЛИНЫ ВАСИЛЬЕВНЫ КУЗЬМИНОЙ (1929–2017)

21 сентября 2017 года после тяжелой болезни скончалась Галина Васильевна Кузьмина – выдающийся специалист по геометрической теории функций, ведущий научный сотрудник Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии наук, доктор физико-математических наук.

Галина Васильевна была постоянным автором "Записок научных семинаров ЛОМИ (ПОМИ)", редактировала выпуски серии "Аналитическая теория чисел и теория функций". Настоящий сборник и следующий выпуск данной серии посящаются ее памяти.

Галина Васильевна Кузьмина родилась 12 апреля 1929 г. в селе Путилово Мгинского района Ленинградской области. До осени 1942 г. жила в Ленинграде. Отец – инженер, работал в институте "Гипроруда"; мать умерла в Ленинграде в марте 1942 г. Осенью 1942 г. отец, В. Н. Кузьмин, эвакуировался вместе с дочерью в г. Бакал Челябинской области, куда был переведен институт "Гипроруда". Затем отец работал в г. Асбест Свердловской области и в г. Боровичи Новгородской области. И все это время Галя Кузьмина была рядом с отцом. В 1944 она окончила неполную среднюю школу. Весной 1945 г. отец и дочь вернулись в Ленинград, где в 1947 г. Г. В. получила аттестат зрелости и в этом же году поступила на первый курс математико-механического факультута ЛГУ.

В университете в течение ряда лет работал основатель отечественой школы по геометрической теории функций (ГТФ) Г. М. Голузин. Он вел основной и ряд спецкурсов, руководил семинаром по ГТФ, написал классический труд "Геометрическая теория функций комплексного переменного" (опубликован в 1952), настольную книгу современных аналитиков. Все это сыграло большую роль в творческой судьбе Г. В. Она посвятила жизни и творчеству Г. М. Голузина три статьи. В одной из них (Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 5–10) приводится интересный эпизод из студенческой жизни Г. В.:

"Помню, как Геннадий Михайлович поручил мне рассказать на студенческом семинаре доказательство теоремы Лаврентьева–Шепелева–Ренгеля о $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$ методом полос, приведенное в его обзорной статье 1939 года (...). Некоторые моменты доказательства сначала не были мне понятны. Геннадий Михайлович сразу понял показанный ему рисунок.

"У Вас очень сложно, — сказал он мне. Эти куски просто не нужно рассматривать." (Речь шла о частях области, отсекаемых прямолинейными отрезками.) Геометрическое доказатеьлство теоремы о $\sqrt[n]{\frac{1}{4}}$, предложенное Г. М. Голузиным, прекрасно иллюстрирует основные идеи метода полос Грётша. Впоследствии оно служило мне примером, помогающим понимать геометрический смысл ряда доказательств методом экстремальной метрики".

Отметим связь этого эпизода с будущим творчеством Г. В. Кузьминой – ведь базисом метода экстремальной метрики является (через реализацию принципа Тейхмюллера) метод полос Грётша, а разработке метода экстремальной метрики (в форме метода модулей семейств кривых) Галина Васильевна отдала много сил.

Но это в будущем. А в 1952 г. Галина Васильевна закончила университет. В этом же году умирает Г. М. Голузин, Г. В. Кузьмину направляют на работу в ЛОМИ в лабораторию Л. В. Канторовича. Там она со временем подготовила статью (опубликованную в "Трудах МИАН"), но защищать кандидатскую диссертацию не стала. Видя склонность Галины Васильевны к ГТФ, Л. В. Канторович не препятствует ее уходу из лаборатории.

После смерти Г. М. Голузина Ленинградским семинаром по ГТФ стал руководить известный математик Н. А. Лебедев, с которым у Г. В. Кузьминой со временем возникли тесные научные связи. Благодаря их совместным усилиям в 1966 г. вышло 2-ое издание монографии Г. М. Голузина, дополненное оригинальными работами Г. М. и обширным обзором по современному состоянию ГТФ. О роли Ленинградского семинара, которым Н. А. Лебедев руководил 30 лет до конца своей жизни, Галина Васильевна вместе с коллегами написала в статье, посвященной Н. А. Лебедеву и Ленинградской школе теории функций (50–70 гг.) (Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 5–19).

В 1958 г. вышли две монографии по ГТФ (Дженкинса и Хеймана), имевшие большое значение для специалистов в приобщении к новым методам – методу экстремальной метрики и методу симметризации соответственно. Книгу Дженкинса Галина Васильевна особенно ценила и, хотя начало было положено Дженкинсом, именно в работах Галины Васильевны и ее учеников (Е. Г. Емельянов, В. О. Кузнецов, А. Ю. Солынин, С. И. Федоров) метод экстремальной метрики получил большое развитие.

Кандидатскую диссертацию Галина Васильевна защитила довольно поздно, докторскую – сразу после кандидатской. Докторская диссертация была издана в виде монографии (Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Труды Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **139** (1980), 1–243). Её стали изучать в различных математических центрах по ГТФ (Краснодаре, Донецке, Киеве), интерес к методу экстремальной метрики возрос. В самой диссертации, помимо ясного изложения метода на современном уровне, были даны его приложения – решены крупные проблемы ГТФ. Ограничимся одним примером (второй пример – решение знаменитой проблемы Тейхмюллера – излагается ниже). Хорошо известна задача о максимуме n-го диаметра $d_n(E)$ в семействе всех континуумов E на $\mathbb{C}$ единичной емкости. Ранее проблема была решена для $n = 2$ (Фабер) и для $n = 3$ (Г. М. Голузин). Галине Васильевне удалось полностью решить проблему для $n = 4$. Был найден экстремальный континуум. В доказательстве использовались различные методы исследования.

Этот и другие результаты Галины Васильевны подчеркивают, что она была достойным учеником Г. М. Голузина, которого интересовали крупные проблемы ГТФ: задача о максимуме n-го диаметра, играющая большую роль в теории емкости плоских множеств; задача о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей; проблема Чеботарева о континууме наименьшей емкости; теоремы искажения. Галина Васильевна занималась как перечисленными, так и другими трудными задачами[1], однако при решении применяла иные методы ГТФ.

Укажем еще на одну замечательную работу Галины Васильевны, примыкающую к ее монографии (Г. В. Кузьмина, К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. — Зап. научн. семинаров ЛОМИ **100** (1980), 131–145).

Пусть c_k, $k = 1, \dots, 4$, – произвольные различные точки $\mathbb{C}$. Пусть $\mathcal{D}$ – семейство всех систем односвязных областей $\{D_k\}$ на $\overline{\mathbb{C}}$, $c_k \in D_k$, $D_k \cap D_l = \varnothing$, k, $l = 1, \dots, 4$. Через $R(D_k, c_k)$ обозначаем конформный радиус области D_k относительно точки c_k. Доказано, что в семействе

[1] Об этом уже на защите ее кандидатской диссертации говорил Н. А. Лебедев.

$\mathcal{D}$ справедливо точное неравенство

$$\prod_{k=1}^{4} R(D_k, c_k)\Big\{\prod_{1\leqslant k<l\leqslant 4} |c_k - c_l|\Big\}^{-2/3} \\ \leqslant 4^{-10/3}|1-a^2|^{4/3}\mathrm{cap}^{-4}E(-1,1,a), \qquad (1)$$

где $a = (\lambda+1)/(\lambda-1)$, λ – ангармоническое отношение точек c_1, c_2, c_3, c_4, $E(-1,1,a)$ – континуум наименьшей емкости, содержащий точки -1, 1, 0 (явное выражение для $\mathrm{cap}E(-1,1,a)$ Г. В. нашла в работе 1968 г.). На основании известных свойств континуумов наименьшей емкости показывается, что наибольшее значение правой части (1) достигается при $a = \pm i\sqrt{3}$ и равно $4^{-8/3}\cdot 3^2$. Указаны все конфигурации, для которых в полученных оценках реализуются знаки равенства.

Случаи $n = 2$ и $n = 3$ изучали М. А. Лаврентьев, Г. М. Голузин, Л. И. Колбина, Дж. Дженкинс.

Другая важная работа Г. В. (Г. В. Кузьмина, Задача об экстремальном разбиении римановой сферы. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 253–275) посвящена классической задаче о максимуме конформного инварианта $J(a_1,\dots,a_n)$. Раньше исследовались случаи $n = 3$ (Г. М. Голузин), $n = 4$ (Г. В. Кузьмина, С. И. Федоров). Случай $n = 5$ при дополнительном предположении трактовали Галина Васильевна и В. Н. Дубинин. В общем случае для $n = 5$ задача была полностью решена Галиной Васильевной:

Справедливо равенство

$$J(a_1,\dots,a_5) = 4^{11/3}\cdot 3^{-3/4}\cdot 5^{-25/6}.$$

Этот максимум достигается в том случае, когда

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\} = \{1, e^{-2\pi i/3}, 0, e^{2\pi i/3}, \infty\},$$

а областями D_k, $k = 1,\dots,5$, служат круговые области квадратичного дифференциала

$$\frac{z^6+7z^3+1}{z^2(z^3-1)^2}\,dz^2.$$

Каждая другая экстремальная конфигурация получется из указанной при дробно-линейном автоморфизме $\overline{\mathbb{C}}$.

Трудно охватить в короткой статье все основные результаты Г. В. Кузьминой. К счастью, существует недавний обзор, который Г. В. Кузьмина посвятила памяти Дженкинса (G. V. Kuz'mina, Geometric function theory. Jenkins' results. The method of modules of curve families. — Зап. научн. семин. ПОМИ **445** (2016), 181–249). В нем излагаются результаты Дженкинса, самой Г. В. и других специалистов по методу экстремальной метрики. Подчеркнута, в частности, роль советских (российских) исследователей, активность ее учеников (в особенности, Е. Г. Емельянова и А. Ю. Солынина). В результате, Г. В. прихоит к выводу (с. 185 обзора): "В настоящее время метод экстремальной метрики является главным методом в ГТФ".

Ранее Галина Васильевна написала еще один ценный обзор "Методы геометрической теории функций", опубликованный в 1997 г. в журнале "Алгебра и анализ". В нем она отразила и свой вклад в ГТФ.

Боевой дух и упорство в достижении результата, свойственные многим корифеям математики, в полной мере были присущи и Галине Васильевне.

Вспоминается сравнительно недавний случай. Финский математик Матти Вуоринен на протяжении ряда лет предлагал разным специалистам решить следующую проблему: найти максимум конформного модуля в семействе всех двусвязных областей в единичном круге, отделяющих две точки этого круга от его третьей точки и единичной окружности. Никакого отклика не было, пока Вуоринен не обратился к Галине Васильевне, которая заметила, что эта проблема связана с проблемой Тейхмюллера о максимуму конформного модуля в семействе всех двусвязных областей на z-сфере, отделяющих заданную пару точек этой сферы. Проблемой Тейхмюллера занимались крупные математики (М. Шиффер, З. Нехари, Л. Альфорс, Х. Виттих), но полное решение дала Г. В. Кузьмина в упомянутой выше монографии 1980 г. Что касается проблемы Вуоринена, Г. В. быстро взялась за дело, подключила к работе своего ученика Е. Г. Емельянова, и они справились с задачей (см. E. G. Emel'yanov, G. V. Kuz'mina, The Vuorinen problem on the maximum of the conformal module. — Зап. научн. семин. ПОМИ **404** (2012), 120–134).

После смерти Н. А. Лебедева в 1982 г. руководить Ленинградским семинаром по ГТФ стала Галина Васильевна.

Весной 1984 г. на семинаре с докладами о доказательстве гипотезы Бибербаха выступал американский математик де Бранж. Приезд де Бранжа был встречен с некоторым скепсисом и сомнениями (как проверить доказательство, уместившееся на 385 страницах машинописного текста?). Однако в результате контактов де Бранжа с членами семинара была получена "классическая версия доказательства де

Бранжа" (термин был введен Г. В.) и стало ясно, что гипотеза Бибербаха доказана.

История проверки доказательства де Бранжа излагалась Галиной Васильевной несколько раз. Например, имеется статья (O. M. Fomenko, G. V. Kuz'mina, *The last 100 days of the Bieberbach conjecture.* — Math. Intelligencer **8**, No. 1 (1986), 40–47), благодаря которой "классическая версия" приобрела известность. Кстати, в указанной статье (на 8 страницах) дается полное изложение "классической версии".

В этой истории Галина Васильевна Кузьмина и члены семинара показали свой высокий профессионализм и максимальную корректность.

Много труда вложила Галина Васильевна в редактирование сборников серии: Аналитическая теория чисел и теория функций (Зап. научн. семин. ЛОМИ (ПОМИ)), вып. 1, 3–33. Она была идеальным редактором – требовательным, но доброжелательным, всегда готовым помочь автору. Пользуясь большим авторитетом в математическом мире, она сумела привлечь в качестве авторов сборников выдающихся специалистов как по теории функций, так и по теории чисел.

О. М. Фоменко