Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 457, 2017 г.

**И. А. Ибрагимов**

# ОБ ОЦЕНКЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОТ ПАРАМЕТРА, НАБЛЮДАЕМОГО В ГАУССОВСКОМ ШУМЕ

## §1. Введение. Основной результат

**1.1.** Рассмотрим следующую общую задачу статистического оценивания. Имеется статистический эксперимент $\{\mathcal{X}, \mathfrak{A}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\}\}$, порожденный наблюдением $X_\varepsilon$ (см. [5]). Пусть далее на параметрическом множестве $\Theta$ определена функция $F(\theta)$, принимающая значения в некотором множестве $U$. Статистическая задача заключается в том, чтобы оценить значение $F(\theta)$ известной функции $F$ в неизвестной точке $\theta$ по наблюдению $X_\varepsilon$. Заметим, что это весьма общая проблема, включающую в себя задачу оценки параметра $\theta$, достаточно положить $F(\theta) = \theta$. Задачи семи-параметрического оценивания (см. [3]) тоже включаются в эту общую схему.

Для определенности ниже мы будем рассматривать задачу оценки сигнала наблюдаемого в гауссовском белом шуме: наблюдение есть гауссовский процесс $X_\varepsilon(t)$ такой, что

$$dX_\varepsilon(t) = s(t,\theta)\,dt + \varepsilon\,dw(t), \quad t \in [a,b], \tag{1.1}$$

$s$ – известная функция, неизвестный параметр $\theta$ принадлежит известному множеству $\Theta$, $\varepsilon$ известный малый параметр, и нас интересует поведение статистических процедур при $\varepsilon \to 0$ (см. [5]). В отличие от классических задач теории оценивания мы не требуем, чтобы $\Theta \subseteq R^d$. На самом деле, если множество $\Theta$ конечномерно, $\Theta \subseteq R^d$, поставленная выше задача не очень интересна. Пусть, например, эксперимент (1.1) регулярен (см. [5]) и имеет информационную матрицу $I(\theta)$. Обозначим $\widehat{\theta}_\varepsilon$ оценку максимального правдоподобия для $\theta$; в широких предположениях нормированная разность $\varepsilon^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ асимптотически нормальна со средним нуль и корреляционной матрицей $I^{-1}(\theta)$ (см. [5]).

---

*Ключевые слова*: непараметрическая задача оценивания, оценка значения функции, пространства с воспроизводящим ядром.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 17-01-00828.

Предположим, что функция $F : \Theta \to R^d$, и выберем в качестве оценки для $F(\theta)$ статистику $F_\varepsilon = F(\widehat{\theta}_\varepsilon)$. Из равенства

$$F_\varepsilon - F(\theta) = F'(\theta)(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) + o(|\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta|)$$

следует, что разность $\varepsilon^{-1}(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta)$ асимптотически нормальна со средним нуль и корреляционной матрицей $F'(\theta)I^{-1}(\theta)(F'(\theta))^*$, в частности,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} E_\theta |F_\varepsilon - F(\theta)|^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{F}'(\theta)\mathrm{I}^{-1}(\theta)(\mathrm{F}'(\theta))^*). \tag{1.2}$$

Нетрудно видеть, что оценка $F_\varepsilon$ асимптотически эффективна в смысле понятий из [5].

Ситуация сильно меняется, если множество $\Theta$ бесконечномерно. Рассмотрим два следующих примера. В обоих этих примерах наблюдение $X_\varepsilon(t)$ задается соотношением

$$dX_\varepsilon(t) = \theta(t)dt + \varepsilon dw(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.3}$$

а неизвестный параметр $\theta \in \Theta \subseteq L_2(0,1$. В обоих примерах $\Theta$ есть единичный шар в $L_2(0,1)$ с центром в нуле. В этом случае равномерно состоятельное в $\Theta$ оценивание $\theta$ невозможно.

**Пример 1.1.** Пусть $F$ есть линейная функция $\theta$, $F(\theta) = \int_0^1 l(t)\theta(t)dt$. Хотя хороших оценок $\theta$ не существует, $F(\theta)$ прекрасно оценивается. Если в качестве такой оценки выбрать $F_\varepsilon = \int_0^1 l(t)dX_\varepsilon(t)$, то нормированная разность

$$\varepsilon^{-1}(F_\varepsilon - F(\theta)) = \int_0^1 l(t)dw(t)$$

и

$$\varepsilon^{-2}E_\theta|F_\varepsilon - F(\theta)|^2 = \int_0^1 |l(t)|^2 dt = \|l\|^2.$$

**Пример 1.2.** Пусть $F(\theta) = \int_0^1 |\theta(t)|^2 dt = \|\theta\|^2$ есть квадратичный функционал. В этом случае состоятельное оценивание $F(\theta)$ вообще невозможно; состоятельных оценок для $F(\theta)$ не существует даже если $\Theta = \{\theta : \|\theta\| = 1|\} \cup \{\theta = 0\}$ (в этом последнем случае $F$ принимает вообще лишь два значения, 0 и 1).

Оказывается, возможность асимптотически эффективного оценивания $\mathbf{F}(\theta)$ определяется соотношением между двумя факторами: гладкостью $F$ и возможностью хорошего приближения $\Theta$ конечномерными линейными многообразиями. Соответствующая теория была развита в работах [4,7]; изложению этих результатов посвящена также часть лекций А. Немировского [9]. В следующем пункте мы напомним один из результатов этих работ.

**1.2.** Для формулировки вышеупомянутого результата нам понадобится одна характеристика точности аппроксимации подмножеств нормированного пространства $n$-мерными линейными многообразиями, $n$-поперечники, см., например, [10]. Напомним определение этого понятия.

Пусть $B$ – нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|, \Theta$ – подмножество $B$, $n$-мерным поперечником $d_n(\Theta)$ множества $\Theta$ называется величина его наилучшего приближения $n$-мерными линейными многообразиями из $B$, т. е.

$$d_n(\Theta) = \inf_{M_n} \sup_{\theta\in\Theta} \inf_{x\in M_n} \|\theta - x\|,$$

нижняя грань берется по всем $n$-мерным линейным многообразиям пространства $B$.

Приведем теперь один результат из упомянутых выше работ Ибрагимова, Немировского, Хасьминского. Ниже наблюдение определяется соотношением (1.3), а функция $F$ предполагается вещественнозначной.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполнены следующие два условия.*

I. *Параметрическое множество* $\Theta \subseteq O_1 = \{h \in L_2(0,1) : \|h\| \leqslant 1\}$, *и поперечники* $d_n(\Theta)$ *множества* $\Theta$ *удовлетворяют неравенствам*

$$d_n(\Theta) \leqslant Ln^{-\beta}, \tag{1.4}$$

$L$, $\beta$ *– заданные положительные числа.*

II. *Функция* $F(\theta)$ *определена и дифференцируема по Фреше в шаре* $O_r = \{h : \|h\| \leqslant r\}, r > 1$. *Производная* $F'(h)$ *удовлетворяет в* $O_r$ *условию Гельдера порядка* $\gamma$,

$$\|F;(h_1) - F'(h_2)\| \leqslant M\|h_1 - h_2\|^\gamma, \quad h_1, h_2 \in O_r,$$

$M$, $\gamma$ *– заданные полжительные числа.*

*Если показатели $\beta, \gamma$ удовлетворяют неравенству*

$$2\gamma\beta > 1, \tag{1.5}$$

*то существуют оценки $F_\varepsilon$ для $F(\theta)$ такие, что при $\varepsilon \to 0$ нормированная разность $\varepsilon^{-1}(F_\varepsilon - F(\theta))$ асимптотически нормальна со средним нуль и дисперсией $\|F'(\theta)\|^2$. При этом*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} E_\theta |F_\varepsilon - F(\theta)|^2 = \|F'(\theta)\|^2 \tag{1.6}$$

*равномерно в $\Theta$.*

Немировский, см. [9], показал, что условия теоремы, в частности, соотношение (1.5), вообще говоря, нельзя улучшить.

**1.3.** Условие I теоремы означает, что множество $\Theta$ хорошо приближается конечномерными подпространствами и его замыкание компактно в $L_2(0,1)$. Цель этой работы – указать классы параметрических множеств $\Theta$, для которых все поперечники Колмогорова $d_n(\Theta) > m > 0$, и для которых, однако, гладкие функции $F(\theta)$ по-прежнему допускают хорошие оценки.

Начиная с этого места, мы будем рассматривать наблюдения $X_\varepsilon(t)$, определенные равенством

$$dX_\varepsilon(t) = \theta(t)\,dt + \varepsilon\sigma(t)\,dw(t), \quad t \in (-\infty, \infty), \tag{1.7}$$

малый параметр $\varepsilon$ предполагается известным, детерминированная функция $\sigma$ такова, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(t)dt \leqslant M < \infty$. Неизвестный параметр $\theta \in \Theta \subseteq L_2(-\infty,\infty)$, множество $\Theta$ предполагается известным.

Подпространство $X \subseteq L_2(-\infty,\infty)$ обладает воспроизводящим ядром $K(t,s)$, если

1. для любого $s \in (-\infty,\infty)\, K(\,\cdot\,,s) \in X$;
2. если $f \in X$, то

$$(f(\,\cdot\,), K(\,\cdot\,,s)) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)K(t,s)\,dt = f(s).$$

Относительно пространств с воспроизводящим ядром см. [1, 8].

Ниже вместо аппроксимации $\Theta$ конечномерными подпространствами мы будем рассматривать аппроксимацию $\Theta$ подпространствами с воспроизводящим ядром $K(t,s)$ ограниченным на диагонали,

$K(t,t) \leqslant T < \infty$. Конечно, все $n$-мерные подпространства являются подпространствами с воспроизводящим ядром $K(t,s)$, причем $\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,t)dt = n$.

Положим

$$r_T(\Theta) = \inf_{H_T} \sup_{\theta\in\Theta} \inf_{h\in H_T} \|\theta - h\| = \inf_{H_T} \mathrm{dist}(\Theta, \mathrm{H_T}),$$

нижняя грань берется по всем подпространствам $H_T$ с воспроизводящим ядром $K(t,s)$ таким, что $K(t,t) \leqslant T$.

**Пример 1.3.** Функции $g \in L_2(-\infty,\infty)$, преобразование Фурье которых обращается в нуль вне интервала $[-T,T]$, образуют подпространство с воспроизводящим ядром $K(t,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin T(t-s)}{t-s}$. В силу теоремы Пэли–Винера это подпространство состоит из всех интегрируемых с квадратом целых аналитических функций экспоненциального типа степени не выше $T$.

Аналог теоремы 1.1 выглядит следующим образом.

**Теорема 1.2.** *Пусть в схеме наблюдений* (1.7) *выполнены следующие три условия.*

I. *Параметрическое множество* $\Theta \subseteq O_1 = \{h \in L_2(0,1) : \|h\| \leqslant 1\}$, *и коэффициенты* $r_T(\Theta)$ *множества* $\Theta$ *удовлетворяют неравенствам*

$$r_T(\Theta) \leqslant LT^{-\beta}, \tag{1.8}$$

$L$, $\beta$ *– заданные положительные числа.*

II. *Функция* $F : L_2 \to U$, $U$ *– гильбертово пространство, определена и дифференцируема по Фреше в шаре* $O_r = \{h : \|h\| \leqslant r\}, r > 1$. *Производная* $F'(h)$ *удовлетворяет в* $O_r$ *условию Гельдера порядка* $\gamma$,

$$\|F'(h_1) - F'(h_2)\| \leqslant M\|h_1 - h_2\|^\gamma,\ h_1, h_2 \in O_r.$$

III. *Нормы Гильберта–Шмидта операторов* $F'(h)$ *равномерно ограничены в* $O_r$ *и операторная функция* $F'(h)$ *равномерно непрерывна в* $O_r$ *по норме Гильберта–Шмидта.*

*Тогда существуют оценки* $F_\varepsilon$ *функции* $F(\theta)$ *такие, что*

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-2} E_\theta |F_\varepsilon - F(\theta)|^2 \leqslant \sup_t \sigma(t) \|F'(\theta)\|_2^2. \tag{1.9}$$

*Здесь* $\|A\|_2$ *обозначает норму Гильберта–Шмидта линейного оператора* $A : L_2 \to U$.

## §2. Доказательство основного результата

**2.1.** В этом пункте мы построим оценки для $\theta$, использующие условие I. Обозначим $\widehat{\theta}_T$ оценки, определяемые следующим образом. Пусть $H$ подпространство с воспроизводящим ядром $K(t,s)$, $K(t,t) \leqslant T$, для которого $\mathrm{dist(H,\Theta)} \leqslant \sqrt{2}\mathrm{r_T}(\Theta)$. Положим

$$\widehat{\theta}_T = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)dX_\varepsilon(s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\theta(s)ds + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\sigma(s)dw(s). \tag{2.1}$$

Первый интеграл справа есть проекция $\theta_T$ функции $\theta$ на $H$. Поэтому

$$E_\theta\|\widehat{\theta}_T - \theta\|^2 = \|\theta_T - \theta\|^2 + \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(s)K(s,s)ds \leqslant 2r_t^2(\Theta) + T\varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(s)ds.$$

В частности, если $\Theta$ удовлетворяет условию I теоремы, то, полагая $T = T(\varepsilon) = \varepsilon^{-\frac{2}{2\beta+1}}$, $\widehat{\theta}_{T(\varepsilon)} = \widehat{\theta}_\varepsilon$, найдем, что для всех $p \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$E_\theta\|\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta\|^p \leqslant c\varepsilon^{\frac{2p\beta}{2\beta+1}}. \tag{2.2}$$

Постоянная $c$ зависит от $L, p$ и величины интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(s)ds$.

Заметим еще, что если $\Theta \subseteq H$, а $H$ есть пространство с воспроизводящим ядром $K(t,s)$, $\sup_s K(s,s) = T < \infty$, то $\theta_T = \theta$ и

$$E_\theta\|\theta_\varepsilon - \theta\|^2 \leqslant cT\epsilon^2.$$

Здесь и ниже через $C, c$ мы обозначаем константы, причем не обязательно одни и те же.

Таким образом, хотя $\Theta$ может вообще не допускать конечномерных приближений, асимптотическое поведение оценок $\theta_\varepsilon$ такое же, как если бы множество $\Theta$ имело размерность $T$ (ср. [6]).

Оценки вида $\widehat{\theta}_T$ будут использованы ниже при доказательстве теоремы 1.2. Но прежде чем перейти к доказательству этой теоремы, мы приведем один результат, схожий с (1.2) и еще раз указывающий на сходство конечномерных множеств $\Theta$ и множеств лежащих в пространствах с ограниченным воспроизводящим ядром.

**Теорема 2.1.** *Пусть в схеме наблюдений теоремы* 1.2 *параметрическое множество* $\Theta \subseteq H$, *где* $H$ – *подпространство с воспроизводящим ядром* $K(t,s), \sup_s K(s,s) \leqslant T$. *Пусть* $F(h)$ – *вещественнозначная дифференцируемая функция с равномерно ограниченной и равномерно непрерывной в* $O_r$, $r > 1$, *производной* $F'(h)$. *Тогда существует такая оценка* $F_\varepsilon$ *функции* $F(\theta)$, *что равномерно по* $\theta$

$$E_\theta|F_\varepsilon - F(\theta)|^2 = \varepsilon^2 E\Big|F'(\theta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(\cdot,s)\sigma(s)dw(s)\Big|^2 + o(\varepsilon^2). \tag{2.3}$$

Доказательство. Положим

$$\widehat{\theta}_\varepsilon(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)dX_\varepsilon(s) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\theta(s) + \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\sigma(s)dw(s)$$
$$= \theta(t) + \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\sigma(s)dw(s).$$

Таким образом, $\widehat{\theta}_\varepsilon(t)$ есть несмещенная оценка для $\theta$ и разность

$$\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta = \varepsilon\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)\sigma(s)dw(s) \tag{2.4}$$

это гауссовская случайная функция. Положим теперь $F_\varepsilon - F(\widehat{\theta}_\varepsilon)$. Тогда

$$F_\varepsilon - F(\theta) = F'(\theta)(\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta) + o(|\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta|$$

и утверждение теоремы следует из (2.4).

Линейный функционал $F'(\theta)$ можно по теореме Рисса отождествить с элементом $F'(t;\theta)$ пространства $L_2$. Поэтому главная часть в (2.3) есть $\varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^2(s)(\int\limits_{-\infty}^{\infty}F'(t;\theta)K(t,s)dt)^2$. Далее,

$$\bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} l(t;\theta)K(t,s)dt\bigg)^2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty} l^2(t)dt\int\limits_{-\infty}^{\infty} K^2(t,s)dt = K(s,s)\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F'(t;\theta)|^2dt,$$

так что

$$\varepsilon^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma^2(s)\bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} l(t;\theta)K(t,s)dt\bigg)^2 \leqslant \epsilon^2 T\|l\|^2\|\sigma\|^2.$$

**2.2.** Доказательство теоремы 1.2. Для простоты мы ограничимся вещественными функциями $F(\theta)$, в этом случае условие III теоремы выполняется автоматически. Кроме того, мы не будем рассматривать произвольные подпространства с воспроизводящим ядром, а ограничимся специальным, но, пожалуй, самым важным случаем ядер $K(t,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin T(t-s)}{t-s}$. Подпространства, соответствующие этому ядру, ниже обозначаются $H_T$, это подпространства $L_2$, состоящие из функций допускающих аналитическое продолжение до целых аналитических функций экспоненциального типа степени не выше $T$. Тем самым $\Theta$ состоит из функций допускающих достаточно хорошую аппроксимацию целыми функциями экспоненциального типа (условие I) и потому множество $\Theta$ можно охарактеризовать гладкостью входящих в него функций (см. [2]).

Заметим еще, что если $T > S$, то $H_T \supset H_S$; это обстоятельство несколько упрощает доказательство, хотя доказательства для произвольных $K(t,s)$ в идейном плане ничем не отличается от доказательства в нашем специальном случае.

Без потери общности можно предположить, что функция $F$ определена во всем пространстве $L_2(-\infty,\infty)$ и удовлетворяет там условиям II и III (см. [7]).

**2.3.** Доказательство теоремы 1.2. Пусть статистики $\widehat{\theta}_T$ определены равенством (2.1)(с $K(t,s) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin T(t-s)}{t-s}$). Оценка $\widehat{\theta}_\varepsilon$ определена в п. 2.1. Пусть далее $\tau = \varepsilon^2$. Определим оценку $F_\varepsilon$ для $F(\theta)$ равенством

$$F_\varepsilon - F(\widehat{\theta}_\varepsilon) + F'(\widehat{\theta}_\varepsilon)(\widehat{\theta}_\tau - \widehat{\theta}_\varepsilon), \tag{2.5}$$

и докажем, отождествляя, как и выше, линейный функционал $F'(\theta)$ с функцией из $L_2$ $F'(t;\theta)$, что

$$\begin{aligned} E_\theta|F_\varepsilon - F(\theta)|^2 &= \varepsilon^2 \int_{-\infty}^{\infty} |F'(t;\theta)|^2\sigma^2(t)dt + o(\varepsilon^2) \\ &\leqslant \varepsilon^2\|F'(\theta)\|^2 \sup_t \sigma^2(t) + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{2.6}$$

закончив тем самым доказательство теоремы для нашего специального случая.

По формуле Тейлора

$$F(\theta) = F(\widehat{\theta}_\varepsilon + F'(\widehat{\theta}_\varepsilon)(\theta - \widehat{\theta}_\varepsilon) + R, \tag{2.7}$$

причем в силу условия II $|R| \leqslant c\|\theta - \widehat{\theta}_\varepsilon\|^{1+\gamma}$.

Из (2.5) и (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(\theta) - F(\theta) &= F'(\widehat{\theta}_\varepsilon)(\widehat{\theta}_\tau - \theta) - R \\ &= \varepsilon F'(\theta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{T(\varepsilon)}(t,s)\sigma(s)dw(s) + \big[\varepsilon(F'(\widehat{\theta}_\varepsilon) \\ &\quad - F'(\theta)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{T(\varepsilon)}(t,s)\sigma(s)dw(s) - F'(\widehat{\theta}_\varepsilon)(\theta_\tau - \theta) \\ &\quad + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K_\tau(t,s) - K_{T(\varepsilon)}(t,s))\sigma(s)dw(s) - R\big]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Первое слагаемое справа: $Z = \varepsilon F'(\theta) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{T(\varepsilon)}(t,s)\sigma(s)dw(s)$ – это гауссовская случайная величина со средним нуль и дисперсией равной

$$\varepsilon^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(s)ds\Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(t,s)F'(t;\theta)dt\Big)^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2(s)(F'(t;\theta))^2dt + o(\varepsilon^2). \tag{2.9}$$

Чтобы закончить доказательство, нам осталось показать, что все слагаемые в $[\,\cdot\,]$ в равенстве (2.8) пренебрежимы в сравнении с $Z$.

В силу условия II и соотношения (2.2) для первого слагаемого в $[\,\cdot\,]$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 E\Big|(F'(\theta) - F'(\widehat{\theta}_\varepsilon) \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{T(\varepsilon)}(t,s)\sigma(s)dw(s)\Big|^2 \\ &\qquad \leqslant c\varepsilon^2 T(\varepsilon) E\|\widehat{\theta}_\varepsilon - \theta\|^{2\gamma} = o(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Второе слагаемое в $[\,\cdot\,]$ в силу условия II удовлетворяет неравенству

$$E|F'(\widehat{\theta}_\varepsilon)(\theta - \theta_\tau)|^2 \leqslant c\|\theta - \theta_\tau\|^2 \leqslant c\varepsilon^{4\beta} = o(\varepsilon^2), \tag{2.11}$$

так как $\beta > 1/2\gamma \geqslant 1/2$.

Из свойств ядер $K_T(t,s)$ следует, что

$$\varepsilon^2 E\Big|(F'(\widehat{\theta}_\varepsilon) - F'(\theta)) \int\limits_{-\infty}^{\infty} (K_\tau(t,s) - K_{T(\varepsilon)}(t,s))\sigma(s)dw(s)\Big|^2 \leqslant \int\limits_{|t|\geqslant T(\varepsilon)} |F'(t;\theta) - F'(t;\widehat{\theta}_\varepsilon)|^2 dt = o(\varepsilon^2). \tag{2.12}$$

Наконец, в силу условий I, II и неравенства (2.2)

$$E|R|^2 \leqslant cE\|\theta - \widehat{\theta}_\varepsilon|^{2(1+\gamma)} \leqslant \varepsilon^{\frac{4(1+\gamma)\beta}{1+2\beta}} = o(\varepsilon^2). \tag{2.13}$$

Соотношения (2.9)–(2.13) доказывают теорему в нашем специальном случае.

**Пример 2.1.** Если $F(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} l(t)\theta(t)dt$ – линейный функционал, то для квадратичной функции риска оценки $\widehat{F} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} l(t)dX_\varepsilon(t)$ выполняется равенство

$$E_\theta|\widehat{F} - F(\theta)|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F'(t;\theta)\sigma(t))^2\,dt. \tag{2.14}$$

Если $F(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,s)ds$ – линейный оператор Гильберта–Шмидта, то для оценки $\widehat{F} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(t,s)dX_\varepsilon(s)$ квадратичная функция риска

$$E_\theta\|\widehat{F} - F(\theta)\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(t,s)\sigma^2(s)\,dt\,ds. \tag{2.15}$$

Нетрудно показать, что оценки этого примера асимптотически эффективны, таким образом, в этом случае асимптотически эффективны будут и оценки теоремы 1.2.

## Литература

1. N. Aronszajn, *Theory of reproducing kernels* — Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.
2. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., Наука, 1965.

3. P. Bickel, C. Klaassen, Y. Ritov, J. Wellner, *Efficient and Adaptive Estimation for Semiparametric Models.* — J. Hopkins Univ. Press (1993).
4. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Одна задача статистического оценивания в гауссовском белом шуме.* — Доклады АН СССР. **326**, No. 6 (1977), 1300–1302.
5. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасминский, *Асимптотическая теория оценивания.* М., Наука, 1979.
6. И. А. Ибрагимов, Р. З. Хасьминский, *Об оценке плотности распределения принадлежащей одному классу целых функций.* — Теор. вероятн. и ее примен., **XXVII**, No. 3 (1982), 514–524.
7. И. А. Ибрагимов, А. С. Немировский, Р. З. Хасьминский, *Некоторые задачи непараметрического оценивания в гауссовском белом шуме.* — Теор. вероятн. и ее примен., **XXXI**, No. 3 (1986), 451–466.
8. К. Иосида, *Функциональный анализ.* М., Мир, 1967.
9. A. Nemirovski, *Topics in Non-parametric Statistics. Lecture Notes in Mathematics.* No. 1738, Springer, 2000.
10. В. М. Тихомиров, *Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений.* — Успехи мат. наук, **20**, No. 3 (1960), 81–120.

Ibragimov I. A. On the estimation of functions in Gaussian noise.

The main problem of the paper looks as follows. A functional parameter $\theta \in \Theta \subset L_2(-\infty, \infty)$ is observed in Gaussian noise. The problem is to estimate the value $F(\theta)$ of a given function $F$. A construction of asymptotically efficient estimates for $F(\theta)$ is suggested under the conditions that $\Theta$ admits approximations by subspaces $H_T \subset L_2$ with the reproducing kernels $K_T(t,s)$, $K_T(t,t) \leqslant T$.

Петербургское Отделение Математического Института им. В. А. Стеклова РАН,
Математико–механический факультет СПбГУ.
*E-mail*: ibr32@pdmi.ras.ru

Поступило 21 сентября 2017 г.