Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 457, 2017 г.

А. М. Вершик

ДВОЙСТВЕННОСТЬ И СВОБОДНЫЕ МЕРЫ В ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДЕЙСТВИЙ НЕ ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Памяти В. Н. Судакова

§1. Введение

Аксиоматика векторных пространств с мерой, обсуждаемая в этой работе, была задумана и частично описана в работах автора еще в 60-х гг., но излагаемый ниже ее вариант существенно отличается от той, которая был дана в этих работах [2–6]. Она состоит в том, что структура векторного пространства, на котором рассматривается мера и интегрирование, вводится в уже готовое (и стандартное) пространство с мерой. То есть речь идет о том, что на абстрактном пространстве с мерой вводится структура векторного пространства, а не наоборот.

Этот подход обладает целым рядом преимуществ по сравнению с традиционным, в котором мера или интегрирование вводятся в последний момент в пространство, перегруженное другими структурами, и потому принципиальные и сложные проблемы, связанные с мерой, еще более осложняются. Шестой том серии "Бурбаки" – "Интегрирование" – прекрасная иллюстрация того, как усложняются простые вопросы при игнорировании категорных и вероятностных свойств мер. Наш поход явно носит категорный характер, но, к сожалению, категория пространств с мерой, как правило, игнорируется авторами (видимо из-за своей ложной простоты). Более поздняя реализация этой же идеи – см. [8] и последующие работы – состоит в рассмотрении пространств с мерой и метрикой как пространств с фиксированной мерой и вводимой в него произвольной метрикой (допустимые тройки). Наиболее трудная и, на взгляд автора, главная и

Ключевые слова: векторное пространство с мерой, пространство линейных измеримых функционалов, свободная мера.

Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00433.

все еще малоисследованная часть теории меры – геометрия семейств сигма-подалгебр. Она была начата В. А. Рохлиным [12], классифицировавшим отдельные сигма-подалгебры (измеримые разбиения, измеримые функции). Классификация векторных пространств с мерой, которая обсуждается в этой работе, – пример классификации приблизительно того же уровня сложности. Гораздо более сложный пример такой задачи – классификация фильтраций (см. [7]).

В 60-х гг. имелась довольно большая литература по теории меры в бесконечномерных векторных пространствах, интерес к которой вспыхнул чуть раньше в связи с приложениями к физике (континуальные интегралы), к функциональному анализу (обобщенные функции и обобщенные случайные процессы) и собственно к геометрии векторных пространств с мерой (продолжение мер, квазиинвариантность и пр.) – см., например, [9, 13, 15, 18] и ссылки, приведенные в этих работах. Главным достижением тех лет в этом направлении были важные теоремы В. В. Сазонова и Р. А. Минлоса о продолжении слабых распределений до меры, инициированные, соответственно, А. Н. Колмогоровым – Ю. В. Прохоровым и И. М. Гельфандом: в гильбертовом пространстве (Сазонов) и в ядерном пространстве (Минлос).

Однако в работах тех лет обращалось мало внимания как на сходные классические вероятностные примеры, так и на связи с линейным функциональным анализом и особенно с общей теорией меры и, как следствие, несколько переоценивалась специфика ситуации с интегрированием в бесконечномерных пространствах: в действительности, общая теория меры содержала многое необходимое для построения специальной теории в таких пространствах. В работах автора тех лет по теории двойственности подчеркивалось именно последнее обстоятельство.

Уместно вспомнить, что эта работа о двойственности докладывалась на московском международном конгрессе 1966 года [4]. Председательствующим на секции был Ж. Дьедонне, автор замечательного 5-го тома “Топологические векторные пространства” серии “Бурбаки”, в котором основной темой была топологическая двойственность локально-выпуклых векторных пространств. К перенесению идеи двойственности на векторные пространства с мерой он отнесся одобрительно. Наоборот, Л. Шварц, занимавшийся в то время шестым томом “Интегрирование”, не принял этих идей[1].

Так случилось, что в конце 50-х гг. В. Н. Судаков и я стали изучать теорию меры в линейных пространствах. До нас (через Д. А. Райкова) докатилась волна московского интереса к этой тематике. В. Н. очень успешно занялся квазиинвариантыми мерами и другими геометрическими вопросами (впоследствии перешедшими в занятия трудной задачей о непрерывности реализаций гауссовских процессов, которую он решил). В середине 60-х гг. мы с В. Н. написали большую статью [9]: об общей теории продолжения мер в векторных топологических пространствах, которая подытожила наши соображения на эту тему. Еще ранее я, отталкиваясь от рохлинской теории пространства Лебега, начал думать над структурой теории меры в векторных пространствах, результатом чего стала теория двойственности, излагаемая здесь в обновленной форме и концепция свободной векторной меры. Краткие заметки и статьи, опубликованные в те годы не получили достаточной известности, хотя и были оценены нашим тогдашним семинаром. Автор надеется, что данная публикация, во-первых оживит интерес к важным вопросам теории меры и интегрирования в векторных пространствах, и к концептуальной постановке этих вопросов. Кроме того, автор имеет в виду привлечь внимание к новым тесно связанным с этой теорией задачам, о которых идет речь в последнем параграфе данной работы, и которые до сих пор остаются недостаточно изученными. Я имею в виду связи с теорией представлений и действий не локально компактных групп.

Автор благодарит В. И. Богачева за интерес к теме и А. А. Лодкина за помощь в оформлении литературы.

Хочу повторить сказанное о В. Н. в печальные дни вскоре после его кончины:

[1]После конгресса и личного знакомства с Ж. Дьедонне у меня появлась идея, которую мы осуществили с В. Н. Судаковым: послать письмо от нас Н. Бурбаки с комплиментами по поводу гигантской затеи этого автора написать обо всей математике. Мы дотошно изучали некоторые тома на семинаре Г. П. Акилова. Я попросил знакомых, очень хорошо знавших французский, перевести письмо, и мы его отправили. Через некоторое время каждый из нас получил в подарок по тому “Бурбаки”. Мой экземпляр был надписан явно двумя различными ручками, что я расценил как подтверждение коллективности авторства. Вскоре пришел 6-й том, который, к сожалению, мне не понравился.

Владимир Николаевич Судаков (Волик, Володя) – один из самых талантливых математиков своего поколения. Он расцвел рано и ярко. Вместе с родителями он провел в Ленинграде всю блокаду. Володя окончил школу блестящим олимпиадником, с золотой медалью, и поступил на мат-мех. Именно тогда мы и познакомились. Легкость, с которой он схватывал и ловил новые математические мысли, быстрота решения задач – восхищали. Его привлекали в основном геометрические задачи, но он старался услышать обо всем интересном и новом, слушать самые разные курсы. В конце концов он остановился на функциональном анализе как на наиболее геометричной ветви анализа в широком смысле слова, и нашим с ним первым научным руководителем стал Глеб Павлович Акилов. С ним Володя тесно сдружился и, без сомнения, испытал и нематематическое его влияние. Свою первую работу (опубликованную как заметка в "Успехах"), в которой он упростил классический критерий компактности, он написал на 4-м курсе. Нас объединял в конце 50-х годов интерес к теории меры в функциональных пространствах – тематике, начинавшейся А. Н. Колмогоровым, И. М. Гельфандом и укоренившейся в Ленинграде благодаря инициативе Д. А. Райкова. Мы написали с ним большой обзор на эту тему, который неоднократно использовался в дальнейшем. Володя был активным членом нашего маленького акиловского семинара (В. П. Хавин, Б. М. Макаров, В. Н. и я), который существовал несколько лет и на котором мы разбирали некоторые тома Бурбаки и другие новые вещи. В. Н. принимал первое время активное участие в эргодическом семинаре В. А. Рохлина, который, кстати, был оппонентом на обеих его диссертациях. Позже В. А. предлагал ему соавторство в предполагаемой книге геометрического содержания.

Его руководителем в аспирантуре был Л. В. Канторович, курировавший тогда вычислительную специальность, которую Володя получил в университете. В дальнейшем он оказался в ЛОМИ-ПОМИ в статистической лаборатории Ю. В. Линника (позже – И. А. Ибрагимова), но при этом сохранил, занимаясь теорией случайных процессов, свой собственный вкус и круг интересов. Он посвятил много времени решению труднейшей задачи о непрерывности реализаций случайного гауссовского процесса и решил ее развитым им методом. Другое его широко известное достижение – теорема о существовании точного решения в задаче Монжа–Канторовича в эвклидовом случае в постановке, в которой я принимал участие. Широкие круги вероятностников знают его работы по гауссовым мерам (часть вместе с Б. С. Цирельсоном, И. А. Ибрагимовым). И, конечно, большую известность получила его монография [14]. Добавим, что недавно стала весьма популярной его с Л. Н. Довбыш работа [11] о матрицах Грама–де Финетти.

§2. Определения

2.1. Определение векторного пространства с мерой. В дальнейшем мы будем рассматривать векторные пространства над полем вещественных чисел.

Определение 1. *Пусть E – векторное пространство, для которого выделено и фиксировано некоторое линейное пространство гомоморфизмов пространства E в конечномерные векторные пространства $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, которое разделяет точки пространства E (то есть всякая точка имеет ненулевой образ относительно хотя бы одного гомоморфизма). Рассмотрим совокупность прообразов борелевских множеств пространств $\mathbb{R}^n$ относительно этих гомоморфзимов и породим с их помощью сигма-алгебру $\mathcal{A}$ подмножеств E. Предположим, что на сигма-алгебре $\mathcal{A}$ задана такая вероятностная мера μ, что тройка $(E, \mathcal{A}, \mu)$ как пространство с мерой изоморфна пространству Лебега-Рохлина. В этом случае мы скажем, что $(E, \mathcal{A}, \mu)$ есть векторное пространство с мерой.*

Фактически, выше определена категория векторных пространств с мерой: объектами служат описанные выше тройки, а морфизмами служат линейные гомоморфизмы, сохраняющие меру. Точнее, под морфизмом объектов понимается линейное отображение пространств, заданное на некотором линейном множестве полной меры и сохраняющее меру (или, в несколько другой категории, тип меры). Подчеркнем, что это определение – морфизмов $\bmod 0$, то есть само векторное пространство определено лишь с точностью до выбора векторного подпространства исходного пространства, имеющего полную меру. Таким же образом определены и изоморфизмы как обратимые морфизмы.

В категории векторных пространств с мерой нет необходимости следить за специальными (например, топологическими) свойствами пространств, на которых задана мера. Но если данное векторное пространство E является еще и локально-выпуклым топологическим сепарабельным пространством, то в качестве системы сигма-алгебр в определении выше можно взять сигма-алгебру цилиндрических множеств, то есть множеств, порожденных *непрерывными* линейными функционалами. Эта сигма-алгебра совпадает с сигма-алгеброй борелевских множеств, поэтому локально-выпуклое сепарабельное пространство с борелевской счетно-аддитивной мерой является векторным пространством с мерой в нашем смысле. Несколько сложнее (см. далее) убедиться в том, что произвольное сепарабельное метрическое линейное топологическое пространство – так называемое F-пространство Фреше, не обязательно локально выпуклое, снабженное борелевской вероятностной мерой, – тоже является линейным пространством с мерой в указанном смысле.

Топология векторных пространств не участвует в нашей аксиоматике и используется только в примерах. Мы также не занимаемся здесь важным и популярным в свое время вопросом, когда конечно-аддитивная мера (или, в прежней терминологии, *слабое распределение*), заданная на алгебре цилиндрических множеств векторного (или векторного топологического) пространства продолжается в том же векторном пространстве до счетно-аддитивной меры, и рассматриваем только счетно-аддитивные меры.

2.2. Пространство линейных измеримых функционалов. Существенным для нас является понятие *линейного измеримого функционала на векторном пространстве с мерой.*

Определение 2. *Измеримая функция f (а точнее, класс функций, совпадающих* $\bmod 0$ *с функцией f) на векторном пространстве с мерой (E,μ) называется линейным измеримым функционалом (л.и.ф.), если существует векторное подпространство $E_f \subset E$ полной меры ($\mu(E_f) = 1$), на котором некоторая индивидуальная функция из класса f является линейной в обычном смысле слова. Обозначим пространство л.и.ф. через* $\mathrm{Lin}(E,\mu)$. *Гомоморфизмы, фигурирующие в определении сигма-алгебры векторного пространства с мерой, являются линейными измеримыми функционалами, но, как правило, далеко не исчерпывают* $\mathrm{Lin}(E,\mu)$.

Разумеется, как обычно, под функционалом понимается класс попарно совпадающих почти всюду функционалов; пространство $\mathrm{Lin}(E,\mu)$ является подпространством пространства $L_0(E,\mu)$ всех измеримых функционалов на (E,μ), и мы снабдим его топологией сходимости по мере. В некоторых случаях, например, для гауссовых мер или для последовательностей независимых функционалов, сходимость в этой топологии совпадает с топологией сходимости в гильбертовом пространстве $L^2(E,\mu)$.

Из определения видно, что для конечного или счетного множества линейных измеримых функционалов можно найти множество полной меры, на котором все эти функционалы линейны. Но особенностью понятия л.и.ф. является то обстоятельство, что в наиболее интересном случае бесконечномерных пространств область задания линейного измеримого функционала индивидуальна: не существует векторного подпространства полной меры, на котором были бы определены одновременно все линейные измеримые функционалы. Это обстоятельство принципиально отличает описываемую здесь теорию двойственности от известной и более сложной теории двойственности топологических векторных пространств (см. том V трактата "Элементы математики" Н. Бурбаки). Об этих различиях см. далее.

Рассмотрим классический пример. Пусть $\xi_n, n = 1, 2, \ldots$ – счетная последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностями $1/2$. Соответствующую этой последовательности меру Бернулли μ можно рассматривать как меру в линейном пространстве $l^\infty_{\mathbb{N}}$ (точнее, на множестве вершин единичного куба (шара) этого пространства). Снабдив $l^\infty_{\mathbb{N}}$ сигма-алгеброй, порожденной борелевскими множествами в слабой снизу, в двойственности $(l^\infty_{\mathbb{N}}, l^1_{\mathbb{N}})$, топологии, мы получим векторное пространство с мерой в смысле приведенного определения.

По следствию к классической теореме о трех рядах пространство линейных измеримых функционалов есть пространство $l^2_{\mathbb{N}}$; ему отвечают ряды

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n x_n; \quad x = \{x_n\} \in l^\infty_{\mathbb{N}}, \quad f = \{f_n\} \in l^2_{\mathbb{N}},$$

сходящиеся по мере μ (а также почти всюду и в среднем)[2]. В то же время пространство непрерывных линейных функционалов в смысле слабой снизу топологии на $l^\infty_{\mathbb{N}}$ есть меньшее пространство, а именно, $l^1_{\mathbb{N}}$. Единое пространство, на котором определены все измеримые

[2]Обратим внимание, что не совсем очевидно, что $l^2_{\mathbb{N}}$ есть пространство **всех** измеримых линейных функционалов. Это не вытекает из теоремы о трех рядах, в которой только ряды и рассматриваются, а следует из структуры всего пространства измеримых функций на бесконечном произведении пространств.

линейные функционалы, это пространство $l^2_{\mathbb{N}}$ как подмножество $l^\infty_{\mathbb{N}}$, но оно имеет меру нуль. Таким образом, не существует множества полной меры, на котором определены все линейные измеримые функционалы. Этот пример типичен.

Из определения векторного пространства с мерой непосредственно следует

Следствие 1. *В любом векторном пространстве с мерой существует достаточное число линейных измеримых функционалов.*

А именно, всякий такой функционал соответствуют измеримому отображению $E \to \mathbb{R}$, где ядро есть подпространство коразмерности один (гиперплоскость). Очевидно, что из достаточности числа отображений, отвечающих подпространствам конечной коразмерности, следует, достаточность числа отображений, соответствующих гиперплоскостям. Более того, можно и в определении требовать существование достаточного числа лишь гиперплоскостей.

Пространство $\mathrm{Lin}(E, \mu)$ – основной инструмент в теории двойственности. Его можно назвать "измеримым сопряженным" пространством к линейному пространству с мерой. Найти явное его описание для данного векторного пространства с мерой (E, μ) столь же сложно, как описывать пространство непрерывных линейных функционалов на топологическом векторном пространстве.

2.3. Одномерные гомоморфизмы векторных пространств с мерой. Рассмотрим более общее понятие, тесно связанное с понятием линейного измеримого функционала.

Определение 3. *Измеримый функционал на векторном пространстве с мерой называется одномерным измеримым линейным отображением* $f : E \to \mathbb{R}$, *если*

$$f(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 f(x) + \lambda_2 f(x)$$

для всех пар вещественных чисел (λ_1, λ_2) *(эквивалентно: для почти всех по мере Лебега на* $\mathbb{R}^2$*) и почти всех по мере* $\mu \times \mu$ *пар* (x, y).

В некоторых работах такие функционалы называли почти линейными. Очевидно, что измеримый линейный функционал является одномерным линейным отображением пространства (E, μ) в $\mathbb{R}$. Верно и обратное:

Теорема 1. *Всякому одномерному измеримому линейному отображению* mod 0 *векторного пространства с мерой в* $\mathbb{R}$ *соответствует единственный* mod 0 *линейный измеримый функционал на этом пространстве, порождающий данное отображение.*

Установление этого факта вполне очевидно. Различие понимания линейности – в буквальном смысле или на почти всех парах значений аргументов – легко преодолевается с помощью теоремы Фубини, позволяющей осуществить исправление до буквальной линейности.

§3. Теория двойственности и классификация

В этом параграфе мы рассматриваем основные факты теории двойственности векторных пространств с вероятностной мерой.

3.1. Характеристический функционал. Следующее классическое определение лежит в основе всей метричской теории.

Определение 4. *На пространстве* $L_0(X,\mu)$ *всех вещественных измеримых функционалов любого пространства Лебега (или на некотором его подпространстве) рассмотрим следующий функционал, называемый характеристическим:*

$$\xi(f) = \int\limits_{x\in E} \exp\left(if(x)\right) d\mu(x), \quad f \in \mathrm{Lin}(E,\mu).$$

Очевидно, что $\xi(.)$ *есть положительно определённый функционал на* L_0 *в смысле структуры линейного пространства, в частности, гильбертова пространства* L^2. Его задание полностью определяет меру: значения меры на всех измеримых множествах, порождающих сигма-алгебру, определены однозначно. Ограничение функционала на L^2 непрерывно в топологии L^2.

Характеристический функционал наиболее удобен, среди многих других способов (хотя и редко используется за пределами вероятностной литературы), для определения дополнительной структуры в банаховых пространствах $L_0(X,\mu)$ или $L^p(X,\mu), p \geqslant 0$, характеризующих их как пространства измеримых функций. Он, в частности, определяет класс изометрий, сопряженных с сохраняющими меру преобразованиями пространства (X,μ). Например, короткое определение класса унитарных операторов в $L^2(X,\mu)$, отвечающих преобразованиям с инвариантной мерой (то есть мультипликативных, вещественных, сохраненяющих частичный порядок, и т. п.) состоит в том, что он совпадает с классом унитарных операторов, сохраняющих характеристический функционал.

3.2. Реализация и классификация векторных пространств с мерой. С помощью пространства $\mathrm{Lin}(E,\mu)$ дадим универсальную реализацию векторного пространства с мерой.

Теорема 2. *Всякое векторное пространство с мерой* (E,μ) *линейно изоморфно пространству* $(\mathbb{R}^\infty,\nu)$*, где* ν *– некоторая борелевская вероятностная мера.*

Доказательство. Напомним, что (E,μ) как пространство с мерой есть, по определению, пространство Лебега. Рассмотрим пространство всех линейных измеримых функционалов $\mathrm{Lin}(E,\mu)$ и выберем в нем некоторую плотную счетную порождающую (то есть разделяющую точки) последовательность элементов. Выделим векторное пространство E_0 полной меры, на котором эти элементы как линейные функционалы определены и разделяют точки.

Эта последовательность определяет (как последовательность случайных величин) изоморфизм между пространствами (E,μ) и $\mathbb{R}^\infty$. Образ μ при этом отображении обозначим через ν. Пространство $(\mathbb{R}^\infty,\nu)$, очевидно, есть векторное пространство с мерой. Но построенный изоморфизм является линейным на выбранном множестве, поскольку совокупность линейных функционалов является тотальной, а линейные функционалы отображаются в линейные. □

Замечание. Выбранный способ построения изоморфизма доказывает также, что все линейные измеримые функционалы для мер на $\mathbb{R}^\infty$ отвечают рядам, сходящимся по мере. Различие между разными способами выбора указанного счетного множества, очевидно, приводит к упомянутому различию между изоморфизмами с точностью до совпадения mod 0. Разумеется, вместо $\mathbb{R}^\infty$ можно брать другие топологические пространства, например, гильбертово пространство (см. далее).

Перейдем к вопросу о том, какие подпространства пространства всех измеримых функций могут быть пространствами измеримых линейных функционалов.

Теорема 3. *Всякое замкнутое в топологии сходимости по мере порождающее подпространство пространства $L_0(X,\mu)$ всех измеримых функций на пространстве Лебега (X,μ) является пространством всех измеримых линейных функционалов на некотором единственном, с точностью до изоморфизма, векторном пространстве с мерой.*

Доказательство. Заметим, что случай, когда (X,μ) есть атомическое пространство, например, с конечным числом точек – тривиален, хотя все рассуждения, приведенные ниже, годятся и для атомических мер. Поэтому все дальнейшее относится, главным образом, к случаю, когда (X,μ) есть пространство Лебега с непрерывной мерой.

Следующий прием позволяет свести задачу к гильбертовым пространствам. Легко видеть, что замена меры на эквивалентную, то есть введение плотности на векторном пространстве с мерой (E,μ), не меняет запас линейных измеримых функционалов. Поэтому введение плотности позволяет рассматривать только такие меры, для которых всюду плотная счетная часть линейных измеримых функционалов квадратично интегрируема, и пересечение $\mathrm{Lin}(X,\mu)\bigcap L^2(X,\nu)$ становится порождающим подпространством. Мы свели задачу к следующей:

доказать, что данное замкнутое порождающее подпространство $\mathrm{Lin}_0^2 \subset L^2(X,\nu)$ является пространством всех квадратично интегрируемых линейных измеримых функционалов на некотором векторном пространстве с мерой.

Этот факт составляет важное уточнение к теореме Сазонова о мерах в ядерных пространствах (см. оригинальные статьи В. В. Сазонова и Р. А. Минлоса или, например, [9])[3].

Применим теорему Сазонова к вещественному гильбертову пространству $H := \mathrm{Lin}_0^2 \subset L^2(X,\nu)$, на котором задан непрерывный положительно определенный функционал χ, а именно, характеристический функционал (см. предыдущий пункт). Теорема утверждает, что в ядерном расширении $\widehat{H}$ сопряженного с H пространства $\bar{H} \subset \widehat{H}$ однозначно определена борелевская вероятностная мера μ, преобразование Фурье которого есть χ. Наше уточнение этого утверждения состоит в том, что пространство H есть пространство всех линейных

[3] Теорема Минлоса о продолжении мер в ядерных пространствах менее удобна для наших целей, но, по существу, и ее можно было бы использовать для доказательства.

измеримых функционалов на $(\widehat{H}, \mu)$, то есть

$$\mathrm{Lin}(\widehat{H}, \mu) = H \subset L^2(X, \nu) = L^2(\widehat{H}, \mu).$$

Включение правой части в левую есть (обычно пропускаемая) часть утверждения теоремы Сазонова. Действительно, тот факт, что любой элемент $h \in H$ определен как измеримый линейный функционал на ядерном расширении вытекает из того, что он (по определению) входит в область определения преобразования Фурье меры μ – это и есть утверждение теоремы, – то есть определяет измеримый функционал на $(\widehat{H}, \mu)$, а линейность следует из его линейности (и непрерывности) на пространстве $\bar{H}$, которое плотно в $\widehat{H}$.

Покажем, что других линейных измеримых квадратично итерируемых функционалов нет. Пусть $k \in L^2(\widehat{H}, \mu)$ – такой функционал. Можно считать, что он ортогонален H. Рассмотрим прямую сумму $K \equiv H \bigoplus \{ck, c \in \mathbb{R}\}$, на которой задан тот же характеристический функционал, и применим к ней ту же теорему. Мы получим новое векторное пространство с мерой $(\widehat{K}, \rho)$ (ядерное расширение пространства $\bar{K}$, сопряженного с K). Очевидно, что оно является одномерным расширением пространства $\bar{H}$. Проекция $\bar{K} \to \bar{H}$ есть линейный гомоморфизм векторных пространств с мерой и одновременно метрический изоморфизм, поскольку элемент k в силу того, что H есть порождающее пространство, является функцией от элементов H. С другой стороны, этот гомоморфизм не является линейным изоморфизмом, так как k, по предположению, ненулевой функционал, ортогональный к H. Отсюда следует, что и линейный функционал k на пространстве $\bar{K}$ не является линейным функционалом на проекции $\bar{H}$ (но, разумеется, является некоторым нелинейным функционалом) [4].

Таким образом, доказано, что всякое замкнутое подпространство в $L^2(X, \mu)$, где (X, μ) – пространство Лебега с непрерывной мерой, является пространством всех линейных измеримых функционалов на векторном пространстве с мерой. □

---

[4] Хорошей и адекватной геометрической иллюстрацией этого рассуждения служит рассмотренный выше пример с бернуллиевской мерой на произведении двоеточий: в этом случае $K = l^2, k = \{\frac{1}{2^n}\}$, H – ортогональное дополнение к k в K. Бернуллиевская мера μ на вершинах единичного куба проектируется изоморфным образом на гиперплоскость; относительно проекции меры элемент k есть уже нелинейный функционал. Легко переизложить содержание этого примера в терминах функций Радемахера на отрезке $[0, 1]$.

3.3. Классификация векторных пространств с мерой и пространств измеримых линейных функционалов. Из предыдущей теоремы вытекает, что задание векторного пространства с мерой с условием квадратичной интегрируемости линейных измеримых функционалов (кратко – *мерой с квадратичной интегрируемостью*) равносильно заданию некоторого замкнутого подпространства в L^2: линейный изоморфизм двух таких векторных пространств с мерой равносилен метрическому изоморфизму пространств их измеримых функционалов.

Предложение 1. *Классификация векторных пространств с мерой с квадратичной интегрируемостью с точностью до линейного изоморфизма* mod 0 *равносильна классификации соответствующих пространств измеримых линейных функционалов как подпространств в* L^2 *относительно группы унитарных мультипликативных операторов* (*то есть группы сохраняющих меру преобразований*). *Эквивалентным образом* (*если снабдить эти пространства вышеопределенным характеристическим функционалом*), *она равносильна классификации подпространств относительно группы унитарных операторов, сохраняющих характеристический функционал.*

$$(E_1, \mu_1) \sim (E_2, \mu_2) \quad \Leftrightarrow \quad (F_1, \xi) \simeq (F_2, \xi),$$

где F_1, F_2 *– пространства линейных измеримых функционалов, соответственно, на* E_1, E_2, *а "*$\simeq$*" – их изоморфизм относительно группы унитарных мультипликативных операторов как линейных подпространств в пространстве* L^2 *указанного вида. Соответствующий ему изоморфизм векторных пространств с мерой и есть изоморфизм между* (E_1, μ_1) *и* (E_2, μ_2).

Таким образом, тип (с точностью до изоморфизма) пространства всех линейных измеримых функционалов есть полный инвариант (точнее, коинвариант) относительно группы изоморфизмов векторных пространств с мерой.

Итак, две классификации равносильны:

- классификация векторных пространств с мерой;
- классификация порождающих замкнутых линейных подпространств пространства всех измеримых функций на пространстве Лебега.

Разумеется, это есть своеобразный аналог общеизвестной метрической классификации измеримых функций (случайных величин): полным метрическим инвариантом взаимно-однозначной mod 0 (тем самым, порождающей) измеримой функции f является ее f-образ меры (то есть ее мера-распределение). В нашем случае полным инвариантом замкнутого порождающего подпространства служит тип пространства линейных измеримых функционалов.

Полезное следствие наших рассмотрений: всякий невырожденный ($\chi(f) = 1 \Leftrightarrow f = 0$) положительно определённый непрерывный функционал на бесконечномерном вещественном гильбертовом пространстве есть ограничение характеристического функционала при надлежащем вложении этого гильбертова пространства в пространство $L^2([0,1], m)$ (m – мера Лебега).

Вывод. *Суть предлагаемой теории двойственности состоит в параллельном изучении мер в векторных пространствах, с одной стороны, и замкнутых порождающих подпространств в пространстве всех измеримых функций – с другой. Линейный изоморфизм векторных пространств с мерой эквивалентен метрическому изоморфизму подпространств измеримых линейных функционалов.*

Следует ли считать обе эти классификации задачами "дикими" или "ручными"? Ответ на этот вопрос неочевиден, а может быть, сам вопрос некорректен. Он сводится к вопросу, насколько обозримо пространство полных инвариантов классификации.

Классификация подпространств (например, пространства L^2) относительно группы мультипликативных унитарных операторов или, что тоже самое, классификация ортогональных проекторов является ручной в случае конечномерных подпространств или в случае, когда подпространства являются подалгебрами (в последнем случае классификация сводится к рохлинсой классификации сигма-подалгебр или измеримых разбиений). Автор склонен считать, что и случай произвольного порождающего подпространства также является ручным. Заметим, что можно рассматривать только порождающие пространства, так как если сигма-алгебра, порожденная подпространством, собственная, то следует рассматривать задачу в этой подалгебре.

Тем не менее, простой полной системы инвариантов подпространства, скорее всего, указать нельзя. Но и в эквивалентной классификации мер в векторных пространствах с точностью до линейного изоморфизма нет видимых канонических форм, если речь не идет о специальных мерах – произведении независимых, марковских мерах, и т. д. Уже даже на примере конечномерных пространств видно, что попытки отыскать нормальную форму меры небезнадежны, но малопродуктивны. Тем не менее, обе задачи классификации мало похожи на известные "негладкие" задачи типа классификации классов сопряженности группы сохраняющих меру автоморфизмов отрезка или классификации диадических фильтраций [7].

Но можно изучать меры и их инварианты, отвечающие тем или иным замечательным подпространствам в L^2, и, эквивалентным образом, можно исследовать свойства тех или иных подпространств измеримых линейных функционалов для гауссовых, произведений независимых и других мер. В последнем параграфе мы изучаем замечательную меру, отвечающую случаю, когда пространство ее линейных функционалов есть все пространство измеримых функций, – а именно, теорию свободной меры. Она – единственна и универсальна.

3.4. Ядро векторного пространства с мерой и лифтинг. Учитывая сказанное выше об области задания л.и.ф., естественно поставить следующий вопрос: можно ли определить единое векторное подпространство полной меры, на котором всюду определены все линейные измеримые функционалы? Разумеется, в конечномерном пространстве с мерой это так, поскольку всякий линейный измеримый функционал является непрерывным. Но в существенно бесконечномерном случае, как мы увидим, это не так, что придает содержательность теории двойственности векторных пространств с мерой.

Определение 5. *Ядром* $\mathrm{Ker}(E,\mu)$ *векторного пространства с мерой* (E,μ) *называется пространство линейных непрерывных* (*в топологии сходимости по мере*) *функционалов на пространстве* $\mathrm{Lin}(E,\mu)$ *линейных измеримых функционалов. Ядро может быть тривиальным, то есть состоять из одного нулевого функционала, но может быть и полным, то есть разделять точки пространства* $\mathrm{Lin}(E,\mu)$.

Например, легко проверить, что для гауссовых мер и для произведений независимых мер с конечной дисперсией ядро полное. Очевидно, что ядро $\mathrm{Ker}(E,\mu)$ есть подпространство пространства E, поскольку оно содержится в любом из подпространств, на котором определен тот или иной линейный измеримый функционал, то есть лежит в пересечении всех векторных подпространств полной меры.

Если мера μ такова, что любое конечномерное подпространство имеет меру нуль, то и мера ядра равна нулю: $\mu(\mathrm{Ker}(E,\mu)) = 0$.

Для гауссовых мер ядро совпадает с пересечением всех подпространств полной меры и имеет структуру гильбертова пространства, ядерно вложенного в исходное пространство с мерой: фактически, это следствие теоремы Минлоса–Сазонова и того факта, что пространство $\mathrm{Lin}(E,\mu)$ есть замкнутое подпространство $L^2(E,\mu)$.

В связи с этим заметим, что необходимость выбора множества полной меры, на котором соотношения исправляются до тождественных (*лифтинг*) встречается во многих задачах теории меры. Это, например, относится к серии утверждений о непрерывности измеримых положительно определенных функций на группах и, в частности, о непрерывности измеримых характеров.

Еще более глубокими являются теоремы о поточечном измеримом действии групп унитарных мультипликативных операторов, то есть групп классов совпадающих $\bmod 0$ автоморфизмов. Например, группа всех унитарных мультипликативных операторов не имеет определнного всюду индивидуального группового действия, это доказано в работе [16], а в предшествущей работе [6] был получен частичный результат [5]. В то же время, любая локально компактная группа унитарных мультипликативных операторов имеет индивидуальный лифтинг – доказательство предложено в работе [19]. В работах [2,6] автор развил идею свободной меры (см. далее) и дал другое доказательство, используя структурные теоремы о локально компактных группах и теорему Минлоса–Сазонова.

3.5. О тройках Гельфанда. В связи с приведенным рассуждением имеет смысл остановиться на имеющем не только исторический интерес понятии тройки Гельфанда, использовавшейся в работах 50-70-х гг.

Рассмотрим тройку пространств:

$$E \subset H(\sim H') \subset E'.$$

[5] а именно, доказано, что не существует индивидуального линейного действия этой группы на пространстве со свободной мерой.

Здесь E' – пространство распределений Шварца на компактном конечномерном многообразии. На E' задана вероятностная борелевская мера, например, гауссовская мера μ, а E – пространство основных функций, то есть пространство всех непрерывных линейных функционалов на пространстве распределений E'. Пространство H (и H') сначала определялось как гильбертово пространство, норма в котором задается корреляционным оператором, отвечающим гауссовой мере μ[6]. Попутно заметим, что пространство E является счетнонормированным ядерным пространством, поэтому в E' по теореме Минлоса все слабые распределения продолжаются до счетно аддитивной меры.

Оказалось, что в этой схеме пространство H (и изоморфное ему H'), возникавшее, скорее формально, как гильбертово пространство *со слабым распределением, не являющимся счетно аддитивной мерой*, имеет непосредственную интерпретацию: это есть в точности *пространство всех измеримых линейных функционалов на векторном пространстве с мерой* (E, μ). Часть из них являются непрерывными линейными функционалами (элементы E') и поэтому определены всюду. Но есть и другие, которые определены лишь почти всюду, каждый на своем векторном подпространстве полной меры в (E, μ), но не на всем E. В этом примере все линейные измеримые функционалы квадратично интегрируемы: $H \subset L^2(E, \mu)$, и топология сходимости по мере совпадает с гильбертовой (L^2). Вложение $E' \subset H'$ пространства непрерывных линейных функционалов в пространство измеримых линейных функционалов плотно и (по теореме Сазонова) является ядерным вложением (то есть осуществляется ядерным оператором; иногда говорят о гильберт-шмидтовском вложении, имея в виду квадрат исходного ядерного оператора.)

Пространство H' – сопряженное с H гильбертово пространство – полезно не отождествлять с H, его самостоятельная интерпретация отмечена выше, – это так называемое ядро гауссовой меры, то есть пространство H' есть инвариантно определенное пересечение всех векторных подпространств полной меры μ в E', само имеющее меру нуль.

[6]Эта тройка называлась тройкой (троицей) Гельфанда, а он интерпретировал её так: H (которое отождествлялось с H') – это бог–отец, E – бог–сын, а E' – бог–святой дух. Пояснять эту выразительную интерпретацию можно по-разному, но имеется в виду, что определения всей схемы начинаются с корреляционного оператора гауссовой меры, затем надёжно определено пространство основных функций, а пространство распределений с мерой на нем, – собственно, главный, но трудно обозримый объект, – изучается с помощью первых двух пространств.

Пространство H и есть пространство всех измеримых линейных функционалов на (E, μ) в случае гауссовых мер.

§4. Свободное пространство с мерой

4.1. Определение свободной меры.

Определение 6. *Мера в векторном пространстве называется свободной, если всякий измеримый функционал является линейным с точностью до исправления на множестве меры нуль, зависящего, вообще говоря, от функционала.*

Это важное понятие неявно использовалось в работе [19], его точное описание и название *свободная мера* появились в работах автора [2,6]. Основная роль этого понятия, скорее, методологическая и категорная, но оно оказалось полезным и в ряде практических вопросов.

С точки зрения теоремы предыдущего параграфа о классификации, по которой каждому замкнутому порождающему пространству отвечает некоторая мера, свободная мера соответствует всему пространству измеримых функций.

Однако, полезно дать более прямое построение, чем то, которое следует из предыдущих, в определенном смысле неявных, конструкций.

Очевидно, что векторное пространство с атомической мерой, сосредоточенной в точности на ортах базиса этого пространства, обладает этим свойством: любой измеримый функционал почти всюду совпадает с линейным функционалом, определяемым значениями на ортах. Это есть пример атомического векторного пространства со свободной мерой. Для атомических мер все дальнейшие утверждения очевидны, поскольку геометрическая реализация свободной атомической меры единственна.

4.2. Прямые конструкции пространств с непрерывной свободной мерой. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ всех двусторонних бесконечных последовательностей вещественных чисел, снабженное естественной сигма-алгеброй $\mathcal{B}$ борелевских множеств, и отобразим в него окружность (фактически, интервал):

$$I : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}; \quad I(\lambda) = \{\exp 2\pi \cdot in\lambda\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Пусть $\omega = I_*(m)$ – образ меры Лебега m на $[0, 1)$. Очевидно, что $(R^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \omega)$ есть линейное пространство с мерой в смысле данного определения. Существование достаточного числа линейных измеримых (и даже непрерывных в смысле слабой топологии пространства $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$) функционалов очевидно, но имеет место более интересный факт, вытекающий из непростой классической теоремы о тригонометрических рядах.

Предложение 2. *Всякая измеримая* (*почти всюду конечная*) *функция на пространстве с мерой* $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \mathcal{B}, \omega)$, *принадлежащая пространству* L^2, *является* mod 0 *линейной, то есть совпадает с линейным функционалом на множестве полной меры.*

Доказательство. Известная теорема Меньшова (см. [1], гл. XV, §2) утверждает, что всякая измеримая на интервале $(0, 2\pi)$ функция есть сумма почти всюду сходящегося (вообще говоря, не единственного) тригонометрического ряда, не всегда являющегося рядом Фурье своей суммы.

Пространство с мерой $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \omega)$, по построению, изоморфно пространству $([0,1), m)$, поэтому всякая функция f из $L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \omega)$ есть образ функции из $L^2([0,1), m)$ при отображении, сопряженном с отображением I: $I^*(f)(\cdot) = f(I^{-1}(\cdot))$. Но функция f переходит в последовательность своих коэффициентов Фурье:

$$\{\widehat{f}_n\}_{n\in\mathbb{Z}} = \left\{ \int_0^1 e^{2\pi i n\lambda} \cdot f(\lambda) d\lambda \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

С другой стороны, последовательность $\{\widehat{f}_n\}$ определяет линейный измеримый функционал на линейном пространстве с мерой $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \omega)$ по формуле

$$\langle \widehat{f}, x\rangle := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n x_n$$

при почти всех по мере ω (но не при всех) $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$. □

Таким образом, построено пространство $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \omega)$ с непрерывной свободной мерой.

Для иных построений векторного пространства с непрерывной свободной мерой достаточно найти такую счетную систему измеримых функций $\{f_n\}, n \in N$ на $[0,1]$ (или на другом пространстве Лебега с непрерывной мерой), для которой любая измеримая функция на этом пространстве представляется в виде ряда по этой системе, сходящегося почти всюду на $[0,1]$.

Еще одно построение таково. Рассмотрим пространство $\widehat{H}$ – ядерное расширение пространства $L^2([0,1],m)$; оно содержит обобщенные собственные функции оператора умножения на любую ограниченную измеримую функцию, то есть оно содержит дельта-функции $\delta_x, x \in [0,1]$. Перенесем на множество обобщенных собственных функций меру m с помощью тавтологического отображения $x \mapsto \delta_x$, и мы получим пространство $\widehat{H}$ со свободной мерой.

Все эти примеры изоморфны между собой, как утверждает теорема об изоморфизме векторных пространств с мерой, имеющих одно и то же пространство измеримых линейных функционалов.

Интерес представляют и другие модели свободной меры в векторном пространстве, приспособленные к той или иной вероятностной или операторной задаче.

4.3. Свойства векторных пространств со свободной мерой. Приведем с небольшими пояснениями ряд полезных свойств свободных мер.

Теорема 4. 1. *Всякое векторное пространство с мерой есть линейный гомоморфный* mod 0 *образ векторного пространства со свободной непрерывной мерой.*

Таким образом, свободная мера играет роль универсального объекта в категории векторных пространств с мерой.

2. *Всякий сохраняющий меру автоморфизм пространства со свободной мерой является* mod 0 *линейным автоморфизмом пространства. Тем самым, группа всех классов автоморфизмов пространства Лебега с непрерывной мерой есть подгруппа группы линейных автоморфизмов пространства со свободной мерой.*

3. *Всякое измеримое разбиение пространства со свободной мерой* mod 0 *совпадает с разбиением на классы смежности по некоторому векторному подпространству. Тем самым, решетка всех классов измеримых разбиений пространства Лебега с непрерывной мерой есть подрешетка решетки аффинных разбиений векторного пространства.*

Доказательство. 1. Это следует из общего факта, утверждающего, что включение пространства линейных измеримых функционалов $\mathrm{Lin}(E_1,\mu_1)$ в другое такое пространство (E_2,μ_2) равносильно тому, что пространство (E_1,μ_1) изоморфно фактор-пространству пространства (E_2,μ_2). Описанная выше модель векторного пространства с мерой позволяет легко в этом убедиться. Измеримое разбиение, по которому производится факторизация, есть в точности разбиение, порожденное образом вложенного подпространства.

2. Вытекает из определения свободной меры. Подробности в [2,6].

3. Подалгебра алгебры функций L^∞, постоянных на элементах разбиения, определяет аффинное измеримое разбиение пространства со свободной мерой. Его изоморфность с исходным разбиением вытекает из совпадения подалгебр функций, постоянных на элементах разбиений. $\square$

Ядро пространства со свободной мерой в смысле определения предыдущего параграфа есть нулевое подпространство, поскольку именно оно есть общая область задания всех линейных измеримых функционалов.

Понятие свободной меры позволяет устанавливать соответствие между геометрическими конструкциями в пространствах с мерой и их функционально-аналитическими аналогами в пространствах измеримых функций. В этом состоит основное назначение этого понятия.

§5. Приложения: квазиинвариантные меры и спектральная теорема

5.1. Квазиинвариантные меры в векторных пространствах.

Определение 7. *Мера в векторном пространстве называется квазиинвариантной, если ее ядро полно (то есть различает измеримые линейные функционалы) и сдвиг на любой элемент ядра переводит меру в абсолютно непрерывную.*

Гауссова мера является квазиинвариантной в приведенном смысле. Это наблюдение восходит к известной теореме Камерона-Мартина 40-х гг. о винеровской мере и неоднократно по разным поводам передоказывалось (теорема Дж. Федльмана об эквивалентных гауссовых мерах). Вокруг семинара Гельфанда в конце 50-х годов эта тема была особенно популярна и оформилась в виде схемы Гельфанда–Сигала. Представления канонических коммутационных соотношений и многое другое опирались на это свойство гауссовых мер. В этой связи можно упомянуть также имена В. Н. Судакова, И. В. Гирсанова и других. Известны и негауссовы квазиинвариантные меры (А. В. Скороход, А. М. Вершик и др.). Мы сформулируем лишь одно свойство, рассмотренное кратко в работе [3], связанное с пространством линейных измеримых функционалов. Каждому сдвигу, переводящему меру в абсолютно непрерывную меру, соответствует линейный непрерывный оператор в пространстве всех измеримых функций, который переводит линейный измеримый функционал в сумму его с некоторой константой, линейно зависящей от функционала. Иначе говоря, допустимый сдвиг определяет непрерывный линейный функционал на пространстве линейных измеримых функционалов, то есть точку ядра:

$$(T_h f)(x) = f(x+h) = f(x) + f(h), \quad U_{T_h} f = f + \langle c, h\rangle 1.$$

Домножая оператор U_{T_h} на квадратный корень из плотности преобразованной меры относительно исходной, мы получим унитарный оператор в L^2. Это дает потенциальный способ описания квазиинвариантных мер как мер, для которых пространство линейных измеримых функционалов допускает оператор, продолжающийся до оператора во всем пространстве измеримых функций (или в L^2).

5.2. Спектральные меры не локально компактных абелевых групп. Спектральная теория абелевых локально компактных групп унитарных операторов основывается на теории характеров для этих групп: спектральная мера унитарного представления такой группы есть мера на группе ее непрерывных характеров; при этом общая теория для произвольной абелевой локально компактной группы мало отличается от случая групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

При переходе к не локально компактным абелевым группам положение меняется, так как группа непрерывных характеров в обычном смысле, то есть группа непрерывных положительных гомоморфзимов группы в окружность, даже тогда, когда характеров достаточное число (то есть они различают элементы группы, а иногда этого нет) может не хватать для построения спектральной теории представлений. Причина этого как раз в том, о чем шла речь выше: положительно определенных функций на группе может быть “больше”, чем вероятностных мер на группе непрерывных характеров. Иначе говоря, теорема Бохнера неверна. Например, для аддитивной группы бесконечномерного вещественного гильбертова пространства H теорема Сазонова как раз и определяет дополнительное условие на положительно определенную функцию f на H, которое гарантирует, что функция есть преобразование Фурье некоторой меры на двойственном пространстве (то есть на группе характеров) – это условие и есть непрерывность f в ядерной топологии на H, то есть усиленная непрерывность. Заметим, что для других банаховых пространств таких условий, вообще говоря, нет, или они не являются чисто топологическими (то есть условиями непрерывности в некоторой ослабленной топологии).

Но эта же теорема дает рецепт для построения спектральной меры для циклических представлений аддитивной группы бесконечномерного гильбертова пространства. Следующая теорема о спектральном разложении унитарного представления аддитивной группы гильбертова пространства есть следствие теоремы Сазонова в нужной форме.

Теорема 5. *Всякое непрерывное унитарное циклическое представление* π (*т.е представление с циклическим вектором*) *аддитивной группы бесконечномерного сепарабельного гильбертова пространства* H *операторами в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}$,

$$g \mapsto \pi(g), g \in H,$$

допускает единственную спектральную реализацию в виде прямого интеграла с одномерными слоями, то есть пространства $L^2_\mu(\bar{H};\mathbb{C})$, *где* $\bar{H}$ *– произвольное ядерное расширение пространства* H, *а* μ *– некоторая мера* (*спектральная мера*) *в пространстве* $\bar{H}$, *определенная с точностью до абсолютной непрерывности; она полностью определена, если в представлении* π *выбран циклический элемент нормы 1:*

$$\mathcal{H} = \int_{\bar{H}}^{\oplus} \mathbb{C}\, d\mu.$$

Операторы представления являются мультипликаторами:

$$(\pi(g)F)(h) = e^{i\langle h,g\rangle}F(h), \quad F \in L^2(\bar{H},\mu) = \mathcal{H},\ h \in \bar{H},$$

где билинейное спаривание $\langle h, g\rangle$ *и дает значение измеримого линейного функционала* g *на элементе* h *пространства с мерой* $\bar{H}$.

Таким образом, различие с классической теоремой о спектральном разложении унитарного циклического представления абелевой группы состоит в замене группы непрерывных аддитивных характеров, по которой берется прямой интеграл, на группу измеримых аддитивных характеров (= линейных измеримых функционалов), которая изучалась в этой работе.

Доказательство и свойства этого разложения – такие же, как и в классическом локально компактном случае. Выбор аддитивной группы гильбертова пространства в качестве рассмотренного примера связан с его важностью в теории представлений не локально компактных групп (см., например, [17, 18]). С другой стороны, в этом случае группа измеримых характеров, как мы видели, имеет простое описание.

Заключим этот пункт замечанием о том, что определение и свойства обычных операций над мерами (свертка мер, выпуклые комбинации и др.), что необходимо при анализе спектральных мер унитарных представлений, ничем не отличаются от таких же определений и свойств для случая непрерывных характеров, коль скоро измеримые характеры (=линейные измеримые функционалы) корректно определены. Приведенные соображения существенны для теории представлений не локально компактных групп, в том числе для теории представлений неабелевых групп токов (см. например, [17, 18]).

5.3. Действия не локально компактных групп с квазиинвариантной мерой и факторы фон Нейманна. С точки зрения теории динамических систем изучение действия не локально компактных абелевых групп с квазиинвариантной мерой, подобно рассмотренному выше, ставит совершенно новую и, по-видимому, никем не исследованную задачу. В нашем примере, это действие аддитивной группы гильбертова пространства – l^2 сдвигами на элементы ядра в пространстве $\mathbb{R}^\infty$ со стандартной гауссовой мерой. Эта задача состоит в том, как квалифицировать траекторные разбиения таких действий. В упомянутом примере речь идет о разбиении пространства (гильбертова или $\mathbb{R}^\infty$ с гауссовой мерой на классы смежности по подпространтсву l^2). Это разбиение пространства с мерой определено корректно $\mod 0$, оно не является, разумеется, измеримым, но оно и не является изоморфным никакому траекторному разбиению локально компактной группы, действующей с квазиинвариантной мерой.

Очевидно, также, что оно не является гиперконечным, (или в других терминах "ручным"), т.е. не есть предел убывающей последовательности измеримых разбиений. Парадоксальность этого факта в том, что все действия с инвариантной или квази-инвариантной мерой локально компактных абелевых и даже аменабельных групп, являются, как известно, ручными (см. [20]). Это даже дало основание автору работы [21] считать аддитивную группу пространства l^2 неаменабельной группой. Вряд ли это оправдано, поскольку все же абелевы группы (даже и не локально компактные) – аменабельны в начальном (фон-неймановском) смысле – на них существует инвариантное среднее.

Напомним, что эргодические действия аменабельных локально компактных групп с инвариантной мерой траекторно изоморфны, это упомянутое выше обобщение известной теоремы Дая. Действия таких групп с квазииваринтной мерой являются ручными [20], и есть удовлетворительная классификация их траекторных разбиений и их инвариантов (типа перечня отношений) – см. работы A. Connes, W. Kriger, H. Araki-Woods, A. Vershik, и др.). Встает вопрос об аналоге этих теорем, пусть даже в очень специальной формулировке: каковы траекторные инварианты эргодических действий аддитивной группы l^2 с квазиинвариантной мерой? Более того, изоморфны ли эргодические действия аддитивной группы l^2 с различными гауссовыми мерами? Задача тесно связана с классификацией регулярных подалгебр в факторах фон Нейманна. Более точно, рассмотрим купмановское и фон-неймановское унитарные представления, порожденные такими действиями. Операторы купмановского представления действуют в пространстве $L^2(\bar{H})$ как операторы сдвига аргумента с одновременным умножением на кватратный корень из сответствующей плотности. Спектральную теорию этого представления для случая l^2 можно исследовать способом, указанным в предыдущем пункте (5.2). А второе – фон-неймановское – представление устроено более сложно, оно не укладывается в обычную схему представлений скрещенных произведений, поскольку для не локально компактных групп нет естественной групповой C^*-алгебры. Для локально компактных групп и более широко для локально компактных группоидов есть конструкция, обобщающая исходную конструкцию фон Неймана, она задает фактор и его коммутант, порожденные правым и левым действиями элементов группы и операторами умножения на ограниченные измеримые функции. Но наш случай существенно отличается от локально компактного тем, что гильбертово пространство, в котором определены факторы, не есть L^2 построенное по мере, сосредоточенной на траекторном отношении эквивалентности, т.е это не есть классическая группоидная конструкция. Хотя группоид по действию определется точно также, но мера самого отношения эквивалентности (как подмножества прямого произведения пространства $\bar{H}$ на себя) равна нулю, поэтому не существует оператора математического ожидания и само построение фактора нетривиально. Оно намечено в работе [6]. Его можно реализовать также с помощью полиморфизмов. Все дело в том, что соответствующая регулярная максимальная самосопряженная абелева подалгебра (MASA) не является картановской, для которой условное математическое ожидание сущестует. Такие подалгебры, насколько известно автору, никем не изучались. Уже вопрос о гиперконечности подобных факторов и их типе не вполне тривиален. В нашем случае несложно доказать, что фактор гиперконечен. Скорее всего, он имеет тип III_1, но это пока, как будто, никем не доказывалось. Более широко речь идет о нестандартных максимальных регулярных подалгебрах в гиперконечных факторах типа III без условных ожиданий. Это, по-видимому, новый круг вопросов в теории алгебр фон Неймана. Автор благодарит R. Longo и S. Popa, подтвердивших это мнение.

Литература

1. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* — М. ФМЛ. (1961).
2. А. М. Вершик, *Измеримая реализация непрерывных групп автоморфизмов унитарного кольца.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **29**(1965), 127–136.
3. А. М. Вершик, *Двойственность в теории меры в линейных пространствах.* — ДАН СССР **170** (1966), 497–500 .
4. А. М. Вершик, *Двойственность в теории меры в линейных пространствах.* —- В сб.: Междунар. матем. конгресс. Тезисы научн. сообщений. Секц. 5, с. 39. М. (1966).
5. А. М. Вершик, *Аксиоматика теории меры в линейных пространствах.* — ДАН СССР **178**, No. 2 (1968), 278–281.
6. А. М. Вершик, *Измеримые реализации групп автоморфизмов и интегральные представления положительных операторов.* — Сиб. мат. журн. **28**, No. 1 (1987), 52–60.
7. А. М. Вершик, *Теория фильтраций подалгебр, стандартность и независимость.* — УМН, **72**, No.2 (2017), 67–146.
8. А. М. Вершик, *Случайные и универсальные метрические пространства.* — В сб. Фундаментальная математика сегодня. К десятилетию НМУ. М., НМУ, МЦНМО (2003).
9. А. М. Вершик, В. Н. Судаков, *Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **12** (1969), 7–67.
10. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, *Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Обобщенные функции.* — Физматгиз М., **5** (1962).
11. Л. Н. Довбыш, В. Н. Судаков, *О матрицах Грама–де Финетти. Проблемы теории вероятностных распределений.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ, **119** (1982), 77–86.

12. В. А. Рохлин, *Об основных понятиях теории меры.* — Матем. сб. **25**(67), No. 1 (1949), 107–150.
13. А. В. Скороход, *Интегрирование в гильбертовом пространстве.* Наука. М. (1975).
14. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Тр. МИАН СССР, **141** (1976), 3–191.
15. Г. Е. Шилов, Фан Дык Тинь, *Интеграл, мера, производная на линейных пространствах.* Наука (1967).
16. E. Glasner, B. Tsirelson, B. Weiss, *The automorphism group of the Gaussian measure cannot act pointwise.* — Israel Journal of Mathematics, **148** (2005), 305–329.
17. S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn, D. Testard, A. Vershik, *Factorial representations of path groups.* — J. Funct. Anal. **51**, No. 1 (1983), 115–131.
18. I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Representations of the group of functions taking values in a compact Lie group.* — Compos. Math. **42**, No. 2 (1980), 217–243.
19. G. W. Mackey, *Point realization of transformation groups.* — Ill. J. Math. **6**, No.2 (1962), 1927–1933.
20. A. Connes, J. Feldman, B. Weiss, *An amenable equivalence reltion is generated by single transformation.* — Erg. Theor. Dyn. Syst., **1**, No. 4 (1981), 431–450.
21. S. Thomas, *A descriptive view of unitary group representations.* — J. European Math. Soc., 017.7 (2015), 1761–1787.
22. S. Albeverio, B. K. Driver, M. Gordina, A. Vershik, *Equivalence of the Brownian and energy representations.* — Zap. Nauchn. Semin. POMI, **441** (2015), 17–44.
23. I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik, *Models of representations of current grups.* In: Representations of Lie algebras (Budapest, 1971), Akad. Kiado. Budapest (1985).

Vershik A. M. Duality and free measures in vector spaces; spectral theory and the actions of non locally compact groups.

The paper presents a general duality theory for vector measure spaces taking its origin in the author's papers written in the 60-s. The main result establishes the direct correspondence between the geometry of a measure in a vector space and the properties of the space of measurable linear functionals on this space viewed upon as closed subspaces of an abstract space of measurable functions. An example of useful new features of this theory is the notion of free measure as well as its applications.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: a.vershik@pmail.com

Поступило 8 июля 2017 г.