Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 457, 2017 г.

В. И. Богачев[a,b,c], **А. Н. Калинин**[a], **С. Н. Попова**[a]

О РАВЕНСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ В ЗАДАЧАХ МОНЖА И КАНТОРОВИЧА

Памяти Владимира Николаевича Судакова

Наша статья посвящена исследованию условий, при которых задачи Монжа и Канторовича с непрерывной функцией стоимости на произведении двух вполне регулярных пространств и двумя заданными безатомическими радоновскими мерами-проекциями на эти пространства имеют совпадающие значения соответствующих инфимумов. Основной результат состоит в том, что неулучшаемым условием для этого является возможность перевода измеримым преобразованием всякой части первой меры во всякую часть второй меры такой же полной массы. Ранее этот факт был известен в случае полных сепарабельных метрических пространств (см. [38]) и, более общим образом, пространств с метризуемыми компактами (см. [13]). Нами также показано, что условие непрерывности функции стоимости можно ослабить до так называемой виртуальной непрерывности, обсуждаемой в [7].

Напомним, что для заданных вероятностных пространств $(X, \mathcal{A}, \mu)$ и $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ и неотрицательной измеримой функции h на произведении $X \times Y$, называемой функцией стоимости, задача Монжа заключается в нахождении величины

$$M_h(\mu, \nu) = \inf_T M_h(\mu, T), \quad M_h(\mu, T) := \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx),$$

где inf берется по всем измеримым отображениям $T\colon X \to Y$, переводящим меру μ в меру ν, т.е. $\mu \circ T^{-1} = \nu$, где образ меры μ при отображении T задается формулой

$$(\mu \circ T^{-1})(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Условие измеримости T, т.е. включение $T^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ при всех $B \in \mathcal{B}$, обеспечивает корректность определения этого объекта. Разумеется, такую задачу разумно ставить в случае, когда существует хотя бы

Ключевые слова: задача Монжа, задача Канторовича, мера Радона.
Работа поддержана грантом РФФИ 17-01-00662.

одно преобразование первой меры во вторую. При этом инфимум может не достигаться, но если минимум существует, то доставляющее его отображение T называется оптимальным. Нахождение оптимального отображения и выяснение его свойств также принято относить к кругу задач Монжа.

Класс всех измеримых отображений, переводящих μ в ν, обозначим через $T(\mu,\nu)$.

Сам Г. Монж [37] рассматривал эту проблему в специальном случае, когда меры μ и ν были ограничениями обычного объема на два ограниченных множества в трехмерном пространстве или на плоскости со стандартной площадью, а функция стоимости была обычным расстоянием (интеграл от функции стоимости выражал собой стоимость переноса грунта с сохранением суммарного объема). Поставленные им вопросы касались некоторых геометрических свойств оптимального отображения, а вопрос о его существовании не поднимался (например, Аппель [19], получивший награду Академии наук за решение проблемы Монжа, установил ряд специальных свойств решений в предположении их существования).

Через полтора столетия после работы Монжа Л. В. Канторович [9] предложил свою задачу, состоявшую в минимизации величины

$$K_h(\sigma) = \int_{X\times Y} h(x,y)\,\sigma(dx\,dy)$$

по мерам σ из множества $\Pi(\mu,\nu)$ радоновских вероятностных мер, для которых проекция на X есть μ, а проекция на Y есть ν. Таким образом, рассматривается величина

$$K_h(\mu,\nu) = \inf\{K_h(\sigma)\colon\ \sigma\in\Pi(\mu,\nu)\}.$$

При отсутствии мер в $\Pi(\mu,\nu)$, по которым интеграл от h конечен, полагаем $K_h(\mu,\nu)=+\infty$. Если h — липшицева функция на метрическом пространстве с метрикой d, то величина $K_h(\mu,\nu)$ конечна для мер μ и ν с конечным первым моментом, т.е. интегрирующих функцию $d(x,x_0)$ для какой-либо фиксированной точки x_0. Краткая заметка [9] с довольно абстрактными результатами была этапом начатой ранее в [8] обширной программы Л. В. Канторовича исследования весьма прикладных задач оптимизации, позже принесшей ему мировую славу.

В отличие от задачи Монжа, для ограниченной функции стоимости в задаче Канторовича инфимум существует всегда, ибо множество

$\Pi(\mu,\nu)$ непусто: в нем есть хотя бы произведение $\mu\otimes\nu$ данных мер (это верно и для неограниченных функций h при наличии мер в $\Pi(\mu,\nu)$, относительно которых интеграл от h конечен). Если существует мера в $\Pi(\mu,\nu)$, на которой достигается минимум, то она называется оптимальной мерой или оптимальным планом Канторовича. Такая мера существует не всегда, но в случае радоновских мер на вполне регулярных пространствах и ограниченной непрерывной функции стоимости она существует. Это довольно просто можно усмотреть из того, что множество $\Pi(\mu,\nu)$ оказывается компактным в слабой топологии, а интеграл от функции стоимости представляет собой непрерывную линейную функцию. Таким образом, вместо трудной нелинейной задачи Монжа возникает задача минимизации линейной функции на компакте. О старинной задаче Монжа Л. В. Канторович узнал в связи с празднованием 200-летия Монжа в Академии наук СССР уже после выхода работы [9]. В [10] он даже сделал не вполне точное замечание о соотношении его более общей задачи с задачей Монжа (было сказано, что его задача содержит задачу Монжа как частный случай). Однако затем было понято, что ситуация не столь проста, несмотря на наличие весьма содержательных связей. С одной стороны, для всякого отображения T, переводящего меру μ в ν, мы получаем меру из $\Pi(\mu,\nu)$, взяв образ меры μ при отображении

$$G\colon\ x\mapsto (x,T(x)).$$

Мера $\mu\circ G^{-1}$ сосредоточена на графике T и очевидным образом имеет проекции μ и ν на сомножители. При этом

$$\int\limits_{X\times Y} h(x,y)\,\mu\circ G^{-1}(dx\,dy)=\int\limits_X h(x,T(x))\,\mu(dx)$$

по формуле замены переменных для индуцированных мер (см. [24, теорема 3.6.1]). Поэтому всегда

$$K_h(\mu,\nu)\leqslant M_h(\mu,\nu).$$

С другой стороны, имеются простые примеры, показывающие, что для разрывных ограниченных функций стоимости на квадрате неравенство может быть строгим (такой пример приведен ниже). Правда, в первые годы исследования задачи Канторовича было принято рассматривать непрерывные функции стоимости и даже такие весьма специальные, как метрики на метрических компактах (см. [11, 12]).

Уже в этом случае, остающемся весьма актуальным и в современных исследованиях, причем даже в случае $\mathbb{R}^n$ с мерами, абсолютно непрерывными относительно лебеговской, были осознаны весьма значительные трудности, возникающие при решении задачи Монжа: стало понятно, что в высшей степени неочевидно существование оптимальных отображений (ранее предполагавшееся само собой разумеющимся). Вопрос об этом ставился А. М. Вершиком [5], а первое доказательство было предложено В. Н. Судаковым в 1976 году в его ставшей ныне классической работе [14] в случае абсолютно непрерывных мер на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ и функции стоимости, равной некоторой норме (необязательно евклидовой). Доказательство, основанное на тонких свойствах условных мер, было трудным и довольно длинным. Видимо, по этой причине лишь через двадцать с лишним лет (а именно в 2000 году) обнаружился пробел в рассуждениях. Более того, был построен контрпример к одному промежуточному утверждению из доказательства Судакова, связанному с сингулярностью условных мер (см. [17, 18]). Незадолго до обнаружения этого пробела Л. Эванс и У. Гангбо в работе [33] с помощью методов нелинейных уравнений установили существование решения задачи Монжа в случае стандартной нормы $\mathbb{R}^n$ (и некоторых других норм) и липшицевости плотностей обеих мер. Естественно, после обнаружения упомянутого пробела интерес к нахождению полного обоснования возрос. В работах Трудингера, Ванга [40] и Каффарелли, Фельдмана, Маккэна [25] существование оптимальной транспортировки Монжа было установлено для любых абсолютно непрерывных мер μ и ν и по-прежнему стандартной евклидовой нормы. Амброзио [15] снял условие абсолютной непрерывности второй меры. В этих работах были развиты новые подходы, хотя идеи В. Н. Судакова продолжали играть существенную роль.

Тем не менее проблема полной реабилитации утверждения Судакова (для всех норм) оставалась открытой, что отмечали Амброзио, Кирхайм и Прателли [17], распространившие положительный результат на новый класс норм (в случае $\mathbb{R}^2$ на класс всех норм) и построившие примеры, показывающие характер возникающих трудностей при осуществлении программы Судакова. Новый подход был развит Шампьоном и Де Паскалем [29], в этом подходе не использовалась редукция к одномерному случаю, но сначала был охвачен только случай строго выпуклых норм. Лишь в следующей их работе [30], вышедшей в 2011 году (см. также их обзор [31]), т.е. спустя 35 лет после публикации работы Судакова [14] и более 10 лет после обнаружения в ней пробела, удалось полностью реабилитировать утверждение Судакова для произвольных норм на $\mathbb{R}^n$.

Иное доказательство для строго выпуклых норм было дано Л. Каравенной в работе [26]. Позже в [27] она предложила новое обоснование общего случая, использующее подход из [17] и [18] с приближениями произвольной нормы $\|\cdot\|$ малыми добавками стандартной нормы вида $\|\cdot\|_\varepsilon = \|\cdot\| + \varepsilon|\cdot|$ и контроль сходимости соответствующих оптимальных отображений.

Наконец, в недавней работе Бьянкини и Данери [23] дано подробное обоснование метода Судакова для произвольных норм, так что не только верен сам результат Судакова, но и полностью реабилитирован его подход. В беседах с первым автором настоящей статьи в конце 2015 года В.Н. Судаков выражал большое удовлетворение тем, что целый ряд крупных специалистов (Л. Амброзио, Б. Кирхайм, А. Прателли, Л. Эванс, У. Гангбо, Н. Трудингер, Ш. Ванг, Л. Каффарелли, М. Фельдман, Р. Маккэн, Т. Шампьон, Л. Де Паскаль и другие) привлекли внимание к этой задаче, тщательно проверили имевшееся обоснование, устранили найденные в нем пробелы и предложили новые подходы, что значительно обогатило всю эту область и способствовало постановкам новых интересных задач. В случае многообразий близкие результаты получены в [22, 28] и [34].

Тем не менее признанные специалистами упомянутые новые обоснования остаются весьма сложными технически. Мало того, что они несравнимо сложнее совершенно тривиального доказательства существования оптимальных мер Канторовича, так еще и требуются гораздо более специальные условия (вместо общих радоновских мер на произвольных пространствах речь идет о мерах на $\mathbb{R}^n$, немногим более общих, чем абсолютно непрерывные, а допустимые функции стоимости тоже весьма специальны), причем все эти дополнительные ограничения очень существенны для справедливости результата. Поэтому для специалистов весьма неожиданным был установленный в работе Прателли [38] факт (обобщавший ранее полученный Л. Амброзио в [15] результат для мер на выпуклых компактах в $\mathbb{R}^n$), что для непрерывных функций стоимости на полных сепарабельных метрических пространствах с мерами без атомов имеет место равенство

$$M_h(\mu,\nu) = K_h(\mu,\nu).$$

Позже в работе [13] был доказан еще более общий факт, что это же верно в случае пространств, в которых метризуемы компакты (например суслинских). В обзоре [3] было воспроизведено доказательство этого результата с уточнением некоторых деталей (однако с небольшими техническими погрешностями, на которые нам недавно указал Г.И. Зеленов). Затем в [2] был построен пример, показывающий, что для безатомических мер Радона на произвольных (неметризуемых) компактах равенство может нарушаться, даже если дополнительно потребовать существование отображений первой меры во вторую (без этого требования пример строится тривиально, достаточно взять меру Лебега на $[0,1]$ и ее континуальную степень). Для удобства читателя этот пример воспроизведен ниже. В [3] было высказано предположение, что равенство остается в силе в случае сепарабельных мер Радона (т.е. имеющих сепарабельные L^2), а также при более общем условии существования преобразований частей меры μ в части меры ν той же массы. Из доказываемой ниже теоремы вытекает справедливость этих предположений. В заключение этого введения отметим, что задачам Монжа и Канторовича посвящена обширная литература, в том числе целый ряд монографий и обзоров, см. [1, 16, 39, 41], а также [3, 6].

Напомним (см. [24, гл. 7]), что неотрицательная мера μ на σ-алгебре $\mathcal{B}(X)$ борелевских множеств топологического пространства X (т.е. наименьшей σ-алгебре, содержащей все открытые множества) называется радоновской, если для всякого борелевского множества $B \subset X$ и всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset B$, что $\mu(B\backslash K) < \varepsilon$.

Напомним также, что сепарабельной называется мера μ на σ-алгебре $\mathcal{B}$, для которой сепарабельно $L^2(\mu)$; это равносильно тому, что имеется такое счетное семейство множеств в $\mathcal{B}$, что всякое множество из $\mathcal{B}$ совпадает с множеством из σ-алгебры, порожденной этим семейством, с точностью до множества меры нуль.

Частью меры будем называть ее ограничение на измеримое множество.

Известно (см. [24, теоремы 9.3.4 и 9.12.24] или [35, теорема 343B], а также [32]), что всякую безатомическую вероятностную радоновскую меру μ можно с помощью измеримого отображения преобразовать во всякую сепарабельную вероятностную радоновскую меру. Для этого достаточно уметь преобразовывать меру Лебега на $[0,1]$ во всевозможные сепарабельные вероятностные радоновские меры, поскольку в меру Лебега нетрудно перевести какую угодно безатомическую вероятностную меру (см. [24, предложение 9.1.11]). Отметим, что наличие таких преобразований в обе стороны не означает существования изоморфизма пространств с мерами.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, $h \geqslant 0$ — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — безатомические вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно. Предположим, что всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры ν той же самой полной массы (что выполнено, если меру μ можно преобразовать в меру ν, а всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть этой же меры μ той же полной массы). Тогда*

$$K_h(\mu, \nu) = M_h(\mu, \nu).$$

Если существует мера $\sigma \in \Pi(\mu, \nu)$, относительно которой функция h интегрируема, то в левой части инфимум превращается в минимум (это следует из того, что слабо компактным будет подмножество в $\Pi(\mu, \nu)$, состоящее из мер, интегралы по которым от h не больше, чем интеграл от h по мере σ). В частности, так будет, если $h \in L^1(\mu \otimes \nu)$. Если же таких мер нет, то обе части равенства равны бесконечности.

Как и в работах [38] и [13], наше доказательство использует деление пространства $X \times Y$ на части с малым колебанием функции стоимости, однако реализация этой идеи несколько отлична от цитированных работ, что приводит к некоторым упрощениям (в частности к немного более короткому доказательству) при большей общности утверждения.

Лемма 1. *Пусть X и Y — вполне регулярные топологические пространства, h — непрерывная функция на $X \times Y$, μ и ν — вероятностные радоновские меры на X и Y соответственно. Пусть $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$. Если μ и ν не имеют атомов, то для всякого $\varepsilon > 0$ существуют последовательности борелевских множеств $A_n \subset X$, $B_n \subset Y$ и $X_n \subset A_n$, $Y_n \subset B_n$ со следующими свойствами:*

1) $\sup_{(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A_n \times B_n} |h(x_1, y_1) - h(x_2, y_2)| < \varepsilon$,

2) $(A_n \times B_n) \cap (A_k \times B_k) = \varnothing$ *при* $n \neq k$,

3) $\gamma\Bigl(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \times B_n)\Bigr) = 1$,

4) $\mu(X_n \cap X_k) = 0$, $\nu(Y_n \cap Y_k) = 0$ *при* $n \neq k$,

5) $\mu(X_n) = \nu(Y_n) = \gamma(A_n \times B_n)$.

Доказательство. Так как μ и ν — радоновские меры, то существуют такие компакты $K_n^1 \subset X$, $K_n^2 \subset Y$, что $\mu(X \backslash K_n^1) < n^{-1}$, $\nu(Y \backslash K_n^2) < n^{-1}$. Можно считать, что $K_n^1 \subset K_{n+1}^1$, $K_n^2 \subset K_{n+1}^2$. Для каждой точки компакта $K_n^1 \times K_n^2$ найдем ее окрестность вида $U \times V$, в которой разброс значений h меньше ε. Выберем конечное подпокрытие $K_n^1 \times K_n^2$ такими окрестностями вида $U_k^n \times V_k^n$, затем заменим U_k^n и V_k^n на $U_k^n \cap K_n^1$ и $V_k^n \cap K_n^2$ соответственно. Переходя к конечным пересечениям, получим (при фиксированном n) непересекающиеся измеримые множества $A_k^n \times B_k^n$, покрывающие $K_n^1 \times K_n^2$. Переходя к измельчению, можно считать, что если $A_k^n \cap A_l^{n-1} \neq \varnothing$, то $A_k^n \subset A_l^{n-1}$, а если $A_k^n \cap A_l^n \neq \varnothing$, то $A_k^n = A_l^n$ (и то же самое для B_k^n). При этом разброс значений h на каждом из множеств $A_k^n \times B_k^n$ меньше ε. Тогда прямоугольники

$$(A_k^n \setminus K_{n-1}^1) \times B_k^n, \quad (A_k^n \cap K_{n-1}^1) \times (B_k^n \setminus K_{n-1}^2)$$

попарно не пересекаются и покрывают объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (K_n^1 \times K_n^2)$. Полученный счетный набор прямоугольников занумеруем по порядку (нумеруя покрывающие множества для $K_1^1 \times K_1^2$, $K_2^1 \times K_2^2$ и т.д.) и обозначим через $A_n \times B_n$. Эти прямоугольники обладают свойствами 1), 2) и 3). При этом

$$\text{либо } A_n \cap A_k = \varnothing, \quad \text{либо } A_n \subset A_k \text{ и } k \leqslant n$$

(и то же самое для B_n).

Построим множества $X_n \subset A_n$ со свойствами 4) и 5). Возьмем множество $X_1^1 \subset A_1$ с $\mu(X_1^1) = \gamma(A_1 \times B_1)$. Такое множество найдется, так как для всякого измеримого множества $A \subset X$ меру $\mu|_A$ (ограничение μ на A) можно преобразовать в меру Лебега на отрезке $[0, \mu(A)]$. Поэтому для каждого числа $t \leqslant \mu(A)$ множество B, равное прообразу $[0, t]$ при таком преобразовании, будет обладать свойством $\mu(B) = t$. Будем брать множества

$$X_i^1 \subset A_i \ \text{ с } \ \mu(X_i^1) = \gamma(A_i \times B_i)$$

до тех пор, пока они попарно не пересекаются. Пусть $k_1 - 1$ — последний номер, для которого это еще возможно. Возьмем какое-либо множество $X_{k_1}^2 \subset A_{k_1}$ меры $\gamma(A_{k_1} \times B_{k_1})$, которое уже пересекается с каким-то из предыдущих. Для $j = k_1 - 1, \ldots, 1$ последовательно введем множества

$$C_j^1 = X_j^1 \cap \Bigl(\bigcup_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} X_l^2 \Bigr),$$

$$R_j^1 := A_j \setminus \Bigl(X_j^1 \cup \bigcup_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} X_l^2 \Bigr),$$

$$D_j^1 \subset R_j^1, \quad \mu(D_j^1) = \mu(C_j^1), \quad X_j^2 := (X_j^1 \setminus C_j^1) \cup D_j^1,$$

где при каждом j мы определяем сначала C_j^1 и R_j^1, затем находим D_j^1 и последним задаем X_j^2, причем к этому моменту множества X_l^2 при $l > j$ уже определены.

Проверим, что наше построение корректно, т.е. возможен последовательный выбор множеств D_j^1 с убывающим j. Для этого нужно доказать, что для каждого j верна оценка $\mu(R_j^1) \geqslant \mu(C_j^1)$, поэтому можно выбрать множество D_j^1 с нужным свойством. Предположим, что при всех $l \in \{j+1,\dots,k_1-1\}$ множества D_l^1 и X_l^2 уже определены. Тогда при всех $l \in \{j+1,\dots,k_1-1\}$ имеем $\mu(X_l^2) = \mu(X_l^1) = \gamma(A_l \times B_l)$, так как

$$X_l^2 = (X_l^1 \setminus C_l^1) \cup D_l^1, \quad C_l^1 \subset X_l^1, \quad D_l^1 \cap X_l^1 = \varnothing$$

и $\mu(C_l^1) = \mu(D_l^1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}\mu(R_j^1) &= \mu(A_j) - \mu\Bigl(X_j^1 \cup \bigcup_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} X_l^2 \Bigr)\\ &= \mu(A_j) - \mu(X_j^1) - \mu\Bigl(\bigcup_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} X_l^2 \Bigr) + \mu(C_j^1)\\ &= \gamma(A_j \times Y) - \gamma(A_j \times B_j) - \sum_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} \gamma(A_l \times B_l) + \mu(C_j^1).\end{aligned}$$

Напомним, что по построению множества $A_n \times B_n$ с $n \in \mathbb{N}$ попарно не пересекаются. Поэтому для всех $l = j,\dots,k_1$ таких, что $A_l \subset A_j$, множества $A_l \times B_l$ являются попарно непересекающимися подмножествами множеств $A_j \times Y$, откуда

$$\gamma(A_j \times Y) - \gamma(A_j \times B_j) - \sum_{j<l\leqslant k_1:\ A_l\subset A_j} \gamma(A_l \times B_l) \geqslant 0,$$

поэтому $\mu(R_j^1) \geqslant \mu(C_j^1)$. Мы доказали, что наше построение корректно, т.е. мы можем найти очередные множества D_j^1 и X_j^2, что в итоге позволяет дойти до $j = 1$.

Покажем, что множества $X_1^2, \dots, X_{k_1}^2$ попарно не пересекаются. Заметим, что $R_j^1 \cap X_l^2 = \varnothing$ и $(X_j^1 \setminus C_j^1) \cap X_l^2 = \varnothing$ при $l > j$ (множество X_l^2 удалено из R_j^1, а множество C_j^1 содержит $X_j^1 \cap X_l^2$, если $A_j \cap A_l \neq \varnothing$). Поэтому $X_j^2 \subset (X_j^1 \setminus C_j^1) \cup R_j^1$ имеет пустое пересечение с X_l^2 при $l > j$. Следовательно, мы получили набор множеств $X_1^2, \dots, X_{k_1}^2$, которые попарно не пересекаются. Для $i > k_1$ будем брать множества $X_i^2 \subset A_i$ с $\mu(X_i^2) = \gamma(A_i \times B_i)$, пока множества $X_1^2, \dots, X_i^2$ попарно не пересекаются. Получаем набор попарно непересекающихся множеств $X_1^2, \dots, X_{k_2-1}^2$. Возьмем множество $X_{k_2}^3 \subset A_{k_2}$ с $\mu(X_{k_2}^3) = \gamma(A_{k_2} \times B_{k_2})$.

Построим множества C_j^2, R_j^2, D_j^2 и X_j^3 при $j = k_2 - 1, \dots, 1$ по аналогии с предыдущим. Будем продолжать построение и для каждого $i \geqslant 3$ получим множества X_j^i, $j \in \{k_{i-1} + 1, \dots, k_i - 1\}$, множество $X_{k_i}^{i+1}$ и множества C_j^i, R_j^i, D_j^i, X_j^{i+1} при $j = k_i - 1, \dots, 1$, причем множества $X_1^{i+1}, \dots, X_{k_i}^{i+1}$ попарно не пересекаются.

Покажем, что $R_j^k \subset R_j^l$ при $k > l$. Достаточно доказать, что $R_j^{l+1} \subset R_j^l$. Заметим, что

$$X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j < i \leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1} \supset X_j^{l+1} \cup C_j^l \supset X_j^l.$$

Значит,

$$X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j < i \leqslant k_{l+1}\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+2} \supset X_j^{l+1} \cup \bigcup_{j < i \leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1} \supset \\ \supset X_j^l \cup \bigcup_{j < i \leqslant k_l\colon A_i \subset A_j} X_i^{l+1}.$$

Следовательно, $R_j^{l+1} \subset R_j^l$.

Покажем, что множества D_j^k попарно не пересекаются при фиксированном j. Заметим, что $D_j^l \cap R_j^{l+1} = \varnothing$, так как $R_j^{l+1} \subset A_j \setminus X_j^{l+1}$ и $D_j^l \subset X_j^{l+1}$. Отсюда следует, что при $k > l$ выполнено равенство $D_j^k \cap D_j^l = \varnothing$, ибо $D_j^k \subset R_j^k \subset R_j^{l+1}$ и $D_j^l \cap R_j^{l+1} = \varnothing$.

Заметим, что $D_j^k \cap X_j^l = \varnothing$ при $k \geqslant l$, так как $D_j^k \subset R_j^k \subset R_j^l$ и $X_j^l \cap R_j^l = \varnothing$. Отсюда следует, что $D_j^k \cap C_j^l = \varnothing$ при $k \geqslant l$, ибо $C_j^l \subset X_j^l$.

Покажем, что множества C_j^k попарно не пересекаются при фиксированном j. Заметим, что при $k > l$ имеют место включения

$$C_j^k \subset X_j^k \subset X_j^{l+1} \cup \bigcup_{l+1 \leqslant i < k} D_j^i.$$

Поскольку $X_j^{l+1} \cap C_j^l = \varnothing$ и $D_j^i \cap C_j^l = \varnothing$ при $i > l$, получаем, что $C_j^k \cap C_j^l = \varnothing$ при $k > l$.

Покажем с помощью индукции по k, что при всех n и m, для которых $n < k_m$, и при всех k верно равенство

$$X_n^{m+k} = \left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k} D_n^l\right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k} C_n^l.$$

При $k = 0$ это верно. Предположим, что равенство верно для некоторого $k \geqslant 0$. Тогда

$$\begin{aligned} X_n^{m+k+1} &= (X_n^{m+k} \setminus C_n^{m+k}) \cup D_n^{m+k} \\ &= \left(\left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k} D_n^l\right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} C_n^l\right) \cup D_n^{m+k} \\ &= \left(X_n^m \cup \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} D_n^l\right) \setminus \bigcup_{m \leqslant l < m+k+1} C_n^l, \end{aligned}$$

так как $D_n^{m+k} \cap C_n^l = \varnothing$ при $l \leqslant m + k$.

Для каждого n найдем наименьшее число m, для которого $n < k_m$, и обозначим его через $m(n)$. Положим

$$X_n = \left(X_n^{m(n)} \cup \bigcup_{l \geqslant m(n)} D_n^l\right) \setminus \bigcup_{l \geqslant m(n)} C_n^l.$$

Докажем, что для различных k и n множества X_k и X_n не пересекаются. Предположим, что существует $x \in X_k \cap X_n$. Заметим, что $x \in X_n$ тогда и только тогда, когда существует такое m_0, что $x \in X_n^m$ при всех $m \geqslant m_0$. Тогда получим, что существует такое m, что $x \in X_k^m \cap X_n^m$, что противоречит тому, что множества $X_1^m, \ldots, X_{k_m-1}^m$ попарно не пересекаются.

Легко видеть, что свойство 5) также имеет место. В самом деле, из свойств множеств D_j^i и C_j^i и включения

$$\bigcup_{l \leqslant m(n)} C_n^l \subset X_n^{m(n)} \cup \bigcup_{l \geqslant m(n)} D_n^l$$

следует равенство

$$\mu(X_n) = \mu(X_n^{m(n)}) + \sum_{l\geqslant m(n)} \mu(D_k^l) - \sum_{l\leqslant m(n)} \mu(C_k^l)$$
$$= \mu(X_n^{m(n)}) = \gamma(A_n \times B_n),$$

так как по построению $\mu(D_k^l) = \mu(C_k^l)$.

Аналогичным образом построим множества $Y_n \subset B_n$ со свойствами 4) и 5). □

Доказательство теоремы. Будем считать, что имеется мера из $\Pi(\mu,\nu)$, относительно которой функция h интегрируема (иначе оба инфимума бесконечны и равны). Тогда в задаче Канторовича инфимум оказывается минимумом. Пусть γ — мера из $\Pi(\mu,\nu)$, на которой достигается этот минимум. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Возьмем множества A_n, B_n и X_n, Y_n, существующие по лемме. По свойству 3) прямоугольники $A_n \times B_n$ покрывают γ-почти все $X \times Y$. На каждом из них разброс значений h меньше ε по свойству 1). По свойству 5) имеем $\mu(X_n) = \nu(Y_n) = \gamma(A_n \times B_n)$. По условию теоремы существует измеримое отображение $T_n\colon X_n \to Y_n$, для которого $\mu|_{X_n} \circ T_n^{-1} = \nu|_{Y_n}$. Положим

$$M_n = \sup_{(x,y)\in A_n\times B_n} h(x,y), \quad m_n = \inf_{(x,y)\in A_n\times B_n} h(x,y).$$

Тогда

$$M(T_n) := \int\limits_{X_n} h(x,T_n(x))\,\mu(dx) \leqslant M_n\mu(X_n) = M_n\gamma(A_n\times B_n),$$

$$K(\gamma_n) := \int\limits_{A_n\times B_n} h(x,y)\,\gamma(dxdy) \geqslant m_n\gamma(A_n\times B_n).$$

По свойству 1) имеем $M_n - m_n \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$M(T_n) \leqslant K(\gamma_n) + \varepsilon\gamma(A_n\times B_n).$$

Положим теперь $T(x) := T_n(x)$ при $x \in X_n$. Тогда отображение T переводит меру μ в меру $\sum_n \nu|_{Y_n} = \nu$, причем

$$M_h(\mu,T) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} M(t_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(K(\gamma_n) + \varepsilon\gamma(A_n\times B_n)) = K_h(\gamma) + \varepsilon.$$

Последнее равенство следует из свойств 3) и 4). В силу произвольности выбора ε получаем доказываемое утверждение. □

Следствие 1. *Условие безатомичности меры ν можно опустить, если меру μ можно преобразовать в меру ν, а всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть этой же меры μ той же полной массы, либо если всякую часть меры μ можно преобразовать во всякую часть меры $\nu \otimes \lambda$, где λ — мера Лебега на* $[0,1]$.

Доказательство. Если выполнено последнее условие, то теорема применима к безатомической мере $\nu\otimes\lambda$ и функции стоимости $h_0(x,y,t) = h(x,y)$. Пусть σ_0 — оптимальный план на $X \times Y \times [0,1]$ с проекциями μ и $\nu \otimes \lambda$ на сомножители X и $Y \times [0,1]$. Пусть σ_1 — проекция σ_0 на $X \times Y$. Проекции σ_1 на X и Y есть μ и ν соответственно, а интеграл от h по σ_1 равен интегралу от h_1 по мере σ_1. Поэтому $K_h(\mu,\nu) \leqslant K_{h_0}(\mu,\nu\otimes\lambda)$. С другой стороны, из всякой меры $\sigma \in \Pi(\mu,\nu)$ мы получаем меру $\sigma\otimes\lambda \in \Pi(\mu,\nu\otimes\lambda)$, для которой $K_h(\sigma) = K_{h_0}(\sigma\otimes\lambda)$. Следовательно,

$$K_h(\mu,\nu) = K_{h_0}(\mu,\nu\otimes\lambda).$$

По основной теореме для каждого $\varepsilon > 0$ найдется измеримое отображение $S\colon X \to Y \times [0,1]$, для которого $\mu \circ S^{-1} = \nu \otimes \lambda$ и $M_{h_0}(\mu,S) < K_h(\sigma) + \varepsilon$. Пусть T — композиция S с проекцией на Y. Отображение T измеримо и переводит μ в ν. Кроме того,

$$\int\limits_X h(x,T(x))\,\mu(dx) = \int\limits_X h_0(x,S(x))\,\mu(dx),$$

откуда $M_h(\mu,T) < K_h(\mu,\nu) + \varepsilon$.

Наконец, заметим, что если имеется какое-то измеримое преобразование T_0 всей меры μ в меру ν, а части меры μ равной массы можно переводить друг в друга, то во всякую часть ν_1 меры $\nu \otimes \lambda$ можно преобразовать всякую часть μ_1 меры μ той же массы. В самом деле, сделанное предположение означает, что соответствующая мере μ алгебра с мерой однородна (все пространства $L^2(\mu|_A)$ для множеств A положительной меры имеют равномощные ортонормированные базисы) и по теореме Магарам изоморфна алгебре с мерой для некоторой степени λ^κ меры Лебега λ на $[0,1]$ (см. [36, теорема 331I] или [24, теорема 9.3.5]). Кроме того, в силу радоновости обеих мер и изоморфности алгебр с мерами, меры μ и λ^κ можно переводить друг в друга (см. [36, теорема 343B]). Это позволяет найти измеримое отображение T_1, которое переводит меру μ в $\nu \otimes \lambda$. Значит, некоторая часть μ_2 меры μ переходит при T_1 в меру ν_1. Остается найти измеримое отображение F, переводящее μ_1 в μ_2, и взять отображение $T_1 \circ F$. $\square$

Отметим, что для сепарабельной безатомической радоновской меры μ всякую ее часть можно перевести в любую другую часть той же массы. Для несепарабельных мер это неверно. Например, можно взять меру $3\lambda/4 + \lambda^\kappa/4$, где λ — мера Лебега на $[0,1]$ и κ — несчетная мощность (эта сумма определена на $[0,1] \cup [0,1]^\kappa$). Тогда никакую часть меры Лебега на $[0,1]$ нельзя перевести в меру $\lambda^\kappa/4$ (см. обоснование примера 1 ниже).

Следствие 2. *Если функция $h \geqslant 0$ непрерывна, радоновские вероятностные меры μ и ν сепарабельны, причем μ не имеет атомов и $K_h(\mu,\nu) < \infty$, то инфимум в задаче Монжа равен минимуму в задаче Канторовича.*

Из доказательства теоремы очевидно, что фактически вместо непрерывности функции h было использовано более слабое условие: для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся такие компакты $K_1 \subset X$ и $K_2 \subset Y$, что $\mu(X \backslash K_1) < \varepsilon$ и $\nu(Y \backslash K_2) < \varepsilon$, причем на $K_1 \times K_2$ функция h непрерывна. Такое свойство называется в работе [7] виртуальной непрерывностью. Вопреки первому впечатлению, оно не вытекает из теоремы Лузина, которая дает компакт в $X \times Y$ с $\mu \otimes \nu$-мерой не менее $1 - \varepsilon$, на котором функция h непрерывна. Дело в том, что в таком компакте может не содержаться произведений компактов нужной меры.

Следствие 3. *Условие непрерывности функции стоимости h в лемме, основной теореме и ее следствиях можно ослабить до виртуальной непрерывности.*

Перейдем к описанию примера, показывающего точность использованного в теореме условия.

Через $\aleph_0$ и $\aleph_1$ обозначим счетную и первую несчетную мощности соответственно; далее вместо $\aleph_1$ можно брать любую несчетную мощность. Ниже под объединением $X_0 \cup X_1$ топологических пространств X_0 и X_1 понимается дизъюнктное объединение их копий (даже если одно пространство является частью другого) с естественной топологией, так что X_0 и X_1 оказываются открытыми и замкнутыми частями нового пространства.

В [2] доказано следующее утверждение, обоснование которого (за исключением вспомогательных лемм) мы приведем для удобства читателя (обозначения немного изменены по сравнению с [2]).

Пример 1. *Существуют безатомические радоновские вероятностные меры μ и ν на компактном пространстве*

$$X = [0,1]^{\aleph_1} \cup [0,1]^{\aleph_1}$$

и непрерывная функция $h \geqslant 0$ on $X \times X$ такие, что меру μ можно перевести в ν непрерывным отображением, но $M_h(\mu,\nu) > K_h(\mu,\nu)$, причем оба инфимума являются минимумами.

Доказательство. Пространство $X = X_0 \cup X_1$, где $X_0 = X_1 = [0,1]^{\aleph_1}$ наделим мерой $\mu = (\mu_0 + \mu_1)/2$, причем мера μ_0 на X_0 есть счетная степень меры Лебега на отрезке $[0,1]$, сосредоточенная на $[0,1]^{\aleph_0}$, а мера μ_1 — степень мощности $\aleph_1$ меры Лебега на $[0,1]$.

Меру ν на том же пространстве зададим снова как полусумму мер μ_1 и μ_0, взятых в другом порядке: теперь на первой компоненте $Y_0 = X_0$ сосредоточена несчетная степень меры Лебега, а на второй компоненте $Y_1 = X_1$ сосредоточена счетная степень. Ясно, что есть много непрерывных преобразований меры μ в ν: например, можно взять тождественные отображения на $X_0 = Y_1$ и $X_1 = Y_0$. Однако мы увидим, что имеется непрерывная функция стоимости, для которой минимум Канторовича $K_h(\mu,\nu)$ нельзя приблизить величинами $M_h(\mu,\nu,T)$.

В качестве функции стоимости h на $X \times X$ возьмем теперь индикатор множества $(X_0 \times Y_1) \cup (X_1 \times Y_0)$, который очевидным образом непрерывен, ибо это множество открыто и замкнуто. Заметим также, что h равняется нулю на диагонали.

В работе [2] в лемме 3 доказано следующее утверждение: никакая часть меры μ_0 ненулевой меры не может преобразована в часть меры μ_1.

По цитированной лемме получаем, что всякое отображение T, преобразующее меру μ в ν, должно переводить X_0 в Y_1 с точностью до множества ν-меры нуль, поскольку никакая ненулевая часть μ_0 не может перейти в часть меры $\nu|_{Y_0}$. Следовательно, такое отображение T переводит X_1 в Y_0 также с точностью до множества ν-меры нуль. Это означает, что

$$\mu(T^{-1}(Y_0) \cap X_0) = \mu(T^{-1}(Y_1) \cap X_1) = 0.$$

В частности, для μ-п.в. $x \in X_0$ имеем $T(x) \in Y_1$ и для μ-п.в. $x \in X_1$ имеем $T(x) \in Y_0$.

Тогда $(x, T(x)) \in X_0 \times Y_1$ для μ-п.в. $x \in X_0$ и $(x, T(x)) \in X_1 \times Y_0$ для μ-п.в. $x \in X_1$, откуда $h(x, T(x)) = 1$ μ-п.в., так что

$$M_h(\mu, \nu) = M_h(\mu, T) = \int_X h(x, T(x))\, \mu(dx) = 1$$

для всех $T \in T(\mu, \nu)$ (и такие отображения существуют). В то же время для меры $\sigma = \mu \otimes \nu$ имеем

$$\int_{X \times X} h(x, y)\sigma(dxdy) = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Значит, $K_h(\mu, \nu) \leqslant 1/2 < 1 = M_h(\mu, \nu)$. На самом деле верно равенство $K_h(\mu, \nu) = 0$, поскольку мера $\pi = (\mu_0 \otimes \mu_1 + \mu_1 \otimes \mu_0)/2$ с проекциями μ и ν сосредоточена на множестве $\{h = 0\}$. Объяснение полученного эффекта состоит в том, что сепарабельную половину меры μ нельзя перевести в несепарабельную половину меры ν. $\square$

Приведем также пример, заимствованный из [14] и показывающий, что непрерывность (хотя бы виртуальная) функции стоимости существенна и не может быть заменена даже на полунепрерывность снизу.

Пример 2. *Пусть $X = Y = [0, 1] \times [-1, 1]$, μ – линейная мера Лебега на отрезке $I_0 = [0, 1] \times \{0\}$, ν – умноженная на $1/2$ линейная мера Лебега на объединении отрезков $I_1 = [0, 1] \times \{1\}$ и $I_2 = [0, 1] \times \{-1\}$, $h(x, y) = 0$, если $\|x - y\| = 1$, $h(x, y) = 1$ в остальных случаях, т.е. h – индикатор открытого множества $U = \{(x, y) \in X \times Y \colon \|x - y\| \neq 1\}$ – дополнения замкнутого множества*

$$Z = \bigl\{(x, y) \in X \times Y \colon \|x - y\| = 1\bigr\}.$$

Тогда задача Канторовича и задача Монжа имеют решения, но они различны и $K_h(\mu, \nu) = 0$, $M_h(\mu, \nu) = 1$.

Доказательство. Решением задачи Канторовича является мера $\widehat{\sigma}$, равная умноженной на $1/2$ линейной мере Лебега на объединении диагональных отрезков

$$D_1 = \{(x_1, 0, x_1, 1) \colon 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\},\ D_2 = \{(x_1, 0, x_1, -1) \colon 0 \leqslant x_1 \leqslant 1\}.$$

Ее проекции есть μ и ν, $K_h(\sigma)=0$, так как D_1, D_2 лежат в Z. Других мер σ в $\Pi(\mu,\nu)$ с таким же значением нет, ибо должно выполняться равенство $\sigma(Z)=1$, а также равенства $\sigma\bigl(X\times(I_1\cup I_2)\bigr)=1$, $\sigma(I_0\times Y)=1$. Иначе говоря, мера σ должна быть сосредоточена на множестве точек вида $(x_1,0,y_1,y_2)$, где $|y_2|=1$ и $(x_1-y_1)^2+y_2^2=1$, т.е. $x_1=y_1$. Тем самым σ сосредоточена на $D_1\cup D_2$, что с учетом совпадения проекции σ на первый сомножитель с мерой μ делает неизбежным равенство $\sigma=\widehat{\sigma}$.

Обратимся к задаче Монжа. Одним из ее решений (но не единственным) оказывается отображение T, заданное следующим образом:

$$T(x_1,x_2)=(2x_1,1) \quad \text{при} \quad 0\leqslant x_1\leqslant 1/2,$$
$$T(x_1,x_2)=(2x_1-1,-1) \quad \text{при} \quad 1/2<x_1\leqslant 1.$$

Для него $M(\mu,T)=1$. Однако ни для какой транспортировки S меры μ в ν нельзя получить меньшего значения. Чтобы это увидеть, заметим, что если $\mu\circ S^{-1}=\nu$, то $\|x-S(x)\|\neq 1$ при μ-почти всех x. В самом деле, если $x=(x_1,0)\in I_0$ таково, что $S(x)\in I_1\cup I_2$ (таковы μ-почти все x), то равенство $\|x-S(x)\|=1$ возможно лишь при $S(x)=(x_1,y_2)$, где $|y_2|=1$. Таким образом, если множество $E=\{x\colon \|x-S(x)\|=1\}$ имеет положительную меру, то μ-почти каждая его точка имеет вид $(x_1,0)$ и сдвигается либо на 1 вверх, либо на 1 вниз. Поэтому можно считать, что $E\subset I_0$ и каждая точка E сдвигается под действием S на 1 вверх или вниз. Это ведет к противоречию с тем, что ν – образ μ: скажем, если положительную меру имеет множество E_1 точек из E, сдвигающихся вверх, то $\nu(E_1\times\{1\})=\mu(E_1)/2$, хотя $\nu(E_1)=\mu\bigl(S^{-1}(E_1\times\{1\})\bigr)\geqslant\mu(E_1)$. $\square$

Отметим, что для всякого преобразования T меры μ в меру ν можно задать функцию стоимости h, для которой T становится оптимальным отображением: достаточно сделать h равной 0 на графике T и 1 на его дополнении. Для разрывных функций стоимости тоже возникают интересные задачи, см., например, [20, 21].

Замечание 1. Вершик, Затицкий и Петров [7] недавно доказали, что если стандартное вероятностное пространство $(X,\mathcal{B},\mu)$, т.е. изоморфное отрезку с мерой Лебега, наделено сепарабельной измеримой метрикой d, то μ является радоновской мерой относительно этой метрики. На самом деле верен более общий факт: то же самое справедливо, если данное пространство $(X, \mathcal{B}, \mu)$ изоморфно топологическому пространству с радоновской мерой. Для доказательства возьмем счетное всюду плотное множество $\{x_i\}$ в X с заданной метрикой d и для фиксированного $n \in \mathbb{N}$ применим теорему Лузина для нахождения компакта K (относительно исходной топологии в X) с $\mu(K) > 1 - 1/n$, для которого все функции $x \mapsto d(x, x_i)$ непрерывны на K. Тогда все функции $x \mapsto d(x, y)$ непрерывны на K. Это ясно из того, что все такие функции являются равномерными пределами последовательностей функций, соответствующих подходящим подпоследовательностям в $\{x_i\}$. Значит, метрика d непрерывна на K. В силу компактности K эта метрика порождает исходную топологию K, индуцированную из X. Поэтому мера μ радонова относительно исходной топологии. Это наблюдение позволяет дать "нетопологическую" версию основной теоремы (на пространстве, изоморфном пространству с мерой Радона, в качестве функции стоимости берется сепарабельная измеримая метрика), хотя приведенный выше пример показывает, что просто заменить непрерывность функции стоимости измеримостью нельзя.

В связи с рассмотрением приближенных решений задачи Монжа представляет интерес выяснение того, сколь близко можно подойти к минимуму Канторовича с помощью отображений из каких-либо специальных классов. Например, известно, что всякую абсолютно непрерывную вероятностную меру на $\mathbb{R}^n$ можно перевести в любую другую такую меру так называемым треугольным преобразованием, т.е. преобразованием вида $T = (T_1, \ldots, T_n)$, где $T_1(x) = T_1(x_1)$, $T_2(x) = T_2(x_1, x_2)$ и т.д., причем $T_k(x_1, \ldots, x_k)$ можно сделать возрастающим по x_k (см. [4] и [24] об этих преобразованиях). Другие интересные в этом отношении отображения определяются различными симметриями, что может быть полезно при наличии таких симметрий у проекций и функции стоимости.

Благодарим Л. Амброзио, А. М. Вершика и Г. И. Зеленова за полезные обсуждения.

Литература

1. В. И. Богачев, *Слабая сходимость мер.* — Институт компьютерных исследований, М., Ижевск (2016).
2. В. И. Богачев, А. Н. Калинин, *Непрерывная функция стоимости, для которой минимумы в задачах Монжа и Канторовича не равны.* — Докл. РАН, **463**, No. 4 (2015), 383–386.

3. В. И. Богачев, А. В. Колесников, *Задача Монжа – Канторовича: достижения, связи и перспективы.* — Успехи матем. наук, **67**, No. 5 (2012), 3–110.
4. В. И. Богачев, А. В. Колесников, К. В. Медведев, *Треугольные преобразования мер.* — Матем. сб., **196**, No. 3 (2005), 3–30.
5. А. М. Вершик, *Несколько замечаний о бесконечномерных задачах линейного программирования.* — Успехи матем. наук, **25**, No. 5 (1970), 117–124.
6. А. М. Вершик, *Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения.* — Зап. научн. сем. ПОМИ, **312** (2004), 69–85.
7. А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Виртуальная непрерывность измеримых функций многих переменных и ее приложения.* — Успехи матем. наук, **69**, No. 6 (2014), 81–114.
8. Л. В. Канторович, *Математические методы организации и планирования производства.* — Изд-во ЛГУ, Л., 1939; репринтное изд.: Изд. дом СПбГУ, СПб., 2012.
9. Л. В. Канторович, *О перемещении масс.* — Докл. АН СССР, **37**, No. 7-8 (1942), 227–229.
10. Л. В. Канторович *Об одной проблеме Монжа.* — Успехи матем. наук, **3**, No. 2 (1948), 225–226.
11. Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, *Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах.* — Докл. АН СССР, **115**, No. 6 (1957), 1058–1061.
12. Л. В. Канторович, Г. Ш. Рубинштейн, *Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества.* — Вестн. ЛГУ, **7**, No. 2 (1958), 52–59.
13. А. А. Липчюс, *Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича.* — Теория вероятн. и ее примен., **50**, No. 4 (2005), 779–782.
14. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР, **140** (1976), 1–190.
15. L. Ambrosio, *Lecture notes on optimal transport problems.* — Lecture Notes in Math., **1812** (2003), 1–52.
16. L. Ambrosio, N. Gigli, *A user's guide to optimal transport.* — Lecture Notes in Math., **2062** (2013), 1–155.
17. L. Ambrosio, B. Kirchheim, A. Pratelli, *Existence of optimal transport maps for chrystalline norms.* — Duke Math. J., **125**, No. 2 (2004), 207–241.
18. L. Ambrosio, A. Pratelli, *Existence and stability results in the L^1 theory of optimal transportation.* — In: Optimal transportation and applications (Martina Franca, 2001), p. 123–160, Lecture Notes in Math., V. 1813, Springer, Berlin 2003.
19. P. Appel, *Mémoire sur les déblais et les remblais des systèmes continus ou discontinus.* — Mémoires présentés par divers Savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, Paris, **29** (1887), 1–208.
20. M. Beiglböck, M. Goldstern, G. Maresch, W. Schachermayer, *Optimal and better transport plans.* — J. Funct. Anal., **256**, No.6 (2009), 1907–1927.
21. M. Beiglböck, W. Schachermayer, *Duality for Borel measurable cost functions.* — Trans. Amer. Math. Soc., **363**, No.8 (2011), 4203–4224.
22. S. Bianchini, F. Cavalletti, *The Monge problem for distance cost in geodesic spaces.* — Comm. Math. Phys., **318** (2013), 615–673.

23. S. Bianchini, S. Daneri, *On Sudakov's type decomposition of transference plans with norm costs.* — Mem. Amer. Math. Soc. (in print); ArXiv 1311.1918v2.
24. V. I. Bogachev, *Measure Theory.* V. 2. Springer, Berlin 2007.
25. L. A. Caffarelli, M. Feldman, R. J. McCann, *Constructing optimal maps for Monge's transport problem as a limit of strictly convex costs.* — J. Amer. Math. Soc., **15**, No.1 (2002), 1–26.
26. L. Caravenna, *A proof of Sudakov theorem with strictly convex norms.* — Math. Z., **268**, No. 1-2 (2011), 371–407.
27. L. Caravenna, *A proof of Monge problem in* $\mathbb{R}^n$ *by stability.* — Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, **43** (2011), 31–51.
28. F. Cavalletti, *Monge problem in metric measure spaces with Riemannian curvature-dimension condition.* — Nonlinear Anal., **99** (2014), 136–151.
29. T. Champion, L. De Pascale, *The Monge problem for strictly convex norms in* $\mathbb{R}^d$. — J. Eur. Math. Soc., **12**, No. 6 (2010), 1355–1369.
30. T. Champion, L. De Pascale, *The Monge problem in* $\mathbb{R}^d$. — Duke Math. J., **157**, No. 3 (2011), 551–572.
31. T. Champion, L. De Pascale, *The Monge problem in* $\mathbb{R}^d$*: variations on a theme.* — Zap. Nauchn. Semin. (POMI), **390** (2011), 182–200; English transl.: J. Math. Sci. (New York), **181**, No. 6 (2012), 856–866.
32. G. A. Edgar, *Measurable weak sections.* — Illinois J. Math., **20**, No.4 (1976), 630–646.
33. L. C. Evans, W. Gangbo, *Differential equations methods for the Monge–Kantorovich mass transfer problem.* — Mem. Amer. Math. Soc., **137**, No. 653 (1999), viii+66 p.
34. M. Feldman, R. McCann, *Monge's transport problem on a Riemannian manifold.* — Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 1667–1697.
35. D. H. Fremlin, *Measurable functions and almost continuous functions.* — Manuscr. Math., **33**, No. 3-4 (1981), 387–405.
36. D. Fremlin, *Measure Theory.* V. 1–5. University of Essex, Colchester, 2000–2003.
37. G. Monge, *Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais.* — Histoire de l'Académie Royale des sciences de Paris, 1781, p. 666–704.
38. A. Pratelli, *On the equality between Monge's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation.* — Ann. Inst. H. Poincaré (B) Probab. Statist., **43**, No. 1 (2007), 1–13.
39. S. T. Rachev, L. Rüschendorf, *Mass Transportation Problems.* V. I, II, Springer, New York (1998).
40. N. S. Trudinger, X.-J. Wang, *On the Monge mass transfer problem.* — Calc. Var. Partial Differ. Equ., **13**, No. 1 (2001), 19–31.
41. C. Villani, *Topics in Optimal Transportation.* Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island (2003).

Bogachev V. I., Kalinin A. N., Popova S. N. On the equality of values in the Monge and Kantorovich problems.

This paper is concerned with the study of conditions under which the Monge and Kantorovich problems with a continuous cost function on the product of two completely regular spaces and two given atomless Radon measures-projections on these spaces have equal values of the corresponding infima.

[a] Механико-математический ф-т,
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
[b] Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики, Москва, Россия
[c] Православный Свято-Тихоновский
гуманитарный университет, Москва, Россия
E-mail: vibogach@mail.ru

Поступило 31 мая 2017 г.