Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

Н. А. Широков

ГЛАДКОСТЬ ГОЛОМОФОРНОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ МОДУЛЯ НА ГРАНИЦЕ ПОЛИДИСКА

Классический результат В. П. Хавина–Ф. А. Шамояна–Л. Карлесона–И. Якобса состоит в том, что гладкость аналитической в круге функции может составлять лишь половину гладкости ее модуля на границе. С. В. Кисляков задал вопрос о многомерном аналоге этого утверждения, рассматривая, в частности, шары и полидиски в $\mathbb{C}^n$.

Существенно понять, зависит ли возможное падение гладкости голоморфной функции по сравнению с гладкостью ее модуля на границе области от n.

В случае шара оказалось [1], что справедлив аналог теоремы об уполовинивании гладкости: если функция f голоморфна в единичном шаре $\mathbb{B}^n$ в $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, непрерывна в $\overline{\mathbb{B}}^n$, $f(z) \neq 0$ при $z \in \mathbb{B}^n$ и $|f|$ лежит в классе Гёльдера порядка α, $0 < \alpha < 1$, на $\partial\mathbb{B}^n$, то f лежит в классе Гёльдера порядка $\alpha/2$. В полидиске справедлив более слабый результат, но тоже не зависящий от n.

Теорема. *Обозначим через* $\mathbb{D}^n = \{z = (z_1, \dots, z_n) : |z_k| < 1,\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$ *полидиск в* $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$. *Пусть функция* f *голоморфна в* $\mathbb{D}^n$ *и непрерывна в* $\overline{\mathbb{D}}^n$, *при этом* $f(z) \neq 0, z \in \mathbb{D}^n$. *Предположим, что* $|f|$ *принадлежит классу Гёльдера* $H^\alpha(\partial\mathbb{D}^n)$ *на границе полидиска* $\mathbb{D}^n$, $0 < \alpha < 1$. *Тогда* $f \in H^{\alpha/2-\varepsilon}(\overline{\mathbb{D}}^n)$ *для любого* $\varepsilon > 0$.

Для доказательства нам потребуются утверждения из работы [2] – теорема 5 и замечание после её формулировки и теорема 2. Через $\|g\|_{\alpha,E}$ обозначим стандартную полунорму в классе Гёльдера $H^\alpha(E)$ функции g из этого класса, $0 < \alpha < 1$. Пусть G – ограниченная жорданова область, граница которой $\Gamma = \partial G$ является кривой ограниченного граничного вращения. Пусть $\Theta_{\min}$ – минимальный угол на Γ, а $\Theta_{\max}$ – максимальный внутренний по отношению к G угол на Γ, $\delta = \Theta_{\min}/\Theta_{\max}$. Предположим, что $\operatorname{diam} G \leqslant C_1$, $z_0 \in G$, $\operatorname{dist}(z_0, \Gamma) \geqslant C_2 > 0$. Пусть $f \in C(\overline{G})$, функция f аналитична в G,

---

Ключевые слова: голоморфные функции, классы Гёльдера, полидиски.
Работа поддержана грантом РФФИ No. 17-01-00607.

$f(z) \neq 0, z \in G$, и $|f(z_0)| \geqslant a > 0$, $|f(z)| \leqslant 1$, $z \in \overline{G}$. Комбинируя вышеприведённые результаты из [2] , мы получаем следующее утверждение для указанных областей G и функций f.

Теорема A. *Пусть* $\|f\|_{\alpha,\Gamma} \leqslant 1$. *Тогда существует постоянная* $C_0 = C_0(C_1, C_2, a, \delta) > 0$ *такая, что*

$$|f|_{\frac{\delta\alpha}{2},\overline{G}} \leqslant C_0. \tag{1}$$

Следующий вариант классической теоремы Харди–Литтлвуда для выпуклых областей в $\mathbb{C}^n$ доказывается буквально так же, как в [3], гл. 6, где она доказывается для шара.

Теорема B. *Пусть* Ω *– выпуклая ограниченная область в* $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 2$, *функция* f *голоморфна в* Ω, $0 < \beta < 1$. *Для того, чтобы* $f \in H^\beta(\overline{\Omega})$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $z \in \Omega$ *выполнялась оценка*

$$|\mathrm{grad} f(z)| \leqslant C_f \mathrm{dist}^{\beta-1}(z, \partial\Omega). \tag{2}$$

Приведем теперь два элементарных утверждения. Пусть $b \in \mathbb{D}^n$, $|b| \geqslant \frac{1}{2}$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{n}}$, вектор ξ_1 противоположно направлен с b, $|\xi_1| = \lambda$, векторы $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ образуют ортогональный базис в $\mathbb{C}^n$, $|\xi_k| = \lambda$, $2 \leqslant k \leqslant n$, $\omega_k = \xi_k + b$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $\overline{\nu}$ – единичный вектор в $\mathbb{C}^n$, $\mu_k = \frac{1}{|\omega_k|}\omega_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Теорема C. *Векторы* ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, *линейно независимы в* $\mathbb{C}^n$, *поэтому справедливо соотношение*

$$\frac{\partial}{\partial \overline{\nu}} = \sum_{k=1}^{n} A_k(b, \{\xi_l\}_{l=1}^n) \frac{\partial}{\partial \mu_k} \tag{3}$$

с соответствующими постоянными $A_k(b, \{\xi_l\}_{l=1}^n)$, *и с некоторой постоянной* $B = B(\varepsilon, n)$ *справедлива оценка*

$$|A_k(b, \{\xi_l\}_{l=1}^n)| \leqslant B, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{4}$$

Доказательство соотношений (3) и (4) следует из линейной независимости векторов $\omega_k, 1 \leqslant k \leqslant n$, при любых b, $\frac{1}{2} \leqslant |b|$, $b \in \mathbb{D}^n$.

Обозначим через $\widetilde{G}_k \subset \mathbb{C}$ следующую область:

$$\widetilde{G}_k = \{t \in \mathbb{C} : b + t\mu_k \in \mathbb{D}^n\}.$$

Полагая $t = -|\omega_k| + \tau$, получаем

$$b + t\mu_k = b + (-|\omega_k| + \tau)\mu_k = b - \omega_k + \tau\mu_k = -\xi_k + \tau\mu_k,$$

поэтому $\widetilde{G}_k + |\omega_k| = G_k$, где G_k определяется соотношением

$$G_k = \{\tau \in \mathbb{C} : -\xi_k + \tau\mu_k \in \mathbb{D}^n\}. \tag{5}$$

Пусть $\mu_k = (a_{k1}, \dots, a_{kn})$, $-\xi_k = (s_{k1}, \dots, s_{kn})$. Тогда по крайней мере для одного m_0 выполнено $|a_{km_0}| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, а область G_k есть пересечение кругов: $G_k = \bigcap\limits_{m=1}^{n} B_{km}$, где

$$B_{km} = \{\tau \in \mathbb{C} : |s_{km} + \tau a_{km}| < 1\}. \tag{6}$$

Так как $|s_{km}| \leqslant \lambda = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{n}}$ и $B_{km_0} = \bigl\{\tau \in \mathbb{C} : |\frac{s_{km_0}}{a_{km_0}} + \tau| < \frac{1}{|a_{km_0}|}\bigr\}$, то

$$\begin{aligned} G_k \subset B_{km_0} \subset \Bigl\{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| < \frac{1}{|a_{km_0}|} + \frac{\lambda}{|a_{km_0}|}\Bigr\} \\ \subset \Bigl\{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| < \sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{4}\Bigr\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Элементарные геометрические рассуждения влекут следующий факт.

Теорема D. *Границы областей G_k и $\widetilde{G}_k$ состоят не более, чем из 2^{n-1} дуг окружностей, диаметр областей G_k и $\widetilde{G}_k$ не превосходит $2\sqrt{n}+1$. В области G_k лежит точка $-\xi_k$, удаленная от границы ∂G_k не менее, чем на $\frac{1}{2}$. Существует постоянная $c_{abs} > 0$ такая, что соседние дуги окружностей, составляющие границу ∂G_k, образуют угол, меньший π, но больший $\pi - c_{abs}\varepsilon$.*

Перейдем к доказательству основной теоремы. Выберем $b \in \mathbb{D}^n$, ξ_k, ω_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, как перед теоремой C. Пусть Φ_k – отображение из $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}^n$, задаваемое соотношением

$$\Phi_k(\tau) = -\xi_k + \tau\mu_k.$$

Тогда определение (5) влечет, что $\tau \in \partial G_k$ тогда и только тогда, когда $\Phi_k(\tau) \in \partial\mathbb{D}^n$. Поэтому

$$\operatorname{dist}(|\omega_k|, \partial G_k) \geqslant \operatorname{dist}(\Phi_k(|\omega_k|), \partial\mathbb{D}^n) = \operatorname{dist}(b, \partial\mathbb{D}^n). \tag{8}$$

Положим

$$\beta = \frac{\pi - c_{abs}\varepsilon}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{2}, \quad f_k(\tau) = f(\Phi_k(\tau)). \tag{9}$$

Тогда $f'_k(\tau) = f'_{\mu_k}(\Phi_k(\tau))$, в частности,

$$f'_k(|\omega_k|) = f'_{\mu_k}(b). \tag{10}$$

Умножая при необходимости функцию f на константу, будем считать, что $|f(z)| < 1$, $z \in \mathbb{D}^n$, и $\|f\|_{\alpha,\partial\mathbb{D}^n} \leqslant 1$. Пусть $\frac{1}{4} > \varepsilon > 0$, $\lambda = \frac{\varepsilon}{4\sqrt{n}}$, $a = \min_{|z|\leqslant\lambda} |f(z)| > 0$. Так как $\Phi_k(\partial G_k) \subset \partial\mathbb{D}^n$, то $\|f\|_{\alpha,\Phi(\partial G_k)} \leqslant 1$, а также $|f(-\xi_k)| \geqslant a$. Переходя к функции f_k и области G_k , получаем, что $\|f_k\|_{\alpha,\partial G_k} \leqslant 1$, $|f_k(\xi)| < 1$, $\xi \in G_k$, и $|f_k(0)| = |f(-\xi_k)| \geqslant a > 0$. К области G_k и функции f_k в силу теоремы D можно применить теоремы А и В, тогда из (1) и (2) получим, что

$$|f_k'(|\omega_k|)| \leqslant C \mathrm{dist}^{\beta-1}(|\omega_k|, \partial G_k) \leqslant C \mathrm{dist}^{\beta-1}(b, \partial\mathbb{D}^n). \tag{11}$$

В соотношении (11) мы воспользовались неравенством (8) и определением (9), при этом постоянная C в (11) не зависит от b и k. Учитывая (10), перепишем (11) в форме

$$|f_{\mu_k}'(b)| \leqslant C \mathrm{dist}^{\beta-1}(b, \partial\mathbb{D}^n). \tag{12}$$

Применяя теорему С – соотношения (3), (4) – и (12), находим, что

$$|\mathrm{grad} f(b)| \leqslant B(\varepsilon, n) \cdot C \cdot \mathrm{dist}^{\beta-1}(b, \partial\mathbb{D}^n). \tag{13}$$

В таком случае (13) – это требуемая оценка (2) из теоремы В для области $\mathbb{D}^n$, которая влечет включение $f \in H^\beta(\mathbb{D}^n)$. Учитывая вид (9) для β, получаем утверждение основной теоремы.

Литература

1. Н. А. Широков, *Гладкость голоморфорной в шаре функции и ее модуля на сфере.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **447** (2016), 123–128.
2. Н. А. Широков, *Классы Гёльдера в областях Лаврентьева.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **282** (2001), 256–275.
3. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре в* $\mathbb{C}^n$. Москва, Мир (1984).

Shirokov N. A. Smoothness of a holomorphic function and its modulus on the boundary of a polydisk.

We prove that if a function f is holomorphic in the polydisk $\mathbb{D}^n$, $n \geqslant 2$, f is continuous in $\overline{\mathbb{D}^n}$, $f(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{D}^n$, and $|f|$ belongs to the α-Hölder

class, $0 < \alpha < 1$, on the boundary of $\mathbb{D}^n$, then f belongs to the $(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon)$-Hölder class on $\overline{\mathbb{D}^n}$ for any $\varepsilon > 0$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетская наб. 7-9
199034 С.-Петербург;
НИУ ВШЭ Санкт-Петербург
ул. Союза Печатников 16,
190121 С.-Петербург, Россия;
С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия
E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com

Поступило 4 мая 2017 г.