Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

А. Н. Медведев

ОБЩИЕ ГЁЛЬДЕРОВЫ УСЛОВИЯ ПОРЯДКА НЕ ВЫШЕ 2 ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЕЕ МОДУЛЯ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ

Данная заметка – анонс обобщения одного результата статьи [6]. Подробное изложение см. в препринте [4]. Нами установлено поточечное падение гладкости внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ в сравнении с гладкостью её модуля φ для случая условий вида $|\varphi(t) - \varphi(x) - bx| \leqslant C\omega(|t-x|)$. В исходной статье [6] подобный результат был установлен только для степенных мажорант ω. По-прежнему мы имеем дело лишь с гладкостью порядка не больше двух, и ниже мы поясним, каким условиям должна будет удовлетворять мажоранта ω в этом случае.

Для числовых функций f и g, заданных на одном и том же множестве, условимся писать $f \lesssim g$, если $f(x) \leqslant Cg(x)$ при всех x, с постоянной C, не зависящей от x. Если же $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, то будем писать $f \asymp g$.

Вернемся теперь к выбору ограничений на мажоранты. Приведем с небольшой поправкой следующее определение, которое можно найти в [1, 201–202].

Определение 0.1. *Назовем мажорантой типа k-го модуля непрерывности непрерывную неотрицательную неубывающую функцию ω на $[0, +\infty)$, для которой $\omega(0) = 0$, а функция $t^{-k}\omega(t)$ является почти убывающей, т.е. для всяких значений $t_1 \leqslant t_2$ выполнено неравенство*

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2^k} \lesssim \frac{\omega(t_1)}{t_1^k}, \qquad (1)$$

с некоторой универсальной постоянной.

Мы могли бы ограничиться мажорантами типа 2-го модуля непрерывности, но нам необходимо отделить случай гладкости порядка между 1 и 2 от гладкости порядка меньше 1. Последний был уже полностью изучен в [3], к тому же там используется несколько иной

Ключевые слова: внешняя функция, оператор гармонического сопряжения, конечные разности.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00198-А.

технический подход к измерению гладкости внешней функции (оценки средних осцилляций, а здесь – усредненных вторых разностей). Поэтому введем следующее дополнительное условие. Для мажоранты типа 2-го модуля непрерывности ω оно имеет вид:

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \lesssim \frac{\omega(t_2)}{t_2}, \ t_1 \leqslant t_2, \tag{2}$$

т.е. функция $t^{-1}\omega(t)$ почти возрастает. Легко заметить, что степенные мажоранты $\omega(t) \asymp t^\alpha$ при $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ заведомо удовлетворяют условиям (1) и (2). Такие мажоранты будем, для краткости, в дальнейшем называть просто *правильными.*

Теперь пора уточнить, о каких условиях на гладкость идет речь и что планируется получить. Фиксируем точку x. Рассмотрим функцию f на окружности (2π–периодическую на $\mathbb{R}$). Итак, рассматриваются 2 типа поточечных условий на гладкость.

(I) Данный тип подразумевает наличие для функции f оценки

$$|f(y) - f(x) - b_x(y-x)| \lesssim \omega_x^1(|x-y|), \tag{3}$$

по всем точкам y, для которых $|x-y| \leqslant 4\pi$, где b_x – некоторая постоянная, а ω_x – правильная мажоранта.

(II) Второй тип – условие на усредненные вторые разности функции f. В наших обозначениях, запишем его как

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|\Delta^2 f(x,t)\right|^r dt\right)^{1/r} \lesssim \omega_x^2(|x-y|), \tag{4}$$

для всех $h \leqslant 4\pi$, $r > 1$, а мажоранта ω_x не обязательно правильная, но точно типа 2-го модуля непрерывности.

Напомним, что изучаем мы исключительно внешние функции. Рассмотрим 2π–периодическую неотрицательную функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Обозначим через $\mathcal{O}_\varphi$ внешнюю функцию, построенную по φ. Как известно (см. [2]), ее граничные значения почти всюду равны $\varphi\exp(\mathcal{H}(\log\varphi))$, где $\mathcal{H}$ – оператор гармонического сопряжения. В статье [6] был получен следующий результат для степенных мажорант: если $\log\varphi \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, то условие (3) на функцию φ в одной точке x с мажорантой $\omega_x^1(t) \asymp t^\alpha$, где $\alpha \in [1,2]$, гарантирует для внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ оценку (4) в той же точке x с мажорантой $\omega_x^2(t) = Ct^{\alpha p/(p+1)}$, причем на значение постоянной C оказывают влияние только ω_x^1 и $\|\log\varphi\|_{L^p}$.

Именно этот результат обобщается здесь на случай произвольной правильной мажоранты. Как оказалось, никаких неожиданностей не возникло и описанная выше импликация верна в той же форме и для правильных мажорант типа 2-го модуля непрерывности. Точная формулировка выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Если функция φ удовлетворяет в точке x условию* (3) *с правильной мажорантой ω_x, то тогда верны следующие два утверждения.*

(1) *Если $\varphi(0) = 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет условию* (4) *с мажорантой, пропорциональной ω_x, причем коэффициент пропорциональности здесь зависит от ω_x* (*от постоянных из условий* (1) *и* (2)) *и от $\|\log\varphi\|_{L^p}$;*

(2) *Если $\varphi(0) > 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет условию* (4) *с мажорантой, пропорциональной $\omega_x(\,\cdot\,) + \omega_x((\,\cdot\,)^\beta)$, где $\beta = p/(p+1)$, при этом коэффициент пропорциональности здесь зависит от ω_x* (*от постоянных из условий* (1) *и* (2)) *и от $\|\log\varphi\|_{L^p}$.*

Замечание 0.1. Следует отметить, что если мажоранта ω_x, по условию, обязана быть правильной, т.е. соответствовать гладкости между 1 и 2, то результирующая мажоранта $\omega_x(\,\cdot\,) + \omega_x((\,\cdot\,)^\beta)$ может перестать быть таковой. Такой же эффект наблюдался и в [6] для степенных мажорант.

Аналогично статье [6], из "локальной" теоремы 1 может быть получена ее "равномерная" версия (т.е. утверждение о "настоящей" гладкости $\mathcal{O}_\varphi$). Здесь все зависит от того, оказалась ли мажоранта $\omega_x(\,\cdot\,)+\omega_x((\,\cdot\,)^\beta)$ снова правильной или нет. Если оказалась, то работает следующее утверждение (аналог соответствующего утверждения работы [6]), доказанное в [4] для произвольной 2π–периодической измеримой функции g, для которой предполагается выполненным условие (4) во всех точках x, $|x| \leqslant 4\pi$, с одной и той же постоянной, одной и той же **правильной** мажорантой ω и $r > 1$.

Утверждение 1. *Пусть g такая, как объявлено. Дополнительно предположим, что $g \in C^2$. Тогда для каждого отрезка $|I|$, $|I| < 2\pi$, найдется такой линейный полином ρ_I, что*

$$\sup_{x\in I} |g(x) - \rho_I(x)| \lesssim \omega(|I|).$$

Из данного утверждения стандартным методом (достаточно рассмотреть свертки с ядрами Фейера, подробнее [6, стр. 61]) можем получить неравенство

$$|\Delta^2 g(x,t)| \lesssim \omega(h)$$

при всех x и $|t| \leqslant \pi/2$. Последнее означает принадлежность функции g классу Lip_ω. Отметим, что для $\omega(t) = t$ мы получаем класс Зигмунда, а не Lip_1.

Если же мажоранта в оценке типа (4) из теоремы 1 не оказалась правильной, то мы на самом деле имеем дело с условием на гладкость порядка меньше 1. Стандартным методом (см. предложение 1 и 2 [6]) мы можем свести (4) к оценкам средних осцилляций из [3], для которых процедура восстановления глобальной гладкости известна (описана как в [6], так и в [3]; для примера предлагаем ознакомиться с [5]). Фактически в этом случае мы имеем $|g(x) - g(y)| \lesssim \omega(|x-y|)$.

Теперь скажем пару слов о самом доказательстве теоремы 1. Как уже говорилось, полный текст имеется в препринте [4]. В техническом плане, удалось повторить достаточно большое число рассуждений из исходного доказательства для степенных мажорант. Правильный выбор ограничений на мажоранты ω позволил существенно сократить вычисления и преодолеть возникшие технические трудности. Конечно, без ограничения типа (2) тоже можно получить какую-нибудь оценку, но она будет громоздкой. На наш взгляд, оказалось большой удачей то, что в случае правильных мажорант не пришлось существенно менять уже разработанную технику, а также то, в каком виде в данном случае был получен результат.

Литература

1. V. K. Dzyadyk, I. A. Shevchuk, *Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials.* — Walter de Gruyter, (2008), 480 p.
2. K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions.* — Prentice Hall, Engelewood Cliffs, NJ (1962).
3. А. Н. Медведев, *Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции.* — Зап. научн. сем. ПОМИ. **434** (2015), 101–115
4. А. Н. Медведев, *О гёльдеровом условии в граничной точке для аналитической функции: общие модули гладкости порядка не выше 2.* — Препринт ПОМИ No. 4 (2017)
5. S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa – Classe di Scienze, **19.4** (1965), 593–608.

6. А. В. Васин, С. В. Кисляков, А. Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25**, no. 3 (2013), 52–85.

Medvedev A. N. Generalized pointwise Hölder type conditions of order less than two for an analytic function and its modulus.

The results of a recent paper by A. V. Vasin, S. V. Kislyakov, and the author on the relationship between the local boundary smoothness of an analytic function and local boundary smoothness of its modulus are extended to the case of generalized pointwise Hölder type conditions of order between one and two.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург, Россия

Поступило 9 июня 2017 г.

С.-Петербургский электротехнический университет,
ул. проф. Попова, д.5,
197376, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: alkomedvedev@gmail.com