Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

М. Я. Мазалов

О СУЩЕСТВОВАНИИ УГЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ У ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ШАРЕ

§1. Введение

Напомним, что *полигармоническими* функциями порядка n (при $n = 2$ – бигармоническими) в областях евклидова пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, называются решения уравнения $\Delta^n u = 0$, где Δ – оператор Лапласа; заметим, что бигармонические функции широко применяются в теории упругости (например, [1, §7]).

При $d = 2$ полигармонические функции тесно связаны с полианалитическими. *Полианалитическими функциями порядка* n (при $n = 2$ – бианалитическими) называются (например, [2]) решения уравнения $\partial^n f/\partial \overline{z}^n = 0$ на открытых подмножествах комплексной плоскости $\mathbb{C}$, где $\partial/\partial\overline{z}$ – оператор Коши–Римана. Каждая функция, полианалитическая порядка n в некоторой области D, однозначно представима в виде

$$f(z) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(z)\overline{z}^m, \tag{1.1}$$

где все f_m – функции, аналитические в D; при этом функции $\mathrm{Re} f$ и $\mathrm{Im} f$ являются полигармоническими порядка n в D. Обратно, если D – односвязная область в $\mathbb{R}^2$, u – функция, полигармоническая порядка n в D, то [3, §32.1] существует функция f, полианалитическая порядка n в D, такая, что $u = \mathrm{Re} f$.

Теорема Фату (в классической формулировке) утверждает (например, [4, гл.1, §5], [5, V]), что любая гармоническая функция, ограниченная в шаре, имеет почти всюду угловые граничные значения.

Ключевые слова: полигармонические функции, полианалитические функции, граничные свойства, интеграл Пуассона, лакунарные ряды.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 1.3843.2017/4.6), РФФИ (проект 16-01-00674) и Программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-9110.2016.1).

На полигармонические функции порядка $n \geqslant 2$ этот факт не распространяется: в статье [6] построен пример функции, бианалитической и ограниченной в круге, не имеющей почти нигде угловых граничных значений (идея конструкции, использующая теорему единственности Лузина и Привалова, принадлежит Е. П. Долженко). Заметим, что в [6] содержательных условий существования граничных значений найти не удалось (предложенная ограниченность радиальной производной, как нетрудно убедиться, приводит к непрерывности бианалитической функции в замкнутом круге).

В настоящей работе в §2 значительно усиливается пример из [6], именно, строится простой пример 1 бигармонической функции двух переменных, ограниченной в круге и не имеющей ни в одной точке граничной окружности радиальных пределов.

В §3 доказывается естественное необходимое и достаточное условие существования почти всюду угловых граничных значений у полигармонической функции, ограниченной в шаре из $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, в терминах скорости роста радиальной производной вблизи границы (теорема 1).

Введем обозначения: $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $r = |x| = \left(\sum\limits_{j=1}^{d} x_j^2\right)^{1/2}$. Пусть $B(x, \rho)$ – (открытый) шар с центром x радиуса ρ, $S(x, \rho)$ – его граничная сфера; очевидно, достаточно ограничиться случаем единичного шара $B(0, 1)$.

Теорема 1. *Пусть u – функция, полигармоническая и ограниченная в шаре $B(0,1)$ пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Если почти всюду на множестве $E \subset S(0,1)$ положительной меры Лебега выполнено условие*

$$\lim_{r \to 1-0} (1 - r) \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \tag{1.2}$$

то функция u имеет почти всюду на E (конечные) угловые граничные значения.

Заметим, что, во-первых, условие (1.2) в классе функций, дифференцируемых и ограниченных в $B(0,1)$, не влечет существования граничных значений.

Во-вторых, условие (1.2) не только достаточно, но и необходимо в силу априорных оценок производных полигармонических функций (так называемых неравенств Николеску) [2, §1.4], [7]:

пусть функция u является полигармонической в шаре $B = B(x,\rho)$, причем $\|u\|_{\mathrm{L}_\infty(B)} \leqslant M$, тогда существует постоянная $A(d) > 0$, такая, что

$$|\nabla u(x)| \leqslant \frac{A(d)M}{\rho}. \tag{1.3}$$

Отсюда легко следует, что если функция u имеет в некоторой точке сферы $S(0,1)$ конечное угловое граничное значение, то в этой точке функция $|\nabla u(x)|(1-|x|)$ имеет угловой предел нуль. Заметим, что оценки типа (1.3) хорошо известны для решений эллиптических уравнений и являются следствиями обобщенного интегрального представления Пуассона и неравенств Коши (например, [8, гл. 3, §16]).

В-третьих, условие ограниченности функции в теореме 1 также нельзя отбросить. Это показывает пример функции $f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} z^{2^k}$, аналитической в $B(0,1)$, не имеющей почти нигде на $S(0,1)$ угловых пределов в силу расходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ (например, [4, гл. 2, §10]); то, что $\lim_{r\to 1-0} |f'(re^{i\varphi})|(1-r) = 0$ при всех $\varphi \in [0,2\pi)$, легко установить по аналогии с доказательством оценки (2.2) в §2.

В доказательстве теоремы 1 существенно используется разложение полигармонической функции в шаре на компоненты, имеющие сходное граничное поведение, вытекающее из формулы Альманси (3.1) (см., например, [9], при $d = 2$ – [10, 11]).

В заключительном §4 формулируется ряд нерешенных задач.

§2. Пример отсутствия радиальных пределов

Далее через A, A_1, A_2, ..., будем обозначать положительные постоянные, которые могут зависеть только от d и n, т.е. размерности пространства и порядка полигармоничности функции. Значения каждой из этих постоянных в разных соотношениях могут быть различными.

Пример 1. *Функция*

$$u_\alpha(z) = \operatorname{Re}\left((1-z\overline{z})\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k z^{\alpha^k}\right) = (1-r^2)\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k r^{\alpha^k}\cos(\alpha^k\varphi) \tag{2.1}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{N}$, $\alpha \geqslant 2$ – *бигармоническая, ограниченная в* $B(0,1)$, *и при всех достаточно больших четных* α *не имеющая радиальных пределов ни в одной точке сферы* $S(0,1)$.

Доказательство. Очевидно, функция

$$f_\alpha(z) = (1 - z\overline{z}) \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^k z^{\alpha^k}$$

является бианалитической в $B(0,1)$ (и следовательно, u_α бигармонична в $B(0,1)$).

Пусть для $N \in \mathbb{Z}_+$ выполнено условие $1 - \dfrac{1}{\alpha^N} \leqslant |z| \leqslant 1 - \dfrac{1}{\alpha^{N+1}}$, тогда

$$\begin{aligned} |f_\alpha(z)| &\leqslant \frac{2}{\alpha^N}\left(\sum_{k=1}^{N}\alpha^k + \sum_{k=N+1}^{\infty}\alpha^k\left(1-\frac{1}{\alpha^{N+1}}\right)^{\alpha^k}\right) \\ &\leqslant 4 + 2\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k e^{-\alpha^{k-1}} < 4 + 2\alpha, \end{aligned} \tag{2.2}$$

т.е. функция f_α ограничена в $B(0,1)$.

Теперь докажем, что при всех достаточно больших четных α функция u_α из (2.1) не имеет нигде на $S(0,1)$ радиальных пределов.

Рассмотрим последовательности: $r_N = 1 - \dfrac{1}{\alpha^N}$, $\rho_N = 1 - \dfrac{\ln\alpha}{\alpha^N}$. Зафиксируем произвольный угол φ, $\varphi \in [0, 2\pi)$. Так как α четно, нетрудно проверить, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\max(|\cos(\alpha^k\varphi)|, |\cos(\alpha^{k+1}\varphi)|) > \frac{1}{2\alpha}. \tag{2.3}$$

Пусть существует последовательность номеров N, таких, что $|\cos(\alpha^N\varphi)| > \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$; тогда аналогично оценке (2.2) получим:

$$|u(r_N e^{i\varphi})| > \frac{1}{\alpha^N}\left(\frac{\alpha^N}{\sqrt{\alpha}}\left(1-\frac{1}{\alpha^N}\right)^{\alpha^N} - \sum_{k=1}^{N-1}\alpha^k - \alpha^N O\left(\frac{\alpha}{e^\alpha}\right)\right) > \frac{A_1}{\sqrt{\alpha}} \tag{2.4}$$

при достаточно больших α. Аналогично при всех φ имеем:

$$|u(\rho_N e^{i\varphi})| < \frac{2\ln\alpha}{\alpha^N}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\alpha^k + \alpha^N\left(1-\frac{\ln\alpha}{\alpha^N}\right)^{\alpha^N} + \alpha^N O\left(\frac{\alpha}{e^\alpha}\right)\right) < \frac{A_2\ln\alpha}{\alpha}. \quad (2.5)$$

В силу (2.4) и (2.5) при достаточно больших α для указанной последовательности номеров N выполнено неравенство

$$|u(r_N e^{i\varphi}) - u(\rho_N e^{i\varphi})| > \frac{A_3}{\sqrt{\alpha}}.$$

Осталось рассмотреть случай таких φ, что для всех k, начиная с некоторого, $|\cos(\alpha^k\varphi)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$. В силу (2.3) возьмем последовательность номеров N, таких, что $|\cos(\alpha^{N-1}\varphi)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$ и $\dfrac{1}{2\alpha} < |\cos(\alpha^N\varphi)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Тогда, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{N-1}\alpha^k r^{\alpha^k}|\cos(\alpha^k\varphi)| < A_4\alpha^{N-2}\sqrt{\alpha},$$

и аналогично формулам (2.4)–(2.5) получаются оценки

$$|u(r_N e^{i\varphi})| > \frac{A_1}{\alpha}; \quad |u(\rho_N e^{i\varphi})| < \frac{A_2\ln\alpha}{\alpha\sqrt{\alpha}},$$

что завершает доказательство (и построение примера). □

§3. Доказательство теоремы 1

Начнем со вспомогательных утверждений. Напомним формулу Альманси [12]. Пусть u – функция, полигармоническая порядка n в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^d$, звездной относительно точки $t \in D$. Тогда u однозначно представима в виде

$$u(x) = \sum_{m=0}^{n-1} u_m(x)|x-t|^{2m}, \quad (3.1)$$

где все u_m – функции, гармонические в D. Заметим, что при $d = 2$ представление (3.1) по существу является следствием формулы (1.1).

В частности, пусть u – функция, полигармоническая порядка n в шаре $B(0,1)$; зафиксируем R, $0 < R \leqslant 1$. Тогда (например, [9, лемма 1]) равенство (3.1) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{m=0}^{n-1} u_{m,R}(x) \left(R^2 - |x|^2\right)^m, \tag{3.2}$$

где все функции $u_{m,R}$ гармоничны в $B(0,1)$. Функцию $u_{0,R}$ будем называть *согласованной* с u на сфере $S(0,R)$; при $R < 1$ функция $u_{0,R}$ совпадает с u на $S(0,R)$.

Подставив $|x| = R$ в (3.2) и в формулу

$$u(x) = \sum_{m=0}^{n-1} u_{m,1}(x) \left(1 - |x|^2\right)^m \tag{3.3}$$

и учитывая теорему единственности для гармонических функций по значениям на сфере $S(0,R)$, получим равенство

$$u_{0,R}(x) = u_{0,1}(x) + \sum_{m=1}^{n-1} u_{m,1}(x)(1 - R^2)^m. \tag{3.4}$$

Следующее утверждение – частный случай теорем 1 и 2 из [9] (соответственно, при $d = 2$ и $d \geqslant 3$).

Лемма 1. *Пусть в шаре $B(0,1)$ выполнено неравенство $|u(x)| \leqslant M$, тогда в обозначениях (3.3) имеет место оценка*

$$\sum_{m=0}^{n-1} |u_{m,1}(x)| \left(1 - |x|^2\right)^m \leqslant AM.$$

Из леммы 1 и соотношения (3.4) при $|x| < R < 1$ непосредственно вытекает следующая оценка:

$$|u_{0,1}(x) - u_{0,R}(x)| \leqslant A_1 M \frac{1 - R}{1 - |x|}. \tag{3.5}$$

Лемма 2. *Пусть функция u, полигармоническая и ограниченная в $B(0,1)$, имеет на множестве $E \subset S(0,1)$ положительной меры радиальные пределы, тогда почти всюду на E функция u имеет угловые пределы.*

Доказательство леммы 2. Применив теоремы Егорова и Лузина, получим компакт $E_1 \subset E$ меры, как угодно близкой к мере E, такой, что на E_1 функция u стремится к своим радиальным пределам равномерно, а предельная функция непрерывна. Достаточно показать, что функция u имеет угловой предел в t – произвольной точке плотности множества E_1 (относительно лебеговой меры на $S(0,1)$).

Пусть $V(t,\beta)$ – конус с вершиной t и углом при вершине $\beta < \pi/2$, построенный на внутренней нормали к $S(0,1)$ в t. Возьмем произвольное $\delta > 0$; так как t – точка плотности множества E_1, для любой точки $x \in V(t,\beta)$, такой, что $|x| > 1-\delta$, существует точка x', такая, что $|x| = |x'|$, x' расположена на прямой $(0,t')$, где $t' \in E_1$, и $|x-x'| = o(1-|x|)$.

Так как в силу (1.3) в $B(0,1)$ имеет место оценка

$$|\nabla u(x)| \leqslant \frac{AM}{1-|x|}, \tag{3.6}$$

получаем, что $|u(x)-u(x')| = o(1)$. В силу выбора множества E_1 имеем $|u(x')-u(t')| = o(1)$ и $|u(t')-u(t)| = o(1)$, т.е. $|u(x)-u(t)| = o(1)$. Лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть E_2 – компактное подмножество множества E, на котором функция $(1-r)\dfrac{\partial u}{\partial r}$ равномерно стремится к нулю при $r \to 1$, а согласованная гармоническая функция $u_{0,1}$ из (3.3) имеет радиальные пределы; ясно, что мера множества E_2 может быть как угодно близка к мере множества E – это следует из теоремы Егорова, леммы 1 и теоремы Фату для $u_{0,1}$.

В силу леммы 2 достаточно доказать, что исходная функция u имеет в произвольной точке t плотности множества E_2 радиальный предел; покажем, что он совпадает с соответствующим радиальным пределом функции $u_{0,1}$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $|u(x)| \leqslant 1$ в $B(0,1)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Возьмем $\delta > 0$ столь малым, что будут выполнены два условия:

1) на всех радиусах $B(0,1)$ с концами в точках E_2 при всех $r = |x| \geqslant 1-\delta/\varepsilon^2$ выполнено неравенство $(1-r)\left|\dfrac{\partial u}{\partial r}\right| < \varepsilon$;

2) пусть $\Omega = S(0,1) \cap B(t,\delta/\varepsilon)$, тогда для меры Лебега на $S(0,1)$ выполнена оценка $\operatorname{mes}(\Omega \setminus E_2)/\operatorname{mes}(\Omega) < \varepsilon^{2d}$ (напомним, что t – точка плотности).

Пусть V – конус с центром $t = 0$, опирающийся на Ω, T – множество всех точек x конуса V, таких, что $1 - \delta/\varepsilon^2 \leqslant |x| \leqslant 1 - \delta\sqrt{\varepsilon}$, $\omega(\cdot)$ – колебание функции u на соответствующем множестве.

В силу (3.6) имеем $\omega(T \cap S(0, (1 - \delta/\varepsilon^2))) \leqslant A_2(\varepsilon^2/\delta) \cdot (\delta/\varepsilon) = A_2\varepsilon$; в силу условия 1) для точек $t' \in E_2$ имеем $\omega([(1 - \delta/\varepsilon^2)t', (1 - \delta\sqrt{\varepsilon})t']) \leqslant A_1\varepsilon \ln \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Отсюда в силу оценки (3.6) с учетом условия 2) имеем:

$$\omega(T \cap S(0, (1 - \delta\sqrt{\varepsilon}))) \leqslant A_2\varepsilon^2 \frac{\delta}{\varepsilon} \frac{1}{\delta\sqrt{\varepsilon}} = A_2\sqrt{\varepsilon}.$$

Окончательно, имеет место оценка

$$\omega(T) \leqslant A\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.7}$$

Так как функция $u_{0,1}$ имеет в точке $t \in S(0,1)$ радиальный предел, для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что величина $|u((1 - \delta)t) - u_{0,1}((1 - \delta)t)|$ стремится к нулю вместе с δ; это будет следовать из (3.10).

В силу неравенства (3.7) и определения согласованной функции, при $x \in T \cap S(0, 1 - \delta\sqrt{\varepsilon})$ имеем

$$|u((1 - \delta)t) - u_{0,1-\delta\sqrt{\varepsilon}}(x)| \leqslant A\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.8}$$

Так как для всех $y \in S(0, 1 - \delta\sqrt{\varepsilon}) \setminus T$ выполнена оценка $|(1 - \delta)t - y| > A_1\delta/\varepsilon$, формула Пуассона на $S(0, 1 - \delta\sqrt{\varepsilon})$ для гармонической функции $u_{0,1-\delta\sqrt{\varepsilon}}$ вместе с (3.8) дает:

$$|u((1 - \delta)t) - u_{0,1-\delta\sqrt{\varepsilon}}((1 - \delta)t)| \leqslant A_2\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.9}$$

Применив (3.5), получим:

$$|u_{0,1}((1 - \delta)t) - u_{0,1-\delta\sqrt{\varepsilon}}((1 - \delta)t)| \leqslant A_3\sqrt{\varepsilon};$$

окончательно, в силу (3.9) будем иметь:

$$|u((1 - \delta)t) - u_{0,1}((1 - \delta)t)| \leqslant A_4\sqrt{\varepsilon}. \tag{3.10}$$

Таким образом, в силу произвольности ε и существования радиального предела в точке t для ограниченной гармонической функции $u_{0,1}$, доказательство теоремы 1 завершено.

§4. Задачи. Комментарии

Задача 1. Имеет ли место естественный аналог теоремы 1 для полигармонических функций в произвольных жордановых областях пространства $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$, со спрямляемыми границами? Аналогичный вопрос можно поставить и для общих решений эллиптических уравнений.

Комментарий. В приведенном доказательстве теоремы 1 важную роль играет построение функции, "согласованной" на границе области с исходной функцией и имеющей хорошее граничное поведение. В случае сферы существование согласованной гармонической функции непосредственно следует из формулы (3.1).

Теорема 1 легко обобщается на полианалитические функции в жордановых областях $\mathbb{R}^2$, границы которых содержат аналитические дуги. Локально задавая такую дугу γ уравнением $\overline{z} = F(z)$, где F – функция, аналитическая в некоторой окрестности дуги γ, получим для функции (1.1) согласованную аналитическую функцию

$$f_\gamma(z) = \sum_{m=0}^{n-1} f_m(z)(F(z))^m.$$

Случай более общих дуг существенно сложнее.

В следующей задаче сферы также играют особую роль.

Задача 2. Пусть функция u является полигармонической порядка n в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$. Если u обращается в нуль на n различных эллипсоидах, расположенных в D, то будет ли она тождественно равной нулю?

Комментарий. Задача, по-видимому, впервые была поставлена в статье У. К. Хеймана и Б. Коренблюма [13]. В случае n сфер ответ на поставленный вопрос положительный; это отмечалось различными авторами и легко следует по индукции из формулы Альманси.

Действительно, пусть u – функция, полигармоническая порядка $n+1$ в D и равная нулю на сфере $S(a,R) \subset D$. Тогда в силу представления (3.1) имеем $u(x) = (|x-a|^2 - R^2)v(x)$, где v – функция, вещественно аналитическая в D и полигармоническая порядка n в некоторой окрестности сферы $S(a,r)$. Применив к функции $\Delta^n v$ теорему единственности для вещественно аналитических функций, получим, что v – функция, полигармоническая порядка n в D.

В [13] построен пример функции, бигармонической на плоскости $\mathbb{R}^2$ и обращающейся в нуль на бесконечном семействе (вложенных) замкнутых аналитических кривых. Рассматривая линии уровня функции u_α из (2.1), нетрудно показать, используя, например, формулы (2.4) и (2.5) и теорему Сарда, что при подходящих $C \in \mathbb{R}$ функция $u_\alpha - C$ обращается в нуль на бесконечном семействе замкнутых аналитических кривых.

То, что функция, полигармоническая порядка n на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ и обращающаяся в нуль на n различных эллипсах, тождественно равна нулю, установлено в работе М. Б. Балка и автора [14]. Этот результат перенесен Г. Рендером в [15] на n различных эллипсоидов в пространстве $\mathbb{R}^d$, $d > 2$. В случае произвольной односвязной области D задача 2 пока не решена.

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.* Т. 7. *Теория упругости.* М., Наука 1983, изд. 4.
2. М. Б. Балк, *Полианалитические функции и их обобщения.* — Итоги науки и техники. Совр. проб. матем. Фунд. напр. **85** (1991), 187–246.
3. Ф. Д. Гахов *Краевые задачи.* М., Наука. 1977, изд.3.
4. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* М.–Л., 1950.
5. Л. Карлесон, *Избранные проблемы теории исключительных множеств.* М., Мир. 1971.
6. В. А. Петров, *Аналоги теоремы Фату для полианалитических функций.* — Изв. АН Арм. ССР. Математика. **2**, Вып. 4 (1967), 211–217.
7. M. Nicolesco, *Les fonctions polyharmoniques.* Paris. Hermann. 1936.
8. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс.* М., Наука. 1965.
9. К. О. Бесов, *О граничном поведении компонент полигармонических функций.* — Матем. заметки. **64**, Вып. 4 (1998), 518–530.
10. Е. П. Долженко, *О граничном поведении компонент полианалитической функции.* — Матем. заметки. **63**, Вып. 6 (1998), 821–834.
11. A. Borichev, H. Hedenmalm, *Weighted integrability of polyharmonic functions.* — Advances in Math. **264** (2014), 464–505.
12. E. Almansi, *Sull' integrazione dell' equazione* $\Delta^n = 0$. — Annali di Matematica. Ser. 3 **2** (1899), 1–59.
13. W. K. Hayman, B. Korenblum, *Representation and uniqueness theorems for polyharmonic functions.* — Journal Anal. Math. **60** (1993), 113–133.
14. M. B. Balk, M. Ya. Mazalov, *On uniqueness conditions for entire polyharmonic functions.* in Partial Differential and Integral Equations. Int. Soc. Anal. Appl. Comput. 1999. V.2. Kluwer. Dordrecht. pp. 219–232.
15. H. Render, *Real Bargmann spaces, Fischer decompositions, and sets of uniqueness for polyharmonic functions.* — Duke Math. J. **142**, No. 2 (2008), 313–352.

Mazalov M. Ya. On the existence of angular boundary values for polyharmonic functions in the unit ball.

We study boundary properties of polyharmonic functions. In particular, a criterion is obtained (in terms of the radial growth of the derivative) for the existence a.e. of angular boundary values for a polyharmonic function bounded in the unit ball.

Филиал федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
“Национально-исследовательский университет
МЭИ” в г. Смоленске
Энергетический проезд 1,
214013 Смоленск;
Московский государственный
технический университет
им. Н. Э. Баумана
2-я Бауманская ул., д. 5,
105005 Москва, Россия
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступило 25 мая 2017 г.