Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

Е. А. Лебедева

БЕЗУСЛОВНАЯ СХОДИМОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО ФРЕЙМАМ ВСПЛЕСКОВ

Введение

Безусловная сходимость разложений по базисам всплесков в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ изучена подробно, и первые достаточные условия на всплеск-функции, обеспечивающие безусловность разложений в $L_p(\mathbb{R})$ в том случае, когда в $L_2(\mathbb{R})$ система образует ортонормированный базис, доказаны И. Мейером и приведены в большинстве классических монографий по теории всплесков ([4, 9, 11]). Эти достаточные условия предполагают гладкость всплеск-функций ($\psi \in C^1(\mathbb{R})$), которая используется в методе доказательства, основанном на свойствах оператора Кальдерона–Зигмунда [5]. Достаточные условия, не предполагающие гладкость, а только определенную скорость убывания всплеск-функций, предложены в работе Г. Грипенберга [3], его результат усилен в работе П. Войташчика [12] и перенесен им на случай биортогональных базисов всплесков в [6] (см. также [10, глава 11]).

В данной работе изучается безусловная сходимость в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ разложений по системе двойственных фреймов всплесков. Мы не называем здесь фрейм безусловным, так как термин "безусловный фрейм" уже существует и имеет другое определение [1]. Основной результат сформулирован в теореме 1. Требования, предъявляемые к фреймам, совпадают с условиями в теореме П. Войташчика. Так что наш результат является распространением теоремы П. Войташчика на фреймы всплесков.

Вспомогательные сведения

Напомним определение фрейма. Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство. Если существуют постоянные A, $B > 0$ такие, что

Ключевые слова: фреймы всплесков, безусловная сходимость, всплеск-функции.

Работа поддержана РФФИ 15-01-05796, СПбГУ 9.38.198.2015 и фондом Фольксваген.

для любого $f \in H$ верно неравенство

$$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |(f,\, f_n)|^2 \leqslant B\|f\|^2,$$

тогда последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется фреймом в H. Числа A и B называются нижней и верхней границами фрейма соответственно. Если можно выбрать A, B так, чтобы $A = B(= 1)$, тогда последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется жестким фреймом (фреймом Парсеваля) в H. Фрейм Парсеваля, для всех элементов которого $\|f_n\| = 1$, $n \in \mathbb{N}$, образует ортонормированный базис. Любой фрейм является полной системой. Последовательность $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется бесселевой, если для любого $f \in H$ выполняется только правое неравенство $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(f,\, f_n)|^2 \leqslant B\|f\|^2$.

Фрейм $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ называется двойственным для фрейма $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, если для любого $f \in H$ имеет место разложение $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (f,\, g_n) f_n$. Из определения фрейма следует, что это разложение безусловно сходится в H [2, следствие 3.2.5]. Для каждого фрейма существует двойственный, называемый каноническим. Если фрейм не является базисом, то двойственный фрейм определяется не единственным образом [2, лемма 6.3.1]. Если фрейм $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ служит двойственным для фрейма $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, то и наоборот, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является двойственным фреймом для $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Поэтому говорят о паре двойственных фреймов.

Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Обозначим $f_{j,k}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим функции ψ, $\widetilde{\psi} \in L_2(\mathbb{R})$. Если системы $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ образуют пару двойственных фреймов, то говорят, что задана пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. Более подробная информация о фреймах и фреймах всплесков в частности может быть найдена в [2, 8].

Результаты

Пусть $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. Известно, что ряд $\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k}) \psi_{j,k}$ безусловно сходится для любой функции $f \in L_2(\mathbb{R})$. Теорема 1 дает достаточные условия для безусловной сходимости рядов $\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ в пространствах $L_p(\mathbb{R})$, где функции ψ, $\widetilde{\psi}$ принадлежат пространству $L_p(\mathbb{R})$ при любом $p \in (1,\, \infty)$.

Теорема 1. *Пусть $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$, и пусть существует четная ограниченная убывающая на $[0,\, \infty)$ функция η, удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx < \infty, \ \textit{и такая, что } |\psi(x)|, |\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \eta(x),$$

тогда для любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, ряд

$$\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$$

безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Отметим, что условия теоремы 1 (существование ограниченной суммируемой мажоранты) обеспечивают принадлежность функций ψ, $\widetilde{\psi}$ всем пространствам $L_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant p < \infty$. Разобьем доказательство теоремы 1 на доказательства нескольких вспомогательных утверждений.

Обозначим

$$U_\varepsilon f := \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\varepsilon_{j,k} = \pm 1$ – последовательность знаков.

Лемма 1 ([12, Предложение 1], [10, лемма 11.1.9])**.** *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, $\lambda > 0$. Пусть существует четная ограниченная убывающая на $[0,\, \infty)$ функция η, удовлетворяющая условию $\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx < \infty$, и такая, что $|\psi(x)|, |\widetilde{\psi}(x)| \leqslant \eta(x)$. Тогда*

$$\mu\{x \in \mathbb{R} \,:\, |U_\varepsilon f(x)| > \lambda\} \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_1,$$

где μ – мера Лебега на прямой.

Лемма 2. *Пусть* $U_\Omega f := \sum\limits_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$, $1 < p < \infty$. *Пусть функции* ψ *и* $\widetilde{\psi}$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда для всех конечных множеств* $\Omega \subset \mathbb{Z}^2$ *и функций* $f \in L_p(\mathbb{R})$ *выполняется неравенство*

$$\|U_\Omega f\|_p \leqslant M\|f\|_p,$$

где постоянная M *зависит только от* p *и функций* ψ, $\widetilde{\psi}$.

Доказательство. Так как $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ и $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – фреймы, то оператор U_ε имеет сильный тип $(2,2)$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|U_\varepsilon f\|_2 &= \Big\| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_2 \\
&= \Big| \Big(\sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g \Big) \Big| \\
&= \Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g) \Big|,
\end{aligned}$$

где $\|g\|_2 \leqslant 1$. Тогда из неравенства Коши и определения фрейма последовательно имеем

$$\begin{aligned}
\Big| \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \varepsilon_{j,k}(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g) \Big|^2 &\leqslant \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})|^2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |(\psi_{j,k},\, g)|^2 \\
&= B\widetilde{B}\|g\|_2^2\|f\|_2^2 \leqslant B\widetilde{B}\|f\|_2^2,
\end{aligned}$$

где B, $\widetilde{B}$ – верхние границы фреймов $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ и $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ соответственно. Тогда из леммы 1, применяя интерполяционную теорему Марцинкевича, получим неравенство $\|U_\varepsilon f\|_p \leqslant M\|f\|_p$ для $1 < p < 2$ и $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$. Искомое неравенство для всех $f \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < 2$, следует из возможности представить оператор U_Ω в виде полусуммы двух операторов вида U_ε, ограниченности оператора U_Ω в $L_p(\mathbb{R})$ и плотности $L_2(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$ в $L_p(\mathbb{R})$.

Пусть теперь $2 < p < \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|U_\Omega f\|_p &= \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p \\ &= \Big| \Big(\sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g \Big) \Big| \\ &= \Big| \Big(f,\, \sum_{(j,k)\in\Omega} (\psi_{j,k},\, g)\widetilde{\psi}_{j,k} \Big) \Big|, \end{aligned}$$

где $\|g\|_q \leqslant 1$, $1/p + 1/q = 1$. Пользуясь неравенством Гёльдера и тем, что искомое неравенство уже доказано для $1 < q < 2$, мы окончательно получим

$$\begin{aligned} \Big| \Big(f,\, \sum_{(j,k)\in\Omega} (\psi_{j,k},\, g)\widetilde{\psi}_{j,k} \Big) \Big| &\leqslant \|f\|_p \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (\psi_{j,k},\, g)\widetilde{\psi}_{j,k} \Big\|_q \\ &\leqslant M\|f\|_p\|g\|_q \leqslant M\|f\|_p. \qquad \square \end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть $f^{j,k} \in L_p(\mathbb{R})$. Тогда если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого конечного множества индексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, где $B_{n_0(\varepsilon)}$ – круг радиуса $n_0(\varepsilon)$ с центром в нуле, выполняется неравенство $\Big\| \sum\limits_{(j,k)\in\Omega} f^{j,k} \Big\|_p < \varepsilon$, то двойной ряд $\sum\limits_{j,k\in\mathbb{Z}} f^{j,k}$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$.*

Доказательство леммы аналогично хорошо известному доказательству безусловной сходимости для кратных числовых рядов.

Лемма 4. *Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$, и $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ – пара двойственных фреймов всплесков в $L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого конечного множества индексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, где $B_{n_0(\varepsilon)}$ – круг радиуса $n_0(\varepsilon)$ с центром в нуле, выполняется неравенство $\Big\| \sum\limits_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_2 < \varepsilon$.*

Доказательство. Действительно,

$$\Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_2 = \Big| \Big(\sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k},\, g_\Omega \Big) \Big| = \Big| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g_\Omega) \Big|,$$

где $\|g_\Omega\|_2 \leqslant 1$. Тогда из неравенства Коши, определения фрейма и включения $\Big((f,\, \widetilde{\psi}_{j,k}) \Big)_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} \in l_2$, последовательно имеем

$$\Big| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})(\psi_{j,k},\, g_\Omega) \Big|^2 \leqslant \sum_{(j,k)\in\Omega} |(f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})|^2 \sum_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2} |(\psi_{j,k},\, g_\Omega)|^2 \leqslant B\|g_\Omega\|_2^2 \varepsilon \leqslant B\varepsilon,$$

где B – верхняя граница фрейма $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$. □

Лемма 5. *Пусть $g \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$ и функции ψ, $\widetilde{\psi}$ удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует число $n_0(\varepsilon)$ такое, что для любого конечного множества индексов $\Omega \subset \mathbb{Z}^2 \setminus B_{n_0(\varepsilon)}$, где $B_{n_0(\varepsilon)}$ – круг радиуса $n_0(\varepsilon)$ с центром в нуле, выполняется неравенство* $\Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (g,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p < \varepsilon$.

Доказательство. Подберем такое $p_0 \geqslant 3$, чтобы $p_0 - 2 < p < p_0$, и найдем непрерывную функцию f с компактным носителем, для которой $\|g - f\|_p < \varepsilon$. Докажем, что для функции f верно утверждение леммы.

Из неравенства Гельдера и из леммы 2 последовательно получим

$$\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}(x) \Big|^p dx \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}(x) \Big|^{(p-p_0+2)\,\frac{2}{p-p_0+2}} dx \Big)^{\frac{p-p_0+2}{2}} \times \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}(x) \Big|^{(p_0-2)\,\frac{2}{p_0-p}} dx \Big)^{\frac{p_0-p}{2}}$$

$$= \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_2^{p-p_0+2} \times \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_{\frac{2(p_0-2)}{p_0-p}}^{p_0-2}$$
$$\leqslant \Big(M\|f\|_{\frac{2(p_0-2)}{p_0-p}} \Big)^{p_0-2} \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_2^{p-p_0+2},$$

где M зависит только от p, p_0, ψ и $\widetilde{\psi}$. Так как $f \in L_2(\mathbb{R})$, то из леммы 4 следует, что лемма 5 верна для функции f.

Для функции $g \in L_p(\mathbb{R})$ вывод следует из леммы 2, так как

$$\Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (g,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p$$
$$\leqslant \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (g-f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p + \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p$$
$$\leqslant M\|g-f\|_p + \Big\| \sum_{(j,k)\in\Omega} (f,\, \widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k} \Big\|_p. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 1 сводится к последовательному применению леммы 5 и леммы 3.

Из лемм 3–5 также следует достаточное условие для безусловной сходимости в $L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, разложений по произвольной паре двойственных фреймов из $L_2(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\widetilde{f_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ – пара двойственных фреймов в $L_2(\mathbb{R})$, f_n, $\widetilde{f_n} \in L_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, и существует постоянная M такая, что для любого конечного множества индексов Ω и любой функции $f \in L_p(\mathbb{R})$ выполняется неравенство*

$$\Big\| \sum_{n\in\Omega} (f,\, \widetilde{f_n}) f_n \Big\|_p \leqslant M\|f\|_p, \tag{1}$$

то ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (f,\, \widetilde{f_n}) f_n$ безусловно сходится в $L_p(\mathbb{R})$.

Теорема 2 является аналогом для случая двойственных фреймов достаточного условия следующей известной теоремы, на которой основывается доказательство безусловной сходимости разложений по базисам всплесков.

Теорема 3 (глава 1, §4, теорема 10 [7]). *Пусть X – банахово пространство. Для того чтобы полная и минимальная в X система $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ являлась безусловным базисом, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная M, для которой при любом наборе чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{N}$ с $\varepsilon_n = \pm 1$ для $1 \leqslant n \leqslant N$, $N = 1, 2, \ldots$, выполняются неравенства*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n (x, y_n) x_n \right\| \leqslant M \|x\|, \tag{2}$$

где $\{x_n, y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – биортонормированная система.

Условия (1) и (2) равносильны. Выполнение условия (1) для пары двойственных фреймов всплесков проверено в лемме 2, ее доказательство следует из результата П. Войташчика. Леммы 3–5 заменяют требование минимальности системы из теоремы 3, которое не выполняется для произвольных фреймов.

Автор выражает благодарность профессору М. А. Скопиной за многочисленные обсуждения задачи.

Литература

1. P. G. Casazza, O. Christensen, *Hilbert space frames containing Riesz basis and Banach spaces which have no subspace isomorphic to* c_0. — J. Math. Anal. Appl. **202** (1996), 940–950.
2. O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases. Applied and Numerical Harmonic Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2016.
3. G. Gripenberg, *Wavelet bases in* $L_p(\mathbb{R})$. — Studia Math **106**, No. 2 (1993), 175–187.
4. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам*, Ижевск: НИЦ *Регулярная и хаотическая динамика*, 2001.
5. Е. М. Дынькин, Б. П. Осиленкер, *Весовые оценки сингулярных интегралов и их приложения.* — Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. **21** (1983), 42–129.
6. T. Fiegel, P. Wojtaszczyk, *Special bases in functional spaces.* — *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Volume 1 (2001), 561–597.
7. Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, АЦТ, 1999.
8. A. Krivoshein, V. Protasov, M. Skopina, *Multivariate wavelet frames*, Springer Singapore, 2016.
9. Y. Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1992.
10. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков*, Физматлит, 2005.
11. P. Wojtaszczyk, *A Mathematical Introduction to Wavelets*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1997.
12. P. Wojtaszczyk, *Wavelets as unconditional bases in* $L_p(\mathbb{R})$. — J. Fourier Anal. **5**, No. 1 (1999), 73–85.

Lebedeva E. A. Unconditional convergence for wavelet frame expansions.

Let $\{\psi_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, $\{\widetilde{\psi}_{j,k}\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$ be dual wavelet frames in $L_2(\mathbb{R})$, and let η be an even, bounded function monotone decreasing on $[0,\infty)$ such that

$$\int\limits_0^\infty \eta(x)\ln(1+x)\,dx<\infty,$$

and $|\psi(x)|,|\widetilde{\psi}(x)|\leqslant\eta(x)$. Then the series $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}}(f,\,\widetilde{\psi}_{j,k})\psi_{j,k}$ converges unconditionally in $L_p(\mathbb{R})$, $1<p<\infty$.

СПбГУ, Университетская наб.
д.7-9., 199034, Санкт-Петербург;
СПбПУ, Политехническая 29, 195251
Санкт-Петербург
E-mail: ealebedeva2004@gmail.com

Поступило 3 мая 2017 г.