

В. А. Костин, М. Н. Небольсина

К ТЕОРИИ C_0 -ОПЕРАТОРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

В [4] введены и изучались C_0 -операторные многочлены Чебышева первого и второго рода $T_n(A), U_n(A)$ ($n = 0, 1, \dots$), где A – генератор полугруппы операторов $V(A, t)$ класса C_0 , действующей в банаховом пространстве. При этом были получены некоторые представления для операторных функций $(A - I)^{\frac{1}{2}}$ и $\mu(A) = A - (A^2 - I)^{\frac{1}{2}}$, связанные с многочленами $T_n(A), U_n(A)$.

В настоящей заметке также рассматриваются C_0 -операторные многочлены $P_n(A)$ ($n = 0, 1, \dots$), но соответствующие более широкому классу скалярных многочленов, содержащему, в частности, многочлены, изучаемые М. И. Аптекаревым в [1], в том числе многочлены Якоби.

С использованием этих операторных многочленов мы строим ограниченные операторные функции $q_\gamma(A) = [(A - \gamma I)^2 - \lambda^2]^{-\frac{1}{2}}$ и $\mu_\gamma(A) = (A - \gamma I) - [(A - \gamma I)^2 - \lambda^2]^{\frac{1}{2}}$, где $\gamma, \lambda \in R^1$.

Такие операторные многочлены и построенные по ним операторные дроби находят применение при корректной разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве и их численной реализации.

§1. C_0 -ОПЕРАТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА.

Для построения операторных многочленов и связанных с ними операторных функций применим интеграл Лапласа–Стилтьеса (см. [6, стр. 136])

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} d\nu(t), \quad (1.1)$$

где ν – комплекснозначная борелевская мера на действительной оси R , $p \in \mathbb{C}$, \mathbb{C} – поле комплексных чисел.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, операторные многочлены, сильно-непрерывная полугруппа, генератор, операторные функции Бесселя.

В этом случае функцию от оператора $f(A)$ можно определить формулой

$$f(A) = \int_0^{\infty} V(A, t) d\nu(t), \quad (1.2)$$

где $V(A, t)$ – однопараметрическая полугруппа линейных операторов, действующих в банаховом пространстве B , а A – ее производящий оператор (генератор).

В зависимости от свойств меры ν и полугруппы $V(t)$, этот интеграл будет сходиться в том или ином смысле и определять оператор $f(A)$.

Здесь мы применим этот метод для позитивных операторов A (см. [5, стр. 275]) таких, что оператор $-A$ является генератором сильно непрерывной полугруппы $V(-A, t)$, $t \in [0, \infty)$, удовлетворяющей условию

$$\|V(-A, t)\| \leq M e^{-\omega t} \quad (\omega > 0), \quad (1.3)$$

что по теореме Хилле–Филлипса (см. [6]) эквивалентно оценке на степени резольвенты

$$\|R^n(-A, \lambda)\| = \|(A + \lambda I)^{-n}\| \leq M(\operatorname{Re} \lambda + \omega)^{-n}, \quad (1.4)$$

где $\operatorname{Re} \lambda > -\omega$, $n = 1, 2, \dots$ и M от n не зависит.

Таким образом, в нашем случае полугруппа $V(t)$ обладает следующими свойствами:

- 1) $V(0) = I$ – тождественный оператор;
- 2) $V(t + s) = V(t)V(s)$;
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} \|V(t)x - V(t_0)x\|_E \rightarrow 0$ при любом $t_0 \geq 0$;
- 4) $V'(t) = -AV(t)$.

Меры $\nu(t)$ будем считать представимыми в виде $d\nu(t) = \varphi(t) dt$ при $t > 0$ и $d\nu(t) = 0$ при $t < 0$.

Пусть $\tilde{\varphi}(x) = \int_0^{\infty} e^{-xt} \varphi(t) dt$ – преобразование Лапласа функции $\varphi(t)$.

Через Ω обозначим класс скалярных абсолютно интегрируемых на $(0, \infty)$ функций $\varphi(t)$, для которых при всех $\omega > 0$ конечен интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-\omega t} |\varphi(t)| dt = \tilde{|\varphi|}(\omega) \quad (1.5)$$

(в этом обозначении знак $\tilde{}$ относится не к φ , а к $|\varphi|$).

Очевидно, что Ω — линейное многообразие, в котором определена свертка $(\varphi * \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\psi(s) ds$.

При этом справедливо равенство

$$\widetilde{\varphi(\omega) * \psi(\omega)} = \widetilde{\varphi(\omega)} \widetilde{\psi(\omega)}.$$

C_0 -интеграл Лапласа функции $\varphi(t)$ определим соотношением

$$\widetilde{\varphi(A)} = \int_0^\infty V(-A, t) \varphi(t) dt. \quad (1.6)$$

Легко видеть, что оператор $\widetilde{\varphi(A)}$ ограничен и для него выполняется оценка

$$\|\widetilde{\varphi(A)}\| \leq \int_0^\infty \|V(-A, t)\| |\varphi(t)| dt \leq M |\widetilde{\varphi}|(\omega).$$

Функцию $\varphi(t)$ будем называть C_0 -оригиналом оператора $\widetilde{\varphi(A)}$, а $\widetilde{\varphi(A)}$ — образом C_0 -оригинала $\varphi(t)$.

Закон $\widetilde{\varphi}$, по которому оператору A ставится в соответствие C_0 -образ C_0 -оригинала, назовем функциональным символом этого оператора.

Отметим, что фундаментальная теория операционного метода Хевисайда в случае, когда оператор A задается дифференциальным выражением $\frac{d}{dt}$, разработана В. П. Масловым (см. [8]).

Очевидно, что функциональные символы операторов $\varphi_1(A_1)$ и $\varphi_2(A_2)$ совпадают при разных операторах A_1 и A_2 , но одинаковых C_0 -оригиналах. В частности, по Маслову, операторные многочлены $P_n(A_1) = \sum_{m=0}^n a_m A_1^m$ и $Q_n(A_2) = \sum_{m=0}^n b_m A_2^m$ имеют одинаковые символы тогда и только тогда, когда $b_m = a_m$ ($m = 0, 1, \dots, n$). Через понятие операторного символа устанавливается изоморфизм между операторными и скалярными объектами. Таким образом, для нахождения C_0 -образа функции $\varphi(t)$, достаточно найти ее скалярный интеграл Лапласа $\widetilde{\varphi}(z)$, $z \in \mathbb{C}$. И наоборот, нахождение C_0 -оригинала операторной функции $\widetilde{\varphi(A)}$ сводится к нахождению оригинала скалярной функции $\widetilde{\varphi}(z)$.

Пусть \rightsquigarrow — знак соответствия между оригиналом и образом. Легко установить следующие соответствия.

$$1. a\varphi(t) + b\psi(t) \rightsquigarrow a\widetilde{\varphi(A)} + b\widetilde{\psi(A)}, \quad a, b \in \mathbb{C}.$$

2. Равенство $A \int_0^{\infty} V(t) dt = - \int_0^{\infty} V'(t) dt = I$ дает соответствие $1 \mapsto A^{-1}$.
3. Аналогично $e^{-at} \mapsto (A - aI)^{-1}$.
4. $\varphi(t - a) \mapsto V(a)\tilde{\varphi}(A)$.
5. $(\varphi * \psi)(t) \mapsto \tilde{\varphi}(A)\tilde{\psi}(A)$.
6. $\varphi'(t) \mapsto A\tilde{\varphi}(A) - \varphi(0)$.
7. Из свойств 2 и 5 следует соотношение

$$(\mathfrak{J}^n \varphi)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds \mapsto A^{-n} \tilde{\varphi}(A).$$

8. Из теории дробных степеней операторов (см. [5, с. 297], [2, с. 358]) следует соответствие

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \mapsto A^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В настоящей заметке устанавливаются новые важные свойства операторных ортогональных многочленов с помощью операторного интеграла Лапласа.

§2. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СКАЛЯРНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ.

Нам понадобятся следующие понятия.

Пусть $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x), \dots$ — последовательность многочленов с единичным старшим коэффициентом, ортогональных с весом $h(x) \geq 0$ на интервале (a, b) . Тогда для любых трех соседних многочленов справедлива рекуррентная формула ([11, с. 321])

$$P_{n+1}(x) = (x - \gamma_n)P_n(x) - \lambda_{n-1}^2 P_{n-1}(x), \quad (2.1)$$

где γ_n и λ_{n-1} — некоторые коэффициенты. В случае классических многочленов Якоби, Эрмита, Лагерра их вид указан, например, в [11]. Если интервал ортогональности конечен, то $0 < \lambda_n < \max(|a|, |b|)$ ([11, с. 21]).

Фундаментальным свойством ортогональных многочленов является взаимное разделение корней соседних многочленов $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$, которые все различны и лежат в интервале ортогональности (a, b) .

Отсюда, в частности, следует важное разложение

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{(x - x_k)}, \quad (2.2)$$

где $c_k = \frac{P_{n-1}(x_k)}{P_n'(x_k)} > 0$, x_k – корни многочлена $P_n(x)$. В то же время, используя преобразование Лапласа, равенство (2.2) можно записать в другой форме, которую будем применять далее. Так, при $x > b$ из (2.2) следует соотношение

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^{\infty} e^{-(x-x_k)t} dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n c_k e^{x_k t} \right) e^{-xt} dt. \quad (2.3)$$

Обозначая $\sum_{k=1}^n c_k e^{x_k t} = G_n(t)$, запишем (2.3) в виде

$$\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \int_0^{\infty} e^{-xt} G_n(t) dt. \quad (2.4)$$

Таким образом, дроби $\frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)}$ являются интегралами Лапласа функций $G_n(t)$, которые будем называть корневыми суммами. Заметим, что для них справедливо неравенство

$$G_n(t) > 0. \quad (2.5)$$

Далее, записав (2.1) в виде

$$\frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)} - (x - \gamma_n) + \lambda_{n-1}^2 \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = 0, \quad (2.6)$$

и предположив существование пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = \gamma, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = p(x) \neq 0, \quad (2.7)$$

перейдем в (2.6) к пределу при $n \rightarrow \infty$. Из двух решений предельного уравнения

$$\lambda^2 p_\gamma^2(x) - (x - \gamma)p_\gamma(x) + 1 = 0$$

берем решение

$$p_\gamma(x) = \frac{(x - \gamma) - \sqrt{(x - \gamma)^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2} \quad (2.8)$$

как ограниченное при $x \rightarrow \infty$.

Функцию $p_\gamma(x)$ назовем предельной характеристикой системы $\{P_n(x)\}$.

Замечая, что $p_\gamma(x)$ является преобразованием Лапласа функции $\varphi(t) = \frac{e^{\gamma t} I_1(2\lambda t)}{t}$ (где $I_1(2\lambda t)$ – функция Бесселя), и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенстве (2.4), получаем соотношение

$$p_\gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-xt} G_n(t) dt = \int_0^\infty e^{-xt} \frac{e^{\gamma t} I_1(2\lambda t)}{t} dt. \quad (2.9)$$

Функцию $G(t) = \frac{e^{\gamma t} I_1(2\lambda t)}{t}$ будем называть предельной корневой суммой системы $\{P_n(x)\}$, удовлетворяющей условиям (2.7).

Далее, учитывая, что функция $p_\gamma^j(x)$ является преобразованием Лапласа функции $G^j(t) = j e^{\gamma t} \frac{I_j(2\lambda t)}{t}$, где $I_j(s)$ – функция Бесселя мнимого аргумента j -го порядка, получаем соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{n-j}(x)}{P_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-xt} \prod_{k=1}^j G_k(t) dt = j \int_0^\infty e^{-xt + \gamma t} \frac{I_j(2\lambda t)}{t} dt. \quad (2.10)$$

Замечание 1. Условиям (2.7) удовлетворяют многочлены, рассмотренные А. И. Аптекаревым в [1] при $\gamma = 0, \lambda = \frac{1}{2}$, в том числе системы многочленов Якоби с весами $h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$.

В случае многочленов с весами $h(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ из рекуррентных формул ([11, с. 275]) имеем равенства: $\gamma = 0, \lambda = \frac{1}{2}$. И, следовательно, все эти системы имеют одну предельную корневую сумму

$$G(t) = \frac{I_1(t)}{t}.$$

При этом

$$G^j(t) = j \frac{I_j(t)}{t}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

Таким образом, справедливо следующее предложение.

Предложение 1. Системы многочленов Аптекарева–Якоби на интервале $(-1, 1)$ имеют одинаковые предельные характеристики $p_0(x)$ и предельную корневую сумму $G(t) = \frac{I_1(t)}{t}$, не зависящие от весовых

мер и связанные соотношением

$$p_0(x) = 2(x - \sqrt{x^2 - 1}) = 2 \int_0^\infty e^{-xt} \frac{I_1(t)}{t} dt. \quad (2.12)$$

Кроме того, из (2.12) следует соотношение

$$p_0^n(x) = \frac{2^n}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n} = n \int_0^\infty e^{-xt} \frac{I_n(t)}{t} dt, \quad (2.13)$$

где $I_n(s)$ – функция Бесселя мнимого аргумента n -го порядка.

§3. C_0 -ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

В соответствии с [7], для генераторов C_0 -полугрупп можно строить многочлены $P_n(A)$ любой степени $n = 0, 1, \dots$ на плотном в банаховом пространстве B множестве D . Исходя из этого дадим следующее определение

Определение 1. Пусть позитивный оператор A таков, что $-A$ является генератором полугруппы $V(t)$, удовлетворяющей условию (1.3). Тогда операторные ортогональные многочлены $P_n(A)$ порождаются трехчленным рекуррентным соотношением

$$P_{n+1}(A) = (A - \gamma_n I)P_n(A) - \lambda_{n-1}^2 P_{n-1}(A), \quad (3.1)$$

где γ_n и λ_{n-1} – коэффициенты из (2.1), I – тождественный оператор.

Теорема 1. Справедливы соотношения

$$I_0(t) \rightsquigarrow (A^2 - I)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{I_n(t)}{t} \rightsquigarrow \mu_\gamma^n(A).$$

Здесь $I_0(t), I_n(t)$ – функции Бесселя мнимого аргумента нулевого и n -го порядка соответственно.

Пусть $x_k, k = 1, \dots, n$, – корни многочлена $P_n(x)$, удовлетворяющего равенству (2.1). Тогда определены операторные дроби соотношением

$$P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A) = - \sum_{k=1}^n c_k R(-A, -x_k) = \sum_{k=1}^n c_k (A - x_k I)^{-1}, \quad (3.2)$$

где коэффициенты c_k взяты из разложения (2.2).

Далее, пользуясь известной формулой

$$R(\lambda) = - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t) dt,$$

см. [6], запишем соотношение (3.2) в виде

$$P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A) = \sum_{k=1}^n c_k \int_0^{\infty} e^{x_k t} V(t) dt = \int_0^{\infty} V(t) G_n(t) dt. \quad (3.3)$$

Таким образом, операторная дробь $P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A)$ является C_0 -интегралом Лапласа корневой суммы системы $\{P_n(x)\}$. Используя (1.3) для $\omega > b$, получаем оценку

$$\|P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A)\| \leq M \int_0^{\infty} e^{-\omega t} G_n(t) dt = M P_{n-1}(\omega) P_n^{-1}(\omega). \quad (3.4)$$

Можно показать (см. [3]), что в равенстве (3.3) справедлив предельный переход в сильном смысле при $n \rightarrow \infty$. И тогда определен предельный оператор

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1}(A)P_n^{-1}(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} V(t) G_n(t) dt = \int_0^{\infty} V(t) \frac{e^{\gamma t} I_1(2\lambda t) dt}{t} \\ &= \frac{1}{2\lambda^2} [(A - \gamma) - \sqrt{(A - \gamma)^2 - 4\lambda^2}] = p_{\gamma}(A). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для многочленов Аптекарева–Якоби формула (3.5) имеет вид

$$p_{\gamma}(A) = \mu(A) = A - \sqrt{A^2 - I} = \int_0^{\infty} V(t) \frac{I_1(t)}{t} dt. \quad (3.6)$$

Заметим, что оператор $\mu(A) = A - \sqrt{A^2 - I}$ в [4] определен через многочлены Чебышева 2-го рода. Кроме того, получено соотношение

$$(A^2 - I)^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{A^2 - I})^{-1} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{2k+1}(A), \quad (3.7)$$

откуда, учитывая равенство

$$\mu^{2k+1}(A) = (2k + 1) \int_0^\infty V(t) \frac{I_{2k+1}(t)}{t},$$

получаем

$$(\sqrt{A^2 - I})^{-1} = 2 \int_0^\infty V(t) \sum_{k=0}^\infty (2k + 1) \frac{I_{2k+1}(t)}{t} dt = \int_0^\infty V(t) I_0(t) dt. \quad (3.8)$$

Это и доказывает справедливость теоремы.

Заметим, что попутно получено и разложение для скалярных функций

$$I_0(t) = \frac{2}{t} \sum_{k=0}^\infty (2k + 1) I_{2k+1}(t). \quad (3.9)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Аптекарев, *Асимптотика ортогональных многочленов в окрестности концов интервала ортогональности*. — Мат. сборник **183**, No. 5 (1992), 43–62.
2. К. Иосида, *Функциональный анализ*, Мир, М., 1967.
3. В. А. Костин, *О равномерно корректной разрешимости краевых задач для абстрактных уравнений с оператором Келдыша-Феллера*. — Дифференциальные уравнения **7**, No. 8 (1984), 1419–1425.
4. В. А. Костин, М. Н. Небольсина, *C_0 -операторные ортогональные многочлены Чебышева и их представления*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **376** (2010), 64–88.
5. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский, *Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций*, Наука, М., 1966.
6. С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967.
7. С. Г. Крейн, М. И. Хазан, *Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*. — Итоги науки и техники. Мат. анализ **21** (1983), 130–264.
8. В. П. Маслов, *Операторные методы*, Наука, М., 1973.
9. М. Н. Небольсина, *Ортогональные многочлены Чебышева и краевая задача Неймана*. — Дифференциальные уравнения **46**, No. 3 (2010), 449–450.
10. Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962.
11. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, Наука, М., 1979.

Kostin V. A., Nebol'sina M. N. To the theory of the C_0 -operator orthogonal polynomials.

Operator orthogonal polynomials are considered whose argument is the generator of a strongly continuous semigroup of transformations of class

C_0 acting in a Banach space. Earlier such polynomials were treated by the authors in the case of the Chebyshev polynomials of the first and second kind. In this article more general classes of operator orthogonal polynomials are studied, which include the Jacobi and Aptekarev polynomials. Integral representation of operator fractional-rational functions and also Bessel operator functions of imaginary argument are presented.

Воронежский Государственный Университет,
г. Воронеж

Поступило 5 июня 2017 г.

E-mail: vlkostin@mail.ru

E-mail: marinanebolsina@yandex.ru