Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

С. В. Кисляков, Д. В. Максимов

ОДНА ТЕОРЕМА ВЛОЖЕНИЯ С АНИЗОТРОПИЕЙ ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

1. Эта заметка написана по мотивам статей [1] и [2, §1]. Мы интересуемся следующим вопросом. Пусть k и l – натуральные числа и пусть $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим функции

$$\varphi_i = \partial_1^k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} u_j \right) + \partial_2^l \left(\sum_{j=1}^{n} b_{ji} u_j \right), \quad i = 1, \dots, s, \tag{1}$$

где через ∂_1 и ∂_2 обозначены дифференцирования по первой и второй переменной, а a_{ji} и b_{ji} – фиксированные комплексные числа. Нельзя ли оценить подходящие соболевские L^2-нормы функций u_j через L^1-нормы функций φ_i?

Классическое неравенство Гальярдо–Ниренберга

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leqslant \|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

– пожалуй, самая известная из оценок такого рода.

В статье Ван Шафтингена [4] изучался случай, когда $k = l$. В действительности в [4] речь шла о подобной задаче в $\mathbb{R}^d$, но мы не рассматриваем случай, когда $d > 2$ (см. начало п. 2 по поводу причины). Ван Шафтинген доказал, что оценка

$$\|u_j\|_{W_2^{k-1}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C \max_i \|\varphi_i\|_{L^1}$$

справедлива тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

(а) оператор $(t_1, \dots, t_n) \mapsto \Big(\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ji}\xi_1^k + b_{ji}\xi_2^k) t_j \Big)_{i=1}^{s}$ имеет нулевое ядро при всех $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$;

(б) пересечение образов всех таких операторов с $\xi \neq 0$ состоит из одного нуля.

Еще ранее случай $k = l = 1$ изучался в статье [1]. Условие на матрицы a_{ji} и b_{ji}, найденные в той работе, было лишь достаточным для

Ключевые слова: соболевские нормы, неравенство Гальярдо–Ниренберга, циклический вектор.

Работа поддержана РФФИ, грант 17-01-00607.

существования нужной оценки, но в каком-то смысле более "конструктивным", чем условия (а) и (б). Подробности см. суть ниже.

Метод Ван Шафтингена совершенно не применим в анизотропном случае $k \neq l$. Однако в [2] соответствующая оценка соболевских норм была получена иным способом – правда, с крайне специальными коэффициентами a_{ji} и b_{ji}. Здесь мы распространим этот анизотропный результат на общие коэффициенты – при условиях, похожих на те, что использовались в [1]. Подчеркнем, что мы намеренно не выходим за рамки синтеза методов работ [1] и [2] (не упуская, разумеется, возможных усилений и технических упрощений). Естественные вопросы, выходящие за эти пределы, пока будут оставлены в стороне.

Приступим к формулировке. В [1] объяснялось, что (при $k = l = 1$) довольно естественно рассматривать лишь случай, когда число равенств вида (1) на единицу больше числа функций u_j (т.е. $s = n + 1$). Потребуем этого и сейчас. Далее, потребуем, чтобы обе матрицы a_{ji} и b_{ji} имели максимальный ранг (т.е. n). Мотивировать это можно тем, что в противном случае будет заведомо нарушено условие эллиптичности (а) (пусть даже его роль при $k \neq l$ не очень ясна), а также тем, что в [1] подобное ограничение тоже вводилось – правда, всего для одной из матриц. Впрочем, обратившись к [1], несложно понять, что неявно оно было наложено и на вторую.

Теперь перепишем равенства (1) в виде

$$\begin{gathered} \varphi = \partial_1^k A^* u + \partial_2^l B^* u, \\ \varphi_{n+1} = \partial_1^k \langle u, a\rangle + \partial_2^l \langle u, b\rangle. \end{gathered} \tag{2}$$

Здесь $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^n$ и $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}^n$ – это, соответственно, отображения $t \mapsto (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ и $t \mapsto (u_1(t), \dots, u_n(t))$, a и b – векторы $(\bar{a}_{j,n+1})_{1 \leqslant j \leqslant n}$ и $(\bar{b}_{j,n+1})_{1 \leqslant j \leqslant n}$, угловые скобки обозначают скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, а A и B – (понятно, какие) линейные операторы в $\mathbb{C}^n$. Во всей заметке мы используем эрмитову двойственность в $\mathbb{C}^n$, а черта над символом обозначает комплексное сопряжение. Операторы, вовлеченные в (2), представлены в виде сопряженных для удобства (см. ниже).

В силу предположений, сделанных выше, мы можем и будем считать без потери общности, что $l \leqslant k$ и оператор A обратим. Тогда очевидными элементарными преобразованиями (см., впрочем, по поводу деталей статью [1]), заменяя функции φ_i их линейными комбинациями (за которыми мы для краткости сохраним те же обозначения φ_i) и изменяя подходящим образом вектор b, мы можем привести систему (2) к виду

$$\varphi = \partial_1^k u + \partial_2^l D^* u, \quad \varphi_{n+1} = \partial_2^l \langle u, b\rangle. \tag{3}$$

Здесь $D = BA^{-1}$. Рассмотрим циклическое подпространство оператора D, порожденное вектором b:

$$X = \operatorname{span}\{D^m b : m = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Пусть Q – ортогональный проектор на X.

Последнее, что необходимо нам для формулировки теоремы – это соболевские нормы, подлежащие оценке:

$$\|f\|_{W_2^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^2)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \||\xi|^\alpha |\eta|^\beta \widehat{f}(\xi,\eta)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Через $\widehat{f}$ здесь и далее обозначается преобразование Фурье функции f.

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\|Qu\|_{W^{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^2)} \leqslant C \sum_{j=1}^{n+1} \|\varphi_j\|_{L^1}$$

при всех α, $\beta \geqslant 0$, удовлетворяющих соотношению

$$\frac{\alpha + \frac{1}{2}}{k} + \frac{\beta + \frac{1}{2}}{l} = 1. \tag{4}$$

Константа C зависит лишь от k, l, n, оператора D и вектора b.

В случае $k = l = 1$ (тогда единственное решение уравнения (4) – это $\alpha = \beta = 0$) теорема 1 была доказана в [1] в предположении, что $X = \mathbb{C}^n$ (соответственно, Q – тождественный оператор). В общем случае, пусть $r = \dim X$, тогда ясно, что векторы b, $Db, \dots, D^{r-1}b$ линейно независимы и порождают пространство X.

2. Приступая к доказательству теоремы 1, мы действуем по аналогии со статьей [2] и прежде всего перепишем систему (3) в терминах преобразований Фурье[1]:

$$\begin{aligned}(-i\xi_1)^k v(\xi_1, \zeta_2) + (-i\xi_2)^l D^* v(\xi_1,\xi_2) &= \widehat{\varphi}(\xi_1,\xi_2),\\ (-i\xi_2)^l \langle v, b\rangle &= \widehat{\varphi}_{n+1}(\xi_1,\xi_2).\end{aligned} \tag{5}$$

[1]Это – основное препятствие для переноса наших рассмотрений на случай пространства $\mathbb{R}^d$, как было в изотропном случае в [4]: при $d > 2$ нужно оценивать соболевские нормы с интегральным показателем $\frac{d}{d-1} < 2$, и нельзя опереться на теорему Планшереля.

Здесь $v = \widehat{u} = (\widehat{u}_1, \dots, \widehat{u}_n)$ и $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi}_1, \dots, \widehat{\varphi}_n)$. Наша задача теперь состоит в оценке некоторых весовых L^2-норм вектор-фукции Qv через $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$. Как и в [2], это делается окольным путем – через анализ систем равенств, аналогичных системе (5), но таких, которые уже не обязательно допускают интерпретацию в терминах дифференциальных операторов после перехода к обратным преобразованиям Фурье. Мы приведем соответствующий результат в полной общности. Сама по себе формулировка будет включать технические подробности, которые на первый взгляд могут показаться странными – за объяснениями читатель может обратиться к [2]. Там же (и особенно в диссертации [5]) содержатся примеры, показывающие, что такая общность может быть полезна и за пределами ситуации, описанной в теореме 1.

Итак, пусть d_1 и d_2 – натуральные числа, $d_1, d_2 > 1$. Представим $\mathbb{R}^{d_1}$ как произведение $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{d_1-1}$ и обозначим через $\xi_1 \in \mathbb{R}$ и $\xi^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_1-1}$ соответствующие координаты точки $\xi \in \mathbb{R}^{d_1}$. Пусть h – комплексная функция на $\mathbb{R}^{d_1-1}$, модуль которой непрерывен, а аргумент принимает лишь конечное число значений. Наконец, пусть H – неотрицательная локально интегрируемая функция на $\mathbb{R}^{d_1-1}$ такая, что для всяких $0 \leqslant a \leqslant b < +\infty$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{\{|h(t)| \in [a,b]\}} H(t)\, dt \leqslant C|b-a|$$

(C не зависит от a и b). Пусть еще $\Phi : \mathbb{R}^{d_j-1} \to \mathbb{R}^{d_2-1}$ – произвольное измеримое отображение.

Далее, рассмотрим конечные комплексные борелевские меры

$$\rho_1, \dots, \rho_{n+1}$$

на $\mathbb{R}^{d_2}$ и зададим функции на $\mathbb{R}^{d_1}$ равенствами

$$g_j(\xi) = \widehat{\rho}_j(\xi_1, \Phi(\xi^{(1)})) \quad j = 1, \dots, n+1.$$

Обозначим через G вектор-функцию $(g_1, \dots, g_n)$.

Теорема 2. *Пусть вектор-функция $F : \mathbb{R}^{d_1} \to \mathbb{C}^n$ удовлетворяет системе равенств*

$$\begin{aligned} &\xi_1 F(\xi) + h(\xi^{(1)}) D^* F(\xi) = G(\xi), \\ &h(\xi^{(1)}) \langle F(\xi), b \rangle = g_{n+1}(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^{d_1}, \end{aligned} \tag{6}$$

где $b \in \mathbb{C}^n$, а $D : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ – линейный оператор. Пусть Q – ортогональный проектор на циклическое подпространство X пространства $\mathbb{C}^n$ для оператора D, порожденное вектором b. Тогда

$$\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{d_1}} |QF(\xi)|^2 H(\xi^{(1)})\, d\xi \right)^{1/2} \leqslant C \sum_{j=1}^{n+1} \|\rho_j\|.$$

Разумеется, под нормой меры понимается её полная вариация.

3. Вывод теоремы 1 из теоремы 2. Мы будем работать с системой равенств (5). Она не является системой вида (6), но приводится к ней с помощью искусственного приёма (как в [2]). Именно, “размножим” компоненты $(v_1, \dots, v_n)$ вектор-функции v следующим образом:

$$v_j^p(\xi_1, \xi_2) = (-i\xi_1)^{k-p-1} |\xi_2|^{\frac{lp}{k}} (c(\operatorname{sign} \xi_2))^p v_j(\xi_1, \xi_2), \\ p = 0, \dots, k-1,$$

где $c(\operatorname{sign} \xi_2)$ – корень k-й степени из $-i \operatorname{sign} \xi_2$ с наименьшим аргументом. Очевидно, что

$$(-i\xi_1) v_j^0(\xi) = (-i\xi_1)^k v_j(\xi), |\xi_2|^{\frac{l}{k}} c(\operatorname{sign} \xi_2) v_j^{k-1}(\xi) = (-i\xi_2)^l v_j(\xi),$$

так что система (5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} (-i\xi_1) v^0(\xi) + |\xi_2|^{\frac{k}{l}} c(\operatorname{sign} \xi_2) D^* v^{k-1}(\xi) &= \widehat{\varphi}(\xi), \\ |\xi_2|^{\frac{k}{l}} c(\operatorname{sign} \xi_2) \langle v^{k-1}(\xi), b \rangle &= \widehat{\varphi}_{n+1}(\xi); \end{aligned} \tag{7}$$

здесь и далее $v^p = (v_1^p, \dots, v_n^p)$, $p = 0, \dots, k-1$. К этой системе можно добавить ещё очевидные уравения

$$(-i\xi_1) v^p(\xi) - |\xi_2|^{\frac{l}{k}} c(\operatorname{sign} \xi_2) v^{p-1}(\xi) = 0, \quad p = 1, \dots, k-1. \tag{8}$$

Вместе уравнения (7) и (8) образуют систему вида (6) с некоторым оператором $\mathcal{D}$ в пространстве $\mathbb{C}^{kn}$ (вместо D в $\mathbb{C}^n$). В этой системе $h(\xi_2) = -ic(\operatorname{sign} \xi_2)|\xi_2|^{\frac{k}{l}}$, $H(\xi_2) = |\xi_2|^{\frac{k}{l}-1}$ и $\Phi(\xi_2) = \xi_2$ (последнее равенство убирает, кстати, самое экзотическое предположение в теореме 2). Разумеется, $d_1 = d_2 = 2$. По теореме 2 имеет место оценка

$$\|RV\|_{L^2(|\xi_2|^{\frac{l}{k}-1})} \leqslant C \sum_{j=1}^{n+1} \|\varphi_j\|_{L^1}, \tag{9}$$

где V – вектор-функция, получающаяся объединением всех вектор-функций v^p, $p = 1, \dots, k-1$, в одну, а R – ортонормированный проектор из $\mathbb{C}^{kn}$ на циклическое подпространство Y, порожденное вектором b (который тоже нужно погрузить в $\mathbb{C}^{kn}$ соответствующим образом, см. ниже).

Нам нужно понять структуру этого циклического подпространства. Пусть $E_0, \dots, E_{k-1}$ – k копий пространства $\mathbb{C}^n$; считаем, что вектор-функция v^p принимает значения в E_p, $0 \leqslant p \leqslant k-1$. Глядя на уравнения (7) и (8), нетрудно увидеть, что оператор $\mathcal{D}$, связанный с этой системой уравнений, действует так:

$$\mathcal{D}(x_0, \dots, x_{k-1}) = (-x_1, \dots, -x_{k-1}, Dx_0),$$

где $x_p \in E_p$, $0 \leqslant p \leqslant k-1$. Вектор b надо считать лежащим в E_{k-1}, т.е. в “большой” системе (7)–(8) он превращается в $\tilde{b} = (0, 0, \dots, 0, b)$. Теперь видно, что при ортогональном проектировании циклического пространства Y на E_{p-1} получается образ пространства X из теоремы 1 при его естественном вложении в E_{p-1}. В силу (9), отсюда получаем, что

$$\|Qv^m\|_{L^2(|\xi_2|^{\frac{l}{k}-1})} \leqslant C \sum_{j=1}^{n+1} \|\varphi_j\|_{L^1}.$$

Это доказывает теорему 1, если вспомнить, что $|v_j^{(k-1)}| = |\xi_2|^{\frac{l(k-1)}{k}} |v_j|$ и $|v_j^0| = |\xi_1|^{k-1} |v_j|$. Действительно, последнее неравенство с $m = 0$ и $m = k-1$ дает одинаковую мажоранту для нормы функции Qv в пространствах $L^2(|\xi_1|^{k-1} |\xi_2|^{\frac{1}{2}(\frac{l}{k}-1)})$ и $L^2(|\xi_1|^0 |\xi_2|^{l-\frac{1}{2}\frac{l}{k}-\frac{1}{2}})$. Обе точки $E_0 = (k-1, \frac{1}{2}(\frac{l}{k}-1))$ и $E_1 = (0, l - \frac{1}{2}\frac{l}{k} - \frac{1}{2})$ лежат на прямой $\frac{\alpha+\frac{1}{2}}{k} + \frac{\beta+\frac{1}{2}}{l} = 1$. Следовательно, та же оценка справедлива для нормы функции Qv в пространстве $L^2(|\xi_1|^\alpha |\xi_2|^\beta)$ при любой точке (α, β) из отрезка с концами E_0 и E_1. Поскольку мы предположили, что $l \leqslant k$, ордината точки E_0 неположительна, поэтому все точки указанной прямой с неотрицательными координатами годятся.

4. Нам осталось доказать теорему 2. Для этого понадобится субмультипликативная оценка, полученная в [2], которую мы сейчас сформулируем.

Пусть символы d_1, d_2, h, H и Φ имеют такой же смысл, как и перед формулировкой теоремы 2. Пусть ν_1 и ν_2 – две конечные комплексные борелевские меры на $\mathbb{R}^{d_2}$, и пусть функции f_1 и g на $\mathbb{R}^{d_1}$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned}(\xi_1-\sigma(\xi^{(1)}))h(\xi^{(1)})f(\xi)&=\widehat{\nu}_1(\xi_1,\Phi(\xi^{(1)}))\\ (\xi_1-\tau(\xi^{(1)}))h(\xi^{(1)})g(\xi)&=\widehat{\nu}_2(\xi_1,\Phi(\xi^{(1)})).\end{aligned}\tag{10}$$

Здесь σ и τ – измеримые комплексные функции на $\mathbb{R}^{d_1-1}$, принимающие лишь конечное число значений и такие, что для каждого $\xi^{(1)}$ числа $\operatorname{Im}\sigma(\xi^{(1)})$ и $\operatorname{Im}\tau(\xi^{(1)})$ отличны от нуля и имеют разные знаки.

Предложение 1. *При сделанных предположениях справедлива оценка*

$$\Big|\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} f(\xi)\overline{g(\xi)}H(\xi^{(1)})\,d_\xi\Big|\leqslant C\|\rho_1\|\,\|\rho_2\|,$$

где

$$\Omega_{\varepsilon,R}=\big\{\xi\in\mathbb{R}^{d_1}:|h(\xi^{(1)})|\geqslant\varepsilon_1,|\xi^{(1)}|\leqslant R\big\},$$

а постоянная C не зависит от ε, R, ρ_1 и ρ_2.

По поводу доказательства см. лемму 1.2 и замечание 1.3 в [2].

Замечание. Более подробно о похожих субмультипликативных оценках см. в [3]. Интересно, что некоторые неравенства такого рода, кажущиеся естественными, неверны. Этим объясняются технические осложнения доказательства теоремы 1 (необходимость расширить систему уравнений).

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2. Мы будем действовать по схеме работы [1] с некоторыми изменениями. Умножим скалярно первое из равенств (6) на вектор $p\in\mathbb{C}^n$ и вычтем из результата второе равенство в (6), умноженное на комплексное число α. Получится соотношение

$$\xi_1\langle F(\xi),p\rangle+h(\xi^{(1)})\langle F(\xi),Dp-\alpha b\rangle=G^{(p,\alpha)}(\xi),$$

где $G^{(p,\alpha)}(\xi)=\langle\widehat{\varphi}(\xi),p\rangle-\alpha\widehat{\varphi}_{n+1}(\xi)$. Потребуем, чтобы выполнялось равенство $Dp-\alpha b=\lambda p$, где λ – некое комплексное число, тогда предыдущее соотношение примет вид

$$(\xi_1+\lambda h(\xi^{(1)}))\langle F(\xi),p\rangle=G^{(p,\alpha)}(\xi).$$

Напишем такое же соотношение для другого вектора q вместо p (соответственно, число λ заменим подходящим числом μ, а число α – числом β):

$$(\xi_1+\mu h(\xi^{(1)}))\langle F(\xi),q\rangle=G^{(q,\beta)}(\xi).$$

Получились две формулы вида (10) с $f = \langle F, p\rangle$, $g = \langle F, q\rangle$, $\sigma(\xi^{(1)}) = -\lambda h(\xi^{(1)})$, $\tau(\xi^{(1)}) = -\mu h(\xi^1)$. Мы хотим применить к ним предложение 1. Для этого заметим, что p и q находятся из равенств $p = R_\lambda(\alpha b)$, $q = R_\mu(\beta b)$, где $R_t = (I - tD)^{-1}$ – резольвента оператора D. Таким образом, предыдущие построения корректны, если λ и μ – регулярные точки для D, а тогда ясно, что предположение о знаках мнимых частей функций σ и τ можно удовлетворить огромным числом способов за счет выбора чисел λ и μ (напомним, что, по условию, аргумент функции h принимает лишь конечное число значений). Как и в [2], в дальнейшем на λ и μ будут наложены дополнительные ограничения, однако они будут совместимы с приведенным рассуждением.

Таким образом, в силу предложения 1 мы приходим к оценке

$$\Big|\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} \langle F(\xi), p\rangle \overline{\langle F(\xi), q\rangle} H(\xi^{(1)})\, d_\xi\Big| \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|\rho_j\|\right)^2 \tag{11}$$

(C зависит от p, q и α).

Теперь будем считать, что векторы p и q выбраны в X (в циклическом подпространстве, порожденном вектором b). Тогда векторфункцию F слева в (11) можно заменить на QF (напомним, что Q – ортогональный проектор на X).

Пусть $r = \dim X$. В дальнейшем нам будет нужно лишь сужение Δ оператора D на X. Предположим, что мы смогли найти такие комплексные числа $\lambda_0, \ldots, \lambda_{-1}$, $\alpha_0, \ldots, \alpha_{r-1}$ и $\mu_0, \ldots, \mu_{r-1}$, $\beta_0, \ldots, \beta_{r-1}$, что оба набора векторов

$$p_i = (I - \lambda_i \Delta)^{-1}\ (\alpha_i b), \quad i = 0, \ldots, r-1,$$

и

$$q_j = (i - \mu_j \Delta)^{-1}(\beta_j b), \quad j = 0, \ldots, r-1,$$

линейно независимы и для пар $p = p_i$ и $q = q_j$ выполняются неравенства (11) при любых i, $j = 0, \ldots, r-1$. Разложив вектор-функцию QF сначала по биортогональной системе базиса $p_0, \ldots, p_{r-1}$, а затем – по биортогональной системе базиса $q_0, \ldots q_{r-1}$, немедленно выводим из (11) неравенство

$$\int\limits_{\Omega_{\varepsilon,R}} |QF(\xi)|^2 H(\xi^{(1)})\, d_\xi \leqslant C\left(\sum_{j=1}^{n+1}\|\rho_j\|\right)^2.$$

Осталось перейти здесь к пределу при $\varepsilon \to 0$ и $R \to \infty$, заметив, как и в [2], что интеграл от функции H по множеству $\{\eta \in \mathbb{R}^{d_2-1} : h(\eta) = 0\}$ равен нулю.

Каждый из векторов p_i и q_j определяется уравнением вида $p - \lambda\Delta p = \alpha b$. Посмотрим на него более внимательно. Напомним, что теперь мы априори предполагаем, что $p \in X$. Запишем этот вектор в базисе b, Δb, $\Delta^2 b, \dots, \Delta^{r-1} b$ пространства X:

$$p = x_0 b + x_1 \Delta b + \dots + x_{r-1}\Delta^{r-1} b, \quad x_j \in \mathbb{C}, \quad j = 0, \dots r-1.$$

В силу цикличности справедливо включение $\Delta^r b \in X$, а тогда $\Delta^r b = \eta_0 b + \dots + \eta_{r-1}\Delta^{r-1} b$ для некоторых $\eta_0, \dots, \eta_{r-1} \in \mathbb{C}$. Таким образом, интересующее нас уравнение принимает вид

$$\begin{aligned}&x_0\Delta b + x_1\Delta^2 b + \dots + x_{r-2}\Delta^{r-1} b + x_{r-1}(\eta_0 b + \dots + \eta_{r-1}\Delta^{r-1} b)\\ &- \lambda x_0 b - \dots - \lambda x_{r-1}\Delta^{r-1} b = \alpha b.\end{aligned}$$

Это равенство эквивалентно системе скалярных уравнений относительно коэффициентов $x_0, \dots, x_{r-1}$, которую легко выписать и решить. Опуская рутинные вычисления, приведем лишь результат: пусть $\rho = \lambda^{-1}$, тогда

$$\begin{aligned}x_j &= -\alpha\left(\frac{\rho^r(\rho^{j+1}\eta_0 + \dots + \rho\eta_j)}{1 - \rho^r\eta_0 - \dots - \rho\eta_{r-1}} + \rho^{j+1}\right), \quad j = 0, \dots, r-2;\\ x_{r-1} &= -\alpha\frac{\rho^r}{1 - \rho^r\eta_0 \cdots - \rho\eta_{r-1}}\end{aligned}$$

(стоит отметить, что знаменатель в этих выражениях заведомо ненулевой при достаточно малых ρ – что, впрочем, неудивительно из общих соображений).

Теперь зафиксируем параметр α следующим образом: $\alpha = 1 - \rho^r\eta_0 - \rho^{r-1}\eta_1 - \dots - \rho\eta_{r-1}$. Тогда получим после простых преобразований:

$$\begin{aligned}x_j &= \rho^{j+1}(1 - \rho^{r-j-1}\eta_{j+1} - \dots - \rho\eta_{r-1}), \quad j = 0, \dots r-2;\\ x_{r-1} &= -\rho^r.\end{aligned} \tag{12}$$

Будем придавать параметру ρ значения $t\xi_1, \dots, t\xi_r$, где $\xi_1, \dots, \xi_r$ – попарно различные ненулевые комплексные числа, а $t > 0$. Координаты (12) соответствующих векторов $p_1, \dots, p_r$, будем обозначать через x_j^ν, $j = 0, \dots, r-1$, $\nu = 1, \dots, r$. Эти векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы (x_j^ν) отличен от нуля. Однако при фиксированных попарно различных и ненулевых $\xi_1, \dots \xi_r$

так будет при всех достаточно малых t. Действительно, утверждение эквивалентно невыожденности матрицы $\{y_j^\nu\}$, где

$$y_j^\nu = \xi_j^{\nu-1}(1-(t\xi_j)^{r-j-1}\eta_{j+1} - \dots - (t\xi_j)\eta_{r-1}, j=0,\dots,r-2,$$
$$y_{r-1}^\nu = \xi_j^\nu, \quad \nu = 1,\dots,r,$$

которая при малых t близка к матрице

$$\{\xi_j^{\nu-1} : j=0,\dots,r-1; \nu=1,\dots,r\}$$

с определителем Вандермонда.

Оставшееся просто: достаточно зафиксировать $2r$ попарно различных комплексных чисел $\xi_1,\dots,\xi_r$, $\theta_1,\dots,\theta_r$ так, чтобы условия на аргументы мнимых частей функций σ и τ из формулы (10) выполнялось в нашей ситуации для любой пары (ξ_i,θ_j), i, $j=1,\dots,r$, а затем определить векторы p_i и q_j формулами (12), соответственно, с $\xi = t\xi_i$ и $\xi = t\theta_j$, где число $t>0$ достаточно мало. □

Замечание. В [1] возможность выбора линейно независимых векторов в последней части рассуждения выводилась из общих соображений, которые применимы и здесь. Мы, однако, решили приблизить доказательство к элементарному рассуждению из [2]. Фактически, оно относилось к случаю, когда $\Delta^r b = 0$, и определитель Вандермонда появлялся в нем в чистом виде.

Литература

1. Д. В. Максимов, *Одно обобщение неравенства Гальярдо.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **345** (2007), 120–140.
2. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, D. M. Stolyarov, *Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions the generate in arbitrary dimension.* — J. Funct. Anal. **269** (2015), 3220–3263.
3. Д. М. Столяров, *Билинейные теоремы вложения для дифференциальных операторов в* $\mathbb{R}^n$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **424** (2014), 210–235.
4. J. van Schaftingen, *Limiting Sobolev inequalities for vector fields and cancelling linear differential operators.* — J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), no. 3, 877–921.
5. Д. М. Столяров, *Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения.* — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. С.-Петербург, 2014. `pdmi.ras.ru/pdmi/system/files/dissertations/thesis-1.pdf`

Kislyakov S. V., Maksimov D. V. An embedding theorem with anisotropy for vector fields.

A generalization of some recent results of D. M. Stolyarov and the authors is proved.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023,
С.-Петербург, Россия
E-mail: shis@pdmi.ras.ru

Поступило 13 июня 2017 г.

СПбАУ РАН
Академический университет ул. Хлопина
д. 8, корпус 3, лит. А, 194021
С.-Петербург, Россия
E-mail: dimax239@bk.ru