Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 456, 2017 г.

В. М. Каплицкий, А. К. Дронов

К ТЕОРИИ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ОПЕРАТОРОВ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА КОНУСАХ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, II.

Настоящая заметка является дополнением к статье [1], в ней используются введенные в [1] определения и обозначения (некоторые необходимые обозначения основных функциональных пространств будут приведены ниже). В [1] были получены условия интерполяционности троек конусов вида $(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$ и $(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+)$ по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F), где E_i и F_i $(i = 0, 1)$, E и F – весовые пространства числовых последовательностей (пространства c_0 с весами), Q – некоторый конус в пространстве всех числовых последовательностей (при этом мы предполагаем, что банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F)). Основное условие, которому должен удовлетворять конус Q, состоит в том, что этот конус должен обладать свойством нижней полурешетки, т.е. из условия $x, y \in Q$ следует, что $\min(x, y) \in Q$. Остальные ограничения на конус Q, введенные в работе [1], менее существенны. В настоящей работе часть этих ограничений снимается, а часть ослабляется. Мы используем следующие обозначения:

ω – линейное пространство всех числовых последовательностей с топологией покоординатной сходимости,

ω^+ – конус неотрицательных последовательностей в ω,

ω^{++} – множество последовательностей из ω, у которых все координаты положительны (если E – банахово пространство последовательностей, вложенное в ω, то символы E^+ и E^{++} имеют аналогичный смысл),

c_0 – банахово пространство сходящихся к нулю числовых последовательностей со стандартной sup-нормой,

---

Ключевые слова: банахово пространство, конус, интерполяция.

$c_0(a)$ – банахово пространство последовательностей $(x(n))_{n=1}^{\infty}$ таких, что $(x(n)a(n))_{n=1}^{\infty} \in c_0$, с нормой

$$\|x\|_{c_0(a)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|a(n)$$

(здесь $a(n)$ – некоторая последовательность положительных чисел, которая называется весом). В [1] доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$ $(i = 0, 1)$, $F_i = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем*

$$E_1 \subset E \subset E_0, \quad F_1 \subset F \subset F_0$$

и банахова тройка (E_0, E_1, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ – *множество конусов в* ω^+ *такое, что для каждого конуса* $Q \in \mathcal{A}$ *выполняются условия:*

1) Q – *нижняя полурешетка в* ω;
2) $Q \cap E_1^+$ – *тотальный конус в пространстве* E_1;
3) $Q \cap E_1^{++} \neq \varnothing$.

Тогда семейство троек конусов

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

В настоящей работе доказывается более общее утверждение. Снимается ограничение 3) в теореме 1, а условие 2) ослаблено до тотальности конуса $Q \cap E_1^+$ в пространстве всех числовых последовательностей ω. Напомним, что конус Q в линейном топологическом пространстве X называется тотальным, если замыкание его линейной оболочки в топологии пространства X совпадает с X.

Теорема 2. *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$ $(i = 0, 1)$, $F_i = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем*

$$E_1 \subset E \subset E_0, \quad F_1 \subset F \subset F_0$$

и банахова тройка (E_1, E_0, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ – *семейство конусов в* ω^+ *такое, что каждый конус* $Q \in \mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям:*

1) Q – *нижняя полурешетка в* ω;

2) $Q \cap E_1^+$ – *тотальный конус в* ω.

Пусть

$$\mathcal{M} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

Тогда семейство $\mathcal{M}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).

Доказательство. Пусть $T : E_0 \to F_0$ – линейный непрерывный оператор и

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, \quad x \in E_0^+,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, \quad x \in Q \cap E_1^+.$$

Сначала рассмотрим случай, когда $T(E_1) \subset F_1$. Тогда из теоремы о замкнутом графике следует, что сужение оператора T на E_1 является непрерывным оператором из E_1 в F_1. Зафиксируем некоторое число $\varepsilon > 0$. Пусть N – некоторое натуральное число. Следуя статье [1], введем конус $Q^{(N)}$, состоящий из элементов $x = P_N y$, где $y \in Q \cap E_1^+$ такой, что $y(1) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\|(I - P_N)y\|_{E_1}$. В [1] показано, что этот конус обладает свойством нижней полурешетки и, кроме того, если $x \in Q \cap E_1^+$ и $x(1) > 0$, то $P_N x \in Q^{(N)}$ при всех достаточно больших N. Тогда для всех $x \in Q^{(N)}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_{F_1} &= \|TP_N y\|_{F_1} \leqslant \|Ty\|_{F_1} + \|T(I - P_N)y\|_{F_1} \\
&\leqslant M_1 \|y\|_{E_1} + \|T\|_{E_1 \to F_1} \|(I - P_N)y\|_{E_1} \\
&\leqslant M_1 \|P_N y\|_{E_1} + M_1 \|(I - P_N)y\|_{E_1} + C_1 \|(I - P_N)y\|_{E_1} \\
&\leqslant M_1(1 + \varepsilon C_2)\|P_N y\|_{E_1}.
\end{aligned}$$

Так как $Tx = TP_N x$, то

$$\|TP_N x\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon \|x\|_{E_1}, \quad x \in Q^{(N)}, \tag{1}$$

где $M_1^\varepsilon = M_1(1 + \varepsilon C_2)$. Далее,

$$\|TP_N x\|_{F_0} \leqslant M_0 \|P_N x\|_{E_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, \tag{2}$$

то есть

$$\|TP_N x\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, \quad x \in E^+.$$

Введем конус:

$$\widetilde{Q}^{(N)} = Q^{(N)} + (I - P_N)(E_1^+).$$

Пусть $T_N = TP_N$. Для всех $x \in \widetilde{Q}^{(N)}$ справедливо представление:

$$x = x' + x'',$$

где $x' \in Q^{(N)}$ и $P_N x'' = 0$. Тогда

$$\|T_N x\|_{F_1} = \|T_N x'\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon \|x'\|_{E_1} \leqslant M_1^\varepsilon \|x\|_{E_1}, \quad x \in \widetilde{Q}^{(N)}.$$

Итак,

$$\|T_N x\|_{F_1} \leqslant M_1^\varepsilon \|x\|_{E_1}, \quad x \in \widetilde{Q}^{(N)}. \tag{3}$$

Очевидно, что конус $\widetilde{Q}^{(N)}$ также обладает свойством нижней полурешетки. Так как конус $Q \cap E_1^+$ – тотальный конус в ω, то $P_N(Q \cap E_1^+)$ является тотальным конусом в $L_N = P_N(\omega) = \{x = P_N y : y \in \omega\}$. Поскольку подпространство L_N конечномерно, всякое всюду плотное в нем линейное многообразие совпадает с L_N. Следовательно, $\mathrm{span}(P_N(Q \cap E_1^+))$ совпадает с L_N и $P_N(Q \cap E_1^+)$ является воспроизводящим конусом в L_N, а тогда конус $\widetilde{Q}^{(N)}$ будет воспроизводящим конусом в пространстве E_1. Конус $\widetilde{Q}^{(N)}$ содержит строго положительный вектор, поскольку является воспроизводящим в E_1 и вложен в E_1^+. Таким образом, выполняются все условия теоремы 1 и, следовательно,

$$\|T_N x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E, \quad x \in \widetilde{Q}^{(N)}.$$

Так как $Q^{(N)} \subset \widetilde{Q}^{(N)}$, то

$$\|T_N x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E, \quad x \in Q^{(N)}.$$

Пусть $x \in Q \cap E_1^+$ и $x(1) > 0$. Тогда $x_N = P_N x \in Q^{(N)}$ при достаточно больших N. Так как $T_N x = T P_N x_N = T x_N$, то

$$\|T x_N\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x_N\|_E.$$

Так как $x_N \to x$ в E, то

$$\|T x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E.$$

Пусть x – произвольный вектор из $Q \cap E^+$ и x_1 – вектор из $Q \cap E_1^+$ такой, что $x_1(1) > 0$. Ясно, что $\min(x, kx_1) \in Q \cap E_1^+$ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Пусть $x_k = \min(x, kx_1) + \frac{1}{k} x_1 \in Q \cap E_1^+$. Ясно, что $x_k \to x$ в E при $k \to \infty$ и $x_k(1) > 0$. Тогда, как было показано,

$$\|T x_k\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x_k\|_E.$$

Так как оператор $T : E \to F$ непрерывен, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим:

$$\|T x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1^\varepsilon\} \|x\|_E.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим:

$$\|T x\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E, \quad x \in Q \cap E^+.$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда $T(E_1)$ не обязательно вложено в F_1. Для любого натурального N образ оператора $P_N T$ вложен в F_1 и, следовательно, приведенная выше оценка справедлива для оператора $P_N T$, откуда после предельного перехода при $N \to \infty$ получим, что она справедлива и для оператора T. Теорема доказана. $\square$

Сформулируем симметричную теорему для тройки

$$(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+).$$

Ее доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть* $E_i = c_0(a_i)$ $(i = 0,1)$, $F_i = c_0(b_i)$ $(i = 0,1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, *причем* $E_1 \subset E \subset E_0, F_1 \subset F \subset F_0$ *и банахова тройка* (E_1, E_0, E) *обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F). *Пусть* $\mathcal{A}$ – *семейство конусов в* ω^+ *такое, что каждый конус* $Q \in \mathcal{A}$ *удовлетворяет условиям:*

1) Q – *нижняя полурешетка в* ω;

2) $Q \cap E_0^+$ – *тотальный конус в* ω.

Пусть

$$\mathcal{L} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathcal{A}\}.$$

Тогда семейство $\mathcal{L}$ *обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке* (F_0, F_1, F).

Пока остается открытым вопрос о том, справедливы ли аналогичные утверждения для линейных операторов с оценками на конусах в других идеальных банаховых пространствах. Сформулируем в этой связи следующую задачу. Пусть $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – измеримые пространства с мерой, $L_\infty(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $L_\infty(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ – соответствующие пространства почти всюду ограниченных функций со стандартной sup-нормой. Обозначим $E_1 = L_\infty(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$, $F_1 = L_\infty(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$. Пусть E_0, E, F_0, F – идеальные банаховы пространства такие, что

$$E_1 \subset E \subset E_0, \quad F_1 \subset F \subset F_0,$$

тройка (E_1, E, E_0) интерполяционна относительно тройки (F_1, F, F_0) и Q – конус в пространстве $L_0(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ всех измеримых функций, удовлетворяющий условиям, аналогичным условиям теоремы 2. Пусть $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$ – интерполяционная постоянная первой тройки относительно второй и $T : E_0 \to F_0$ – непрерывный линейный оператор такой, что:

$$\|Tx\|_{F_0} \leqslant M_0 \|x\|_{E_0}, \quad x \in E_0^+,$$
$$\|Tx\|_{F_1} \leqslant M_1 \|x\|_{E_1}, \quad x \in Q \cap E_1^+.$$

Верно ли, что $T : Q \cap E^+ \to F$ и

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E, \quad x \in Q \cap E^+?$$

Пока это доказано лишь для пространств c_0 с весами. Интерес представляют обобщения известных интерполяционных теорем для нелинейных липшицевых операторов (см. [2–4]) на случай липшицевых операторов, заданных на конусах. Тройка $(Q \cap E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+)$ может не наследовать интерполяционное свойство банаховой тройки (E_0, E_1, E) даже в случае конусов довольно простой структуры (см. [1]). Как показывают некоторые предварительные вычисления, если конус Q – нижняя полурешетка, то эта тройка обладает $\mathcal{P}$-интерполяционным свойством, т.е. интерполяционное неравенство сохраняется для всех положительных операторов. Однако это утверждение пока остается гипотезой.

Отметим, что случай пространств c_0 с весами представляет самостоятельный интерес для геометрической теории ядерных пространств. В работе [5] получено доказательство существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). Существенную роль в [5] играют интерполяционные теоремы для операторов, ограниченных на конусах в пространствах c_0 с весами.

Литература

1. В. М. Каплицкий, А. К. Дронов, *К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **424** (2014), 154–178.
2. В. М. Каплицкий, *Интерполяция нелинейных операторов в весовых L_p-пространствах.* — Сибирский математический журнал **51**, No. 2 (2010), 316–329.
3. L. Maligranda, *Interpolation of Lipschitz for the pairs of spaces* (L^p, L^∞). — Funct. Approx. Comment. Math. **9** (1980), 107–115.
4. J. Cerda, H. Coll, *Function cones and interpolation.* — Math. Nachr. **278** (2005), 227–239.

5. А. К. Дронов, *О существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кете из класса* (d_2). — Владикавказский математический журнал **18**, No. 1 (2016), 9–20.

Kaplitskii V. M., Dronov A. K. To the theory of operators that are bounded on cones in weighted spaces of numerical sequences, II.

We generalize earlier results on the interpolation property for triples of cones (Q_0, Q_1, Q) (Q_0, Q_1, and Q are cones in weighted spaces of numerical sequences) with respect to some triple of weighted spaces of numerical sequences.

Южный
федеральный университет,
кафедра дифференциальных
и интегральных уравнений
E-mail: kaplitsky@donpac.ru

РИНХ, кафедра фундаментальной
и прикладной математики
E-mail: akdronov@mail.ru

Поступило 24 апреля 2017 г.