

Л. Н. Ихсанов

ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИИ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ  
КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ, ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ  
МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Пропущенные ниже детали доказательств читатель может узнать, обратившись к препринту [3].

**1.1. Постановка задачи.** Обозначим через  $F^0$  пространство измеримых ограниченных функций, обладающих свойством

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (1.1)$$

Функции предполагаются определенными в любой точке и вещественнонезначными. Введём в пространстве  $F^0$  норму

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f|. \quad (1.2)$$

Напомним, что второй модуль непрерывности функции  $f$  с шагом  $h$  определяется равенством

$$\omega_2(f, h) = \sup_{|t| \leq h} \|f(x - t) - 2f(x) + f(x + t)\|.$$

Здесь же отметим несколько очевидных свойств величины  $\omega_2(f, h)$ , которые нам скоро понадобятся:

$$\omega_2(f, h) \leq \omega_2(g, h) + 4\|f - g\|, \quad (1.3)$$

$$\omega_2(\alpha f, h) = |\alpha| \omega_2(f, h), \quad (1.4)$$

$$\omega_2(f(\cdot + 1), h) = \omega_2(f(\cdot), h), \quad (1.5)$$

$$\omega_2(f(-\cdot), h) = \omega_2(f(\cdot), h). \quad (1.6)$$

Обозначим через  $W_2^*$  точную константу в неравенстве

$$\|f\| \leq K \cdot \omega_2(f, 1) \quad (1.7)$$

для пространства  $F^0$ .

---

*Ключевые слова:* второй модуль непрерывности, неравенство типа Джексона.

В [1] Ю. Крякин установил, что

$$0.5058 \leq W_2^* \leq 0.6244.$$

Доказательство оценки снизу ( $0.5810 < W_2^*$ ) в [1] содержит ошибку, поэтому мы заменили эту оценку на ту, которая была установлена на самом деле.

Им также рассматривалась аналогичная задача для старших модулей непрерывности. Наилучшие известные на данный момент результаты в этом направлении получены в [2].

Пусть

$$F_b = \left\{ f \in F^0 \mid f \left( \frac{1+b}{2} \right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b \in [0,1]} F_b.$$

В настоящей работе исследуется поведение величины  $\inf_{f \in F_b} \omega_2(f, 1)$  при  $b \in [0, 1]$ . Это мотивировано следующими результатами.

**Утверждение 1.** *Имеет место равенство*

$$W_2^* = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f, 1)} = \frac{1}{\inf_{f \in F^*} \omega_2(f, 1)}.$$

**Доказательство.** Покажем, что

$$\sup_{f \in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f, 1)} = \sup_{f \in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f, 1)}.$$

По определению, для любого  $n \in \mathbb{N}$  найдётся точка  $x_n \in \mathbb{R}$  такая, что

$$|f(x_n)| > \|f\| - \frac{1}{n}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что  $f(x_n) > 0$ . Рассмотрим функции

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_n, \\ \|f\|, & x = x_n \end{cases}$$

В силу неравенства (1.3) справедлива оценка

$$\omega_2(f_n, 1) \leq \omega_2(f, 1) + \frac{4}{n},$$

значит, нам достаточно рассмотреть функции, достигающие своей нормы.

В силу свойства (1.4) достаточно ограничиться случаем  $f \in F_b$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

Наконец, ввиду равенств (1.5) и (1.6) можно считать, что  $b \in [0, 1]$ .  $\square$

Обозначим через  $F$  пространство ограниченных измеримых функций, обладающих свойством

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

с нормой, определённой выше.

**Утверждение 2.** Пусть  $f \in F$ ,  $E_0(f)$  – наилучшее приближение функции  $f$  постоянными,  $J_2^*$  – точная константа в неравенстве типа Джексона

$$E_0(f) \leq K \cdot \omega_2(f, 1).$$

Тогда

$$J_2^* = W_2^*.$$

**Доказательство.** Пусть  $f \in F^*$ ,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 1, \\ \frac{n-k}{n} f(x), & x \in (k, k+1], k = 1, \dots, n, \\ 0, & x > n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим функции

$$\tilde{f}_n = f_n(x) - f_n(2n+2-x), \quad \tilde{F} = \left\{ \tilde{f}_n \mid f \in F^*, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Несложно видеть, что

$$E_0(\tilde{f}_n) = \|\tilde{f}_n\| = \|f\| = 1, \quad \omega_2(\tilde{f}_n, 1) \leq \omega_2(f, 1) + \frac{4}{n}.$$

Поэтому

$$W_2^* = \sup_{F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f, 1)} = \sup_{\tilde{F}} \frac{\|f\|}{\omega_2(f, 1)} = \sup_{\tilde{F}} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f, 1)} \leq \sup_F \frac{E_0(f)}{\omega_2(f, 1)} = J_2^*.$$

С другой стороны, если  $f \in F$ , то  $(f - \int_0^1 f(x) dx) \in F^0$ , поэтому

$$E_0(f) \leq \|f - \int_0^1 f(x) dx\| \leq W_2^* \cdot \omega_2(f, 1),$$

откуда следует, что

$$J_2^* \leq W_2^*. \quad \square$$

**1.2. Основные результаты.** Для формулировки теорем нам понадобится функция

$$q(b) = \begin{cases} \frac{96}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55}, & b \in [0, \frac{1}{3}], \\ \frac{8(11b^2 + 66b - 13)}{3b^4 - 69b^3 + 17b^2 + 385b - 80}, & b \in [\frac{1}{3}, 1]. \end{cases}$$

**Теорема 1.** Пусть  $f \in F_b$ . Тогда

$$q(b) \leq \omega_2(f, 1).$$

Функция  $q(b)$  непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ , имеет на этом отрезке ровно два интервала монотонности и достигает минимума между точками 0.43 и 0.44, причём

$$q(b) > 1.6721.$$

В [3] мы предлагаем функцию из множества  $F^*$  со вторым модулем непрерывности, равным  $\frac{37861}{20548} - \frac{37\sqrt{8545}}{20548} < 1.6762$ . Таким образом,

$$1.6721 \leq \inf q(b) \leq \inf_{f \in F^*} \omega_2(f, 1) \leq 1.6762,$$

откуда, с учетом теоремы 1 и утверждения 1, получается следующее утверждение.

**Теорема 2.** Имеем место неравенства

$$0.5965 \leq W_2^* \leq 0.5981,$$

причём

$$W_2^* = \sup_{b \in [b_0, b_1]} \frac{1}{\inf_{f \in F_b} \omega_2(f, 1)},$$

где точки  $\frac{1}{3} < b_0 < b_1 < 1$  являются корнями уравнения

$$q(b) = \frac{37861}{20548} - \frac{37}{20548}\sqrt{8545}.$$

## §2. НЕСКОЛЬКО ЛЕММ, А ТАКЖЕ О МЕТОДЕ В ЦЕЛОМ

Для среднего значения функции на отрезке  $[x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}]$ , где  $r > 0$ , мы используем обозначение

$$f_r(x) = \frac{1}{r} \int_{x-r/2}^{x+r/2} f(s) ds.$$

При этом считаем, что  $f_0(x) = f(x)$ .

Для доказательства теоремы 1 мы сформулируем ряд неравенств, связывающих средние значения функции  $f \in F_b$  с её вторым модулем непрерывности. Затем мы поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f, 1) \rightarrow \inf$$

относительно этих средних и величины  $\omega_2(f, 1)$ , считая их при этом абстрактными переменными.

Следующая лемма фиксирует простейшие свойства функций из множества  $F_b$ .

**Лемма 1.** Пусть  $f \in F_b$ ,  $\tau, h \geq 0$ . Тогда

$$f_{2\tau} \left( \frac{1+b}{2} - 2h \right) - 2f_\tau \left( \frac{1+b}{2} - h \right) + 1 \leq \omega_2 \left( f, h + \frac{\tau}{2} \right), \quad (2.1)$$

$$-f_\tau \left( \frac{1+b}{2} - h \right) - f_\tau \left( \frac{1+b}{2} + h \right) + 2 \leq \omega_2 \left( f, h + \frac{\tau}{2} \right), \quad (2.2)$$

$$-2f_{2\tau} \left( \frac{1+b}{2} \right) + 2 \leq \omega_2 \left( f, \tau \right), \quad (2.3)$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}} \left( -\frac{1-b}{4} \right) + f_{\frac{1-b}{2}} \left( 1 + \frac{3+b}{4} \right) + \frac{4}{1-b} \leq \frac{2}{1-b} \cdot \omega_2(f, 1). \quad (2.4)$$

**Доказательство.** Поскольку  $f \left( \frac{1+b}{2} \right) = 1$ , неравенства (2.1) и (2.2) получаются интегрированием, соответственно, неравенств

$$f \left( \frac{1+b}{2} - 2h + 2\tau s \right) - 2f \left( \frac{1+b}{2} - h + \tau s \right) + f \left( \frac{1+b}{2} \right) \leq \omega_2 \left( f, h + \frac{\tau}{2} \right)$$

и

$$-f \left( \frac{1+b}{2} - h - \tau s \right) - f \left( \frac{1+b}{2} + h + \tau s \right) + 2f \left( \frac{1+b}{2} \right) \leq \omega_2 \left( f, h + \frac{\tau}{2} \right)$$

по  $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Далее, (2.3) следует из (2.2), если заметить, что

$$2f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2}\right) = f_\tau\left(\frac{1+b}{2} - \frac{\tau}{2}\right) + f_\tau\left(\frac{1+b}{2} + \frac{\tau}{2}\right).$$

Наконец, согласно неравенству (2.3),

$$-2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1),$$

и для доказательства соотношения (2.4) осталось заметить, что, с учётом формулы (1.1),

$$\begin{aligned} 2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right) &= \frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_1\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1+b}{2}f_{\frac{1+b}{2}}\left(1 + \frac{1+b}{4}\right) \\ &= \frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - \frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right). \end{aligned} \quad \square$$

Более сложные результаты получается по следующей схеме: сперва выводится утверждение вида

$$\left|f_\tau(x) - 2f_\sigma(y) + \sum_{i=1}^n \delta_i f_{\rho_k}(z_k)\right| \leq \omega_2(f, h), \quad (2.5)$$

где

$$\sum_{i=1}^n \delta_i = 1, \quad \delta_i > 0, \quad x + \sum_{i=1}^n \delta_i z_k = 2y.$$

Далее, если это требуется, полученное соотношение преобразуется с учётом условия (1.1). Простейший случай формулы (2.5) даёт следующее утверждение.

**Лемма 2.** Пусть  $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $h, \tau, \sigma \geq 0$ . Тогда

$$|f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h)| \leq \omega_2\left(f, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

**Доказательство.** Достаточно показать, что для любой функции  $f$  из  $L_{loc}(\mathbb{R})$  справедлива оценка

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h) \leq \omega_2\left(f, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Пусть

$$x(s) = a - \frac{\sigma}{2} + \sigma s, \quad t(s) = h + (\sigma - \tau)s - \frac{\sigma - \tau}{2}.$$

Легко видеть, что для любого  $s \in [0, 1]$  имеем

$$f(x(s) - t(s)) - 2f(x(s)) + f(x(s) + t(s)) \leq \omega_2 \left( f, h + \frac{|\sigma - \tau|}{2} \right).$$

Для завершения доказательства осталось проинтегрировать по  $s \in [0, 1]$ .  $\square$

С подробными доказательствами следующих лемм читатель может ознакомиться в [3]. В их основе лежит изложенный выше метод.

**Лемма 3.** Пусть  $\delta \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $f \in F^0$ . Тогда

$$\left| f_\delta \left( k \pm \frac{\delta}{2} \right) \right| \leq \frac{2 - \delta^2}{4} \omega_2(f, 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Лемма 4.** Пусть  $b \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  $f \in F_b$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{3+b}{1+b} f_{\frac{1-b}{2}} \left( -\frac{1-b}{4} \right) \\ & - \frac{1+b}{4} \left( f_{\frac{3b-1}{4}} \left( \frac{3b-1}{8} \right) + f_{\frac{3b-1}{4}} \left( \frac{5b+1}{8} \right) \right) - \frac{1-b}{2} f_{1-b} \left( \frac{1+b}{2} \right) \\ & \leq \omega_2(f, 1). \end{aligned}$$

**Лемма 5.** Пусть  $b \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  $f \in F_b$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( f_{\frac{3b-1}{4}} \left( 1 + \frac{3b-1}{8} \right) + f_{\frac{3b-1}{4}} \left( 1 + \frac{5b+1}{8} \right) \right) - 2f_{\frac{1-b}{2}} \left( 1 + \frac{3+b}{4} \right) \\ & \leq \omega_2(f, 1). \end{aligned}$$

Примечательно, что на первом этапе доказательства не используется специфика рассматриваемых функций, иными словами, утверждения вида (2.5) могут быть верны для любой ограниченной измеримой функции. В ходе исследования был получен лишь ряд частных случаев. Дальнейшие исследования в этом направлении, по мнению автора, могут быть полезны для решения широкого круга задач.

### §3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 В СЛУЧАЕ $b \in [0, \frac{1}{3}]$

Пусть  $b \in [0, \frac{1}{3}]$ ,  $f \in F_b$ . По лемме 1

$$f_b \left( -\frac{1-2b}{2} \right) - 2f_{\frac{b}{2}} \left( \frac{3b}{4} \right) + 1 \leq \omega_2(f, 1), \quad (3.1)$$

$$-f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) - f_{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{3b}{4}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (3.2)$$

$$-f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (3.3)$$

$$-2f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (3.4)$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \leq \frac{2}{1-b} \cdot \omega_2(f, 1). \quad (3.5)$$

По лемме 2

$$-f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{3b}{4}\right) - f_b\left(1 + \frac{1+2b}{2}\right) \leq \omega_2(f, 1). \quad (3.6)$$

По лемме 3

$$f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1 + \frac{3+3b}{4}\right) \leq \frac{7+6b-9b^2}{8} \omega_2(f, 1). \quad (3.7)$$

Средние значения функции  $f$  связаны равенствами

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) = \frac{2b}{1-b} f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right) + \frac{1-3b}{1-b} f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right), \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) &= \frac{2b}{1-b} f_b\left(1 + \frac{1+2b}{2}\right) \\ &\quad + \frac{1-3b}{1-b} f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1 + \frac{3+3b}{4}\right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) + \frac{b}{2} f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right) + \frac{1-3b}{2} f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) \\ + 2b f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + \frac{1-3b}{2} f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решая задачу линейного программирования

$$\omega_2(f, 1) \rightarrow \inf$$

относительно величин

$$\begin{aligned} f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right), &\quad f_b\left(1 + \frac{1+2b}{2}\right), && f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \\ f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right), &\quad f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right), && f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right), \\ f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right), &\quad f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1 + \frac{3+3b}{4}\right), && \omega_2(f, 1) \\ f_{\frac{b}{2}}\left(1 + \frac{3b}{4}\right), &\quad f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right), \end{aligned}$$

с ограничениями (3.1)–(3.10), получаем

$$\frac{96}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55} \leq \omega_2(f, 1).$$

#### §4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 В СЛУЧАЕ $b \in [\frac{1}{3}, 1]$

Пусть  $b \in [\frac{1}{3}, 1]$ ,  $f \in F_b$ . По лемме 1

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{4}\right) + 1 \leq \omega_2(f, 1), \quad (4.1)$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1 + \frac{5b+1}{8}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (4.2)$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1 + \frac{3b-1}{8}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (4.3)$$

$$-f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{4}}\left(1 + \frac{3b+1}{8}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (4.4)$$

$$-2f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \leq \omega_2(f, 1), \quad (4.5)$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \leq \frac{2}{1-b} \cdot \omega_2(f, 1). \quad (4.6)$$

По лемме 2

$$-f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1 + \frac{1+3b}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) \leq \omega_2(f, 1). \quad (4.7)$$

По лемме 4

$$\begin{aligned} & \frac{3+b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(\frac{1+b}{2}\right) \\ & - \frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right) - \frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) \\ & \leq \omega_2(f, 1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

По лемме 5

$$\frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{7+3b}{8}\right) + \frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{9+5b}{8}\right) - 2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right) \leq \omega_2(f, 1). \quad (4.9)$$

Средние значения функции  $f$  связаны равенством

$$\begin{aligned} \frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + \frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right) + \frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{8}\right) \\ + \frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) + (1-b)f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) = 0. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Решая задачу линейного программирования

$$\omega_2(f, 1) \rightarrow \inf$$

относительно величин

$$\begin{aligned} f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right), & \quad f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right), & \quad f_{\frac{1-b}{4}}\left(1 + \frac{3b-1}{8}\right), \\ f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right), & \quad f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1 + \frac{3b-1}{8}\right), & \quad f_{\frac{1-b}{2}}\left(1 + \frac{3+b}{4}\right), \\ f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{3b+1}{8}\right), & \quad f_{\frac{1-b}{4}}\left(1 + \frac{3b+1}{8}\right), & \quad f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \\ f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right), & & \omega_2(f, 1) \end{aligned}$$

с ограничениями (4.1)–(4.10), получаем

$$\frac{8(11b^2 + 66b - 13)}{3b^4 - 69b^3 + 17b^2 + 385b - 80} \leq \omega_2(f, 1).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yu. Kryakin, *Whitney's theorem for oscillating on  $\mathbb{R}$  functions.* — [arXiv:math/0612442v1.2006](https://arxiv.org/abs/math/0612442v1)
2. О. Л. Виноградов, Л. Н. Ихсанов, *Оценки нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через модули непрерывности высоких порядков.* — Вестник СПбГУ, Сер. 1 **3(61)** (2016), вып. 1, 8–12.
3. Л. Н. Ихсанов, *Оценка нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через второй модуль непрерывности. Подробное изложение,* Препринт ПОМИ No. 5, 2017; [www.pdmi.ras.ru/preprint/2017/rus-2017.html](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2017/rus-2017.html)

Ikhsanov L. N. Estimation of functions orthogonal to piecewise constant functions in terms of the second modulus of continuity.

The article is concerned with the question about the exact constant  $W_2^*$  in the inequality  $\|f\| \leq K \cdot \omega_2(f, 1)$  for bounded functions  $f$  with the property

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = 0, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

The approach suggested made it possible to reduce the known range for the desired constant as well as the set of functions involved in the extremal problem for finding the constant in question.

It is shown that  $W_2^*$  also turns out to be the exact constant in a related Jackson–Stechkin type inequality.

С.-Петербургский  
государственный университет  
Университетский пр. 28, Петродворец,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail:* [lv.ikhs@gmail.com](mailto:lv.ikhs@gmail.com)

Поступило 03 июля 2017 г.